

CONCOURS D'ENTREE 1961 A L'E.N.S. DE FONTENAY-AUX-ROSES *

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Correcteur : Mlle DELAVALT

Répartition des notes attribuées aux 138 copies corrigées, notées de 0 à 60.

La 4^e partie, ayant été abordée sans succès dans quelques copies, par ailleurs de faible valeur, a été peu comptée dans le barème.

Une excellente copie notée 56 domine ; l'utilisation d'une méthode un peu longue pour une question a empêché la candidate d'aborder la 4^e partie. Mais les trois premières sont traitées avec toute la rigueur souhaitable.

La répartition se fait ainsi : 56, 50, 46, 45, 7 notes de 36 à 41, 9 de 30 à 35, 20 de 24 à 29, 30 de 18 à 23, 38 de 12 à 17, 23 de 6 à 11, 7 inférieures à 6. Soient 20 notes seulement au-dessus de la moyenne et 20 entre 24 et 29. La moyenne est plus basse que l'an dernier : 6,3 sur 20 au lieu de 7 sur 20. Cependant, il y a de meilleures copies, mais aussi une grande quantité émaillées de fautes grossières de logique et, en outre, d'erreurs de calcul, ce qui n'a pas permis de relever l'ensemble comme en 1960. Certaines copies sont de véritables romans fleuves où rien n'est démontré. On souhaiterait trouver dans la rédaction *plus de précision et de concision*.

Remarques particulières :

1^{re} partie : La 1^{re} partie guidait l'élève dans la démonstration de la propriété suivante : si u_n est une suite de nombres > 0 , quand $n \rightarrow \infty$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite

$L \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n}$, a la même limite. Un exemple permettrait de conclure que $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow 0$ n'entraîne pas que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite.

La majorité des candidates ont été gênées par le fait qu'elles connaissaient cette propriété avec une démonstration différente de celle suggérée par le texte. Peu se sont laissées guider. Bien que ce ne soit pas l'esprit du texte, celles qui ont transcrit correctement leur cours ont été peu ou pas pénalisées. Par contre, une « démonstration » fréquente et que l'on peut schématiser ainsi :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \rightarrow 1 \text{ (résultat du cours)} \Rightarrow b < \sqrt[n]{u_n} < c \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \rightarrow 1$$

est d'un intérêt nul, puisque en fait hypothèse et conclusion sont identiques.

Les notions de limite et de convergence ne sont pas comprises. Les expressions incorrectes : « à partir d'un certain rang le terme général tend vers 0 », ou « si la série converge par la règle de d'Alembert, elle converge par la règle de Cauchy », ne sont pas de simples négligences d'écriture. Une affirmation fréquente : « une quantité bornée admet une limite » ! La non existence d'une limite ne semble pas imaginable et cependant les candidates en avaient un exemple.

Les règles de d'Alembert et de Cauchy sont, dans l'esprit d'une majorité, des

(*) Voir les énoncés dans le Bulletin 216, p. 530.

conditions nécessaires de convergence. La phrase un peu ambiguë : « la série converge si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite inférieure à 1 », pourrait peut-être être remplacée par : « $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite inférieure à 1 $\Rightarrow$ la série est convergente », ce qui permettrait moins d'erreurs d'interprétation, le sens de la flèche étant non équivoque.

Le 1 c) a donné lieu à toutes les erreurs possibles. En particulier, le calcul de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a été rarement exact ; il ne présentait cependant aucune difficulté. Si, par erreur, la limite trouvée était 0, la conclusion était : « la réciproque, vraie dans le cas particulier, est vraie dans le cas général », faute de logique fréquente, mais non excusable. Un calcul exact a amené fréquemment la conclusion encore plus ahurissante : « la série converge pour n pair et diverge pour n impair », ou bien : « la réciproque n'est vraie que pour n pair ». Enfin, une candidate étudie la limite du rapport pour n infini et $n = 0!!!$

2° partie : La question a), qui ne demandait qu'un peu de calcul, a conduit assez souvent à des résultats exacts. Mais le raisonnement par récurrence a été rarement correct. On calcule trop de termes (le nombre privilégié semble être 7) ou pas assez (on ne calcule que u_3 et on conclut : « on voit immédiatement que » suivi d'un résultat inexact). Ou bien on utilisait un procédé de descente ici très facile, ou bien on calculait u_3 et u_4 , etc... Les élèves devraient être habitués à ce raisonnement délicat mais essentiel.

Une erreur de lecture du texte : au lieu de comparer u_n à $a^{n/2}$, certaines le comparent à $\frac{n}{a^2}$. Dans la mesure du possible et si les conclusions qui suivent sont déduites avec logique, il n'est pas tenu compte de cette erreur.

Pour étudier la convergence de la série, la règle de d'Alembert a eu toutes les faveurs, mais alors il fallait envisager le cas $a = 1$. Quand les candidates sauront-elles que, pour étudier une série, la règle essentielle est de la comparer à une autre série connue qui était ici celle de terme général $a^{n/2}$. Ici, la règle de d'Alembert a eu ceci de bénéfique que, même avec les calculs précédents faux, les candidates ont pu trouver un résultat exact, ce qui leur permettait de continuer.

La difficulté commençait ensuite. Une vingtaine seulement ont compris la suite de cette partie. L'hypothèse du texte était : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sqrt[n]{u_n}$ admet une limite quand n

tend vers l'infini. Les candidates ont commencé leur raisonnement par : « si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite... ». Le cas où la limite n'existe pas n'est pas abordé. Le problème n'avait donc plus sa raison d'être et les paragraphes *b*, *c*, *d*, *e* ont donné lieu à des discours oiseux et très pénibles à lire. Parmi celles qui ont entrevu le lien entre *a*) et la suite et en ont été largement récompensés, peu ont fait un raisonnement correct. Pour la question *d*), dans quelques copies seulement, on retrouve des séries analogues à celles du 1 : $\frac{b^n}{u_n}$ et $\frac{u_n}{c^n}$ avec $b < \sqrt{L} < c$. Enfin, dans *e*), il était inutile de discourir pour ne pas tirer de conclusions exactes. Il suffisait d'écrire :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \sqrt[n]{u_n} \rightarrow L > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \rightarrow \sqrt{L} > 0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ admet une limite} = \sqrt{L},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow L' \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \rightarrow L' \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \sqrt[n]{u_n} \rightarrow L'^2 = L \Rightarrow L' = \sqrt{L}.$$

Quelques candidates ont fait ceci correctement en admettant les résultats précédents, ce qui était parfaitement normal.

En conclusion pour cette partie, l'erreur fondamentale a résulté encore d'une mauvaise compréhension de la notion de limite. Plus ou moins explicitement, elles ont écrit : « Pour qu'un produit de facteurs admette une limite, il est nécessaire que chacun des facteurs ait une limite. » En outre, le signe $\rightarrow$ pour « tend vers » est souvent employé abusivement. On lit fréquemment : $u_n \rightarrow a^{n/2}$ ou plus généralement : $u_n \rightarrow f(n)$, ce qui n'a pas de sens puisque n figure encore dans le 2^e membre.

3^e partie : Le début, par un calcul simple, permettait aux candidates de gagner quelques points qui ont été généreusement attribués. L'étude de $\log P_n$ les a de nouveau arrêtées. Il est bien évident qu'il est inutile de connaître la théorie des produits infinis pour traiter cette question. Alors qu'il est très simple de comparer la série de

terme général $\log \left(1 - \frac{r}{n}\right)$ à celle en $\left(-\frac{r}{n}\right)$, la règle de d'Alembert si chère aux élèves ne donne aucun résultat, et pourtant certaines s'en sont contentées. D'autres n'ont pas reconnu dans $\log P_n$ la somme des n premiers termes d'une série et ont conclu qu'une somme de termes en nombre infini est nécessairement infinie !!! Le calcul de c était très simple quand on prenait les logarithmes des deux membres, car on retrouvait la relation de récurrence (1). La suite était analogue à la 2^e partie, ce qui fait que celles qui avaient traité correctement la 2^e partie ont pu achever rapidement celle-ci.

En conclusion, l'énumération de ces erreurs, choisies parmi les plus graves et les plus fréquentes, montre qu'il est nécessaire avant tout de comprendre les notions fondamentales : limite, convergence. Les candidates retrouveront toujours alors les règles qui leur sont nécessaires. Les règles de d'Alembert et de Cauchy, dont on ne nie pas l'utilité, sont presque toujours utilisées à tort et à travers. Peut-être, en définitive, serait-il plus sage de se borner à la simple règle fondamentale de comparaison des séries et de développer plus la logique que la mémoire. En tout cas, pour appliquer correctement une règle, il faut l'avoir comprise, il est évident que ce n'était pas encore le cas cette année.

EPREUVES ORALES

Option Mathématiques

42 candidates ont été interrogées. Leurs notes s'échelonnent de 4 à 18 de la façon suivante : deux 18, deux 17, un 16, cinq 15, cinq 14, trois 13, cinq 12, quatre 11, cinq 10, trois 9, deux 8, un 7, deux 6, un 5 et un 4.

Les très bonnes notes ne correspondent pas nécessairement aux bonnes copies d'écrit ; en particulier, un 18 a été attribué à une candidate qui n'avait pas la moyenne au problème sur les séries.

Même remarque qu'en 1960, les candidates ignorent presque toujours les démonstrations des théorèmes ou formules qu'elles utilisent, elles n'en connaissent même pas l'idée directrice. Il n'est pas question de savoir par cœur une question de cours. Mais il est impossible d'appliquer correctement un résultat si l'on ignore l'importance des hypothèses faites et, en outre, essayer de comprendre une démonstration est un excellent exercice de raisonnement. Les candidates ne doivent pas se contenter d'être de bonnes techniciennes, elles doivent pouvoir faire preuve d'initiative.

En analyse, la formule des accroissements finis et celle de Taylor semblent complètement délaissées, et si par hasard elles sont connues, il est inutile d'essayer d'obtenir même l'idée directrice de la démonstration.

Les incursions dans la partie nouvelle du programme ont rarement été couronnées de succès. Là encore, plus que le détail, il est nécessaire d'insister sur les idées essentielles ; le programme de géométrie et surtout celui d'analyse permettent de varier les exemples de structure. Les candidates sont d'excellentes machines à

calculer les valeurs propres, à condition cependant que l'on n'ait pas l'idée diabolique de multiplier, par exemple, la matrice par un scalaire. Mais il est très pénible de leur faire expliquer d'où provient ce déterminant caractéristique sur lequel elles se précipitent. Enfin une dernière remarque : pourquoi les déterminants d'ordre 3 ont-ils droit à un traitement particulier (la règle de Sarrus) qu'il sera impossible de généraliser et qui est utilisé même quand il existe une ligne possédant deux zéros ! S'il est plus facile de raisonner sur l'ordre 3, qu'au moins la généralisation à l'ordre n soit préparée.

Option Sciences Naturelles

28 candidates ont été notées de 8 à 18 : un 18, deux 17, deux 16, six 15, cinq 14, cinq 13, quatre 12, un 11, un 9 et un 8.

Pour ces candidates, par contre, on ne demande, en Mathématiques, que d'être de bonnes techniciennes. En général c'est le cas. La maladresse et la lenteur sont certainement un handicap pour l'écrit où elles sont livrées à elles-mêmes. À l'oral, un peu guidées et encouragées, elles s'en tirent très honnêtement. L'utilisation des différentielles semble cependant assez difficile ; en particulier, les candidates interrogées sur ce point ont été incapables de faire un changement de variables dans une équation différentielle.

RAPPORT SUR LE PROBLEME N° 2 DE L'OPTION MATHÉMATIQUES

(Correcteur : M. PERRICHET)

Répartition des notes des 138 copies corrigées et cotées de 0 à 60.

Avec un barème de correction très large (n'englobant pas une des parties du problème, non traitée par la presque totalité des candidates), les notes correspondant à la valeur intrinsèque des compositions se répartissent ainsi : un 47, un 40, puis des notes s'échelonnant assez régulièrement de 36 à 1, avec quinze notes inférieures ou égales à 5.

Après avoir relevé ces notes dans leur ensemble, voici la répartition des notes définitives : une note 53, une note 45, une note 41, huit notes de 38 à 34, seize notes de 33 à 29, trente-quatre notes de 28 à 20, cinquante et une notes de 18 à 9, dix-sept notes de 8 à 5, neuf notes de 4 à 0,5.

Il y a 22 notes au-dessus de la moyenne et 8 très proches.

Observations générales : Si cette épreuve portant sur la géométrie analytique et la géométrie est un peu moins mauvaise que l'an passé, on ne peut en conclure que le niveau des candidates soit meilleur. Cela tient à la facilité d'un certain nombre de questions du problème et, malheureusement, tous les défauts signalés l'an passé se retrouvent et souvent accentués.

À lire les copies, on est amené à se demander si les Mathématiques modernes, dont le but est de simplifier le classement des connaissances en dégagant les structures fondamentales, d'obtenir une plus grande efficacité dans l'étude des problèmes en mettant en évidence certaines analogies, n'aboutissent pas pour beaucoup de nos élèves à un résultat tout à fait opposé : à savoir, de rendre compliqué tout ce qui est simple.

Que de raisonnements inconsistants, que de phrases nébuleuses où le vocabulaire nouveau est mal utilisé, trahissant en définitive une grande ignorance !

Bientôt les élèves ne sauront plus regarder une figure, ni même la faire (la mise en place de résultats sur une figure ne les intéresse pas). Elles ne sauront plus observer une expression algébrique, l'interpréter, en dégager les propriétés.

Par exemple une courbe du second ordre perd toute existence réelle ; dans l'esprit des candidates, elle est associée à un symbole algébrique, une matrice, ce qui

conduit certaines d'entre elles à une page de calculs, d'ailleurs corrects, pour obtenir l'équation d'un cercle, alors que la connaissance de la signification géométrique des coefficients leur permet d'obtenir en deux lignes cette même équation. La relation de conjugaison de deux points est aussi maniée très lourdement, elle est même ignorée par certaines candidates qui, pour écrire que deux points M et M' sont conjugués par rapport à un cercle, écrivent l'orthogonalité du cercle et du cercle de diamètre MM' .

On applique finalement sans réflexion des mécanismes de calcul qu'une observation de la figure permettrait d'éviter : recherche analytique du centre d'une conique à partir de son équation, alors qu'il est connu d'après les données ; calcul d'une excentricité dans le § 2 ; établissement pénible de la relation $\overline{Mq} = -\overline{M\omega}$ dans le § 6 qui résulte immédiatement du fait que O, M, Q sont trois sommets d'un rectangle.

La maladresse, la longueur des calculs et l'inutilité de la plupart d'entre eux restent les plus graves défauts. En voici des exemples :

1° Au début du § 2, la relation $e = \frac{1}{\sin \varphi}$ est une évidence géométrique puisque

$\frac{\pi}{2} - \varphi$ est le demi-angle des asymptotes de l'hyperbole (H). On préfère, sans regarder la figure, calculer les éléments a et c de (H), ce qui représente plus de deux pages de calcul sur certaines copies, avec, le plus souvent, une conclusion inexacte.

2° Pour trouver l'équation de (H) dont on donne le foyer en O et le cercle principal, on n'utilise pas la directrice associée à O , mais le deuxième foyer O' , alors que la définition bipolaire conduit à une mise en équation pénible.

3° On ignore, ou on ne pense pas à utiliser l'équation d'une droite sous forme normale : $x \cos t + y \sin t - p(t) = 0$. Cela donne pourtant immédiatement l'équation de la directrice de (H), ainsi que l'équation de son axe non transverse.

4° On a toujours la manie de développer et d'ordonner toutes les équations implicites ; ce qui conduit, par exemple, à des calculs affreux pour trouver les points de (H) situés sur Ox , alors qu'il suffit de faire $\theta = 0$ dans l'équation en coordonnées polaires ou d'observer l'équation implicite sous sa forme initiale :

$$(x^2 + y^2) \sin^2 \varphi = [(x - a) \cos \varphi + (y - a) \sin \varphi]^2.$$

La solution $x = ay = 0$ est facile à dégager.

5° Pour trouver l'axe de la parabole $y = \frac{x^2}{a} - x$ (étudiée depuis la classe de Seconde), une candidate propose de chercher la polaire du point à l'infini de Oy !!!, calcul qui lui demande une demi-douzaine de lignes.

6° Les notions des candidates sur les coordonnées polaires sont très insuffisantes ou incertaines ; très peu ont été capables de trouver l'équation polaire de (H), alors que le foyer était au pôle et que la directrice et l'excentricité étaient connues. Au § 6, la recherche des coordonnées de Q ne demande aucun calcul, il suffit de savoir la signification géométrique des coefficients de l'équation normale d'une droite ou d'utiliser une méthode vectorielle ; or, on trouve dans les copies plus d'une page de calculs avec manipulation bien inutile de formules de changement d'axes de coordonnées. Définissant l'angle V du rayon vecteur et de la tangente, par sa tangente, les candidates ne peuvent obtenir rigoureusement la formule algébrique $\overline{Mq} = -\overline{M\omega}$; la plupart trichent, les plus honnêtes se contentent d'affirmer qu'en regardant la figure, on voit bien (?) que $\overline{Mq}$ et $\overline{M\omega}$ sont de sens contraires.

7° La recherche des enveloppes se fait toujours aussi maladroitement ; on dérive par rapport au paramètre, même si ce dernier figure algébriquement au second degré ; ou bien on garde deux paramètres, alors que la relation qui les lie est du premier degré par rapport à l'un d'eux.

8° Dans la représentation paramétrique d'une courbe où le paramètre φ ne figure que par $\operatorname{tg} \varphi$, non seulement on ne pense pas à poser $\operatorname{tg} \varphi = t$, mais, dans le calcul des dérivées de x et de y , on laisse dans chaque terme $(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)$ sans même le mettre en facteur.

Remarques particulières concernant le problème.

§ 1. — Il a été traité plus ou moins convenablement par la presque totalité des candidates, mais certaines ne reconnaissent pas une parabole (P) dans le lieu des centres C des cercles ; la mise en place de (P) est faite sans soin ; on ne signale pas la tangente en O, on ne précise pas le foyer qui est sur Ox.

Pour l'enveloppe des cercles (C), on oublie que Ox en fait partie et on donne comme résultat une cubique circulaire, souvent inexacte (ce qui empêche d'apercevoir sa décomposition).

On parle beaucoup de « déférente », mais le mot seul est resté dans les esprits ; il vaudrait mieux reconnaître que la famille des cercles (C) est extraite d'un réseau linéaire dont le centre est le milieu de OA et utiliser l'inversion laissant le réseau invariant.

§ 2. — C'est dans ce paragraphe que les maladroites s'accumulent : calcul de e , recherche des équations cartésienne et polaire de (H). Bien qu'une des directions asymptotiques de (H) soit toujours Oy d'après sa définition géométrique, on perd son temps à retrouver par le calcul ce point fixe à l'infini. Quant au point fixe où (H) coupe Ox à distance finie, il n'est pas trouvé dans beaucoup de copies.

La recherche des coniques (H) particulières est encore plus faible. Pour avoir le point C sur Ox, on se contente de faire $\varphi = 0$, ce qui donne bien le point d'abscisse a , mais ne donne pas l'origine O correspondant à $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Pour les hyperboles

équilatères, on se contente de dire qu'elles correspondent à $|\varphi| = \frac{\pi}{4}$, sans se soucier

de les mettre en place ; or, pour $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, elle dégénère en les deux axes Ox Oy et,

pour $\varphi = +\frac{\pi}{4}$, elle a pour centre B(2a, 2a) et pour équation :

$$(x - 2a)(y - 2a) - 2a^2 = 0.$$

Quant aux polaires de A par rapport aux (H), on se contente de dire qu'elles passent par O ; seules, trois ou quatre candidates voient qu'elles sont confondues suivant $x + y = 0$.

§ 3. — Une seule candidate est arrivée à trouver les coordonnées des deux points fixes. Quelques autres ont amorcé des calculs, mais à part trois ou quatre, ont vite renoncé. Le plus grand nombre n'ont rien rédigé sur cette question, mais peut-être beaucoup d'entre elles ont-elles perdu beaucoup de temps sur leurs brouillons.

Les coordonnées des points de (H) situés sur $y = x \operatorname{tg} \theta$ s'obtiennent facilement à l'aide de l'équation polaire de (H). L'équation des tangentes (on peut utiliser l'équation cartésienne) s'écrit :

$$\varepsilon x \cos \theta + (\varepsilon \sin \theta - 1)y + a - (x - a) \cotg \varphi = 0 \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Elle dépend bien d'un paramètre au premier degré : $\cotg \varphi$. Les deux points fixes forment sur la droite $x = a$ une division harmonique avec le point A et le point d'ordonnée : $-a \cotg \theta$.

Géométriquement, on peut, par une transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle de centre F et de rayon a , transformer les hyperboles (H) en cercles homothétiques tangents à $y = 0$ et $x = a$. La droite $y = x \operatorname{tg} \theta$ se transforme en un point à l'infini d'où l'on mène les tangentes aux cercles homothétiques ;

le lieu des points de contact comprend deux droites passant par le point $(a, 0)$. En revenant à la première figure, ces droites donnent deux points sur $x = a$.

On peut aussi remarquer que deux hyperboles (H) quelconques se correspondent dans une homologie de centre O, d'axe d'homologie $x = a$. La droite $y = x \operatorname{tg} \theta$ coupe deux (H) quelconques en deux points homologues et les tangentes en ces points se coupent bien sur l'axe d'homologie en des points fixes.

§ 4. — Les candidates non arrêtées par leurs erreurs antérieures et ayant su trouver l'équation de l'axe non transverse de (H) ont obtenu facilement la représentation paramétrique de l'enveloppe (E). Mais, par suite de la faiblesse en trigonométrie, très souvent dans les expressions de x et de y , on garde un mélange de fonctions trigonométriques de φ et 2φ sans voir que les formules sont homogènes en $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$ et permettent de prendre pour paramètre : $t = \operatorname{tg} \varphi$.

Pour la construction de la courbe, on oublie que c'est une enveloppe de droites et que, par suite, les tangentes sont connues ; en particulier le coefficient angulaire

de la tangente : $\frac{y'}{x'} = -\cotg \varphi$ varie toujours dans le même sens et ceci permet

d'affirmer que le rebroussement est de première espèce ; dans la grande majorité des copies, on ne trouve aucune explication ou justification pour ce point stationnaire.

Les candidates ont été arrêtées par la mise en place de (E) par rapport aux

données et à la parabole (P). En dehors du point de rebroussement $\left(t = -\frac{1}{3}\right)$ et du

point A ($t = 0$) où la tangente est parallèle à Oy, il fallait déterminer les points communs à (E) et (P) ; une seule candidate a pu se débrouiller de l'équation en t et montrer qu'elle n'avait pas d'autres racines que $t = -1$ correspondant au point B ($2a, 2a$) où la tangente passe en O et $t = +1$ correspondant au point B₁ ($-2a, 6a$), BB₁ étant en même temps la normale en B et la tangente en B₁ à (E).

§ 5. — Il était facile, mais ne pouvait être traité que par le petit nombre de candidates ayant obtenu des résultats exacts au § 4.

Le point C₀ $\left(\frac{2a}{3}, -\frac{2a}{9}\right)$ de (P), où la tangente a pour pente $\frac{1}{3}$, a été déterminé, mais aucune candidate n'a pu montrer que le cercle osculateur (Ω_0) en C₀ à (P) passe par O. (Ω_0) recoupe (P) en un seul point C, en dehors de C₀. En utilisant une propriété des cordes communes à un cercle et une conique, on peut même éviter la recherche de (Ω_0) ou de son centre. C₀C₁ est en effet symétrique en direction de la

tangente en C₀ à (P) par rapport à l'axe de (P) ; elle a donc pour pente $-\frac{1}{3}$ et par suite C₁ est en O.

§ 6. — Il a pour but de généraliser pour une courbe quelconque (K) le résultat obtenu au § 5 pour (P).

Étant indépendante de ce qui précède, cette étude a été abordée par presque toutes les candidates. Les résultats demandés ont été obtenus plus ou moins partiellement, mais au prix de calculs vraiment extravagants. On ne sait pas utiliser le repère mobile OX, OY de vecteurs unitaires $\vec{I}, \vec{J}$, proposé dans l'énoncé.

Pourtant, une fois établi que $\vec{OQ} = r\vec{I} + r'\vec{J}$, on a immédiatement :

$$\frac{d\vec{OQ}}{d\theta} = (r + r'')\vec{J}$$

et le point Q₀ est stationnaire si $r_0 + r''_0 = 0$.

Si μ_0 est le centre de courbure de (K) en M₀, un calcul rapide montre que :

$$M_0\mu_0 = \frac{(r_0^2 + r_0'^2)^{1/2}}{2} = \frac{M_0N_0}{2}$$

si N₀ est le quatrième sommet du rectangle de sommet O, M₀, Q₀.

Le 22 juin 1961.

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES DE L'OPTION SCIENCES NATURELLES

(Correcteur : M. PERRICHET)

Répartition des notes des 58 copies corrigées, cotées de 0 à 40.

Les notes correspondant à la valeur intrinsèque des compositions s'échelonnaient assez régulièrement de 1 à 27 avec, de plus, une copie notée 32.

Elles n'ont été que légèrement augmentées. Voici la répartition des notes définitives : une note 36, 3 notes : 30, 29, 28, 8 notes de 21 à 25, 23 notes de 12 à 19, 23 notes de 1 à 8. A noter une coupure très nette (aucune note entre 8 et 12) entre le lot des copies médiocres et celui des copies tout à fait insuffisantes.

Observations générales : Le problème posé a sans doute plus gêné les candidates que celui de l'an passé, ce qui explique le plus grand nombre de notes comprises entre 1 et 10. Ceci n'est pas dû à des difficultés particulières glissées dans le problème, mais au fait qu'il exigeait une bonne connaissance de la trigonométrie, du calcul des dérivées et du calcul des primitives ; conditions non réalisées pour la plupart des candidates :

1° En trigonométrie, on ne s'aperçoit pas que $\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} = \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}$; on fait de longs calculs pour étudier le signe de $\cos^{2n} x - \sin^{2n} x$, alors que x varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$; où l'on trouve des formules surprenantes comme $\cos^{2n} x - \sin^{2n} x = (\cos 2x)^n$; à noter qu'une candidate désirant trouver la valeur de $\cos^{2n} x$ pour $x = 0$ préfère l'écrire $e^{2n \operatorname{Log} \cos x}$!

Dans un grand nombre de copies, on est arrêté par l'étude du signe de $(\sin x - \sin a)$ et, *a fortiori*, du signe de $z = \sin a - 2 \sin^3 x$. Les unes calculent z' et font le tableau des variations de z pour trouver les racines ; d'autres proposent des solutions graphiques en construisant $y_1 = \frac{\sin a}{\sin^2 x}$ et $y_2 = 2 \sin a$.

2° Les règles élémentaires du calcul des dérivées sont ignorées ; les dérivées de fonctions simples comme $\operatorname{tg} x$ ou $\operatorname{cotg} x$ pourraient être sues par cœur.

Trop de candidates sont incapables de calculer la dérivée de $\sin^n x$ pour laquelle elles proposent $n \cos^{n-1} x$ ou $n \sin^{n-1} x \cos^{n-1} x \dots$

3° Le calcul des primitives n'est pas plus heureux. Si l'inattention ou l'étourderie expliquent les erreurs dans les primitives de $\sin x$ ou $\cos x$, on est plus inquiet en voyant proposer $\cos x - \cos a$ comme primitive de $\sin a - \sin x$, alors que a est une constante.

L'ignorance du tableau des dérivées a fait perdre beaucoup de temps aux candidates, s'évertuant à trouver la primitive de $\frac{1}{\sin^2 t}$; elles posent en général $\operatorname{tg} t = u$,

mais quelques-unes ont préféré faire le changement de variable $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = u$, ce qui les conduit après beaucoup de calculs à $-\frac{1}{2} \left(\operatorname{cotg} \frac{t}{2} - \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)$ où elles sont bien incapables, vu leur faiblesse en trigonométrie, de reconnaître $-\operatorname{cotg} t$.

Remarques particulières concernant le problème.

I. § 1. — Dans l'étude de la fonction proposée, ou bien on ne signale pas la symétrie par rapport à $x = \frac{\pi}{2}$, ou bien on la trouve maladroitement [pour justifier

une symétrie par rapport à $x = h$, il vaut mieux en général substituer x et $2h - x$ que $(h - \alpha)$ et $(h + \alpha)$.

Beaucoup de candidates ont été incapables de calculer le minimum et de s'apercevoir qu'il était nul.

Très peu de copies signalent le cas $n = 0$, où la fonction est constamment nulle.

§ 2. — Beaucoup n'ont pas su utiliser l'étude du § 1 en formant $\sin^2 y + \cos^2 y$.

D'autres, ayant trouvé que x était nécessairement égal à $\frac{\pi}{4}$, sont incapables d'en

déduire la valeur de y ; elles tirent $y = \text{Arc sin} \left(2^n \sin^{n+1} \frac{\pi}{4} \right)$ de l'une des équations pour porter dans l'autre ! et n'arrivent pas à conclure.

Une ou deux candidates seulement ont aperçu la singularité du cas $n = 0$ où le système, au lieu d'une solution unique, admet une infinité de solutions : $x = y$.

§ 3. — Très peu de candidates ont vu que $2^{\frac{n}{2}} \cos^{n+1} x \geq \cos y$ s'écrit :

$$2^n \cos^{(2n+2)} x \geq 1 - \sin^2 y,$$

puis $2^n (\cos^{2n+2} x + \sin^{2n+2} x) \geq 1$ qui se trouve vérifiée d'après le § 1.

Il aurait fallu préciser que le signe $=$ avait lieu pour $n = 0$.

II. L'étude des fonctions a été correctement traitée dans quelques copies.

§ 1. — La fonction $\psi(x)$ était : $\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin a + \cos x$.

Beaucoup de candidates oublient la constante d'intégration ou se trompent dans sa détermination.

Le tracé de l'arc de courbe AB pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ n'est pas assez soigné; les pentes des tangentes en A et B ne sont pas calculées; $y'' = -\cos x$ fixait la concavité toujours tournée vers les y négatifs, ce qui éliminait toute inflexion dans le tracé.

La déduction de la courbe complète à partir de l'arc AB n'a pas en général été vue, ou bien a été mal justifiée. Si la symétrie est mise en évidence par le changement de x en $\pi - x$, la translation définie par le vecteur $(2\pi, 2\pi \sin a)$ n'a pas été dégagée du changement de x en $2\pi + x$.

§ 2. — L'expression de la fonction : $2 \cos x - \sin a \cotg x$ est en général exacte; mais les candidates oublient qu'elles l'ont obtenue par une intégrale définie et que, par suite, la dérivée est connue; elles calculent à nouveau cette dernière et quelques-unes se trompent.

Une ou deux candidates seulement ont su utiliser les résultats du 1° pour montrer que le maximum M vérifie : $M \geq \cos a$. L'égalité a lieu pour $a = \frac{\pi}{4}$ et l'abscisse

du maximum est alors $\frac{\pi}{4}$.

III. Un très grand nombre de candidates n'ont pas su établir la formule de récurrence du § 1, faute de penser à remplacer $\cos^2 t$ par $1 - \sin^2 t$ dans l'intégrale

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos^2 t \, dt}{\sin^n t}.$$

Pour les § 2 et 3, quelques candidates seulement ont essayé d'établir les formules demandées, mais la démonstration n'est jamais correcte, le raisonnement par récurrence n'étant pas compris.

Le 23 juin 1961.

RAPPORT SUR L'ORAL DE L'OPTION MATHÉMATIQUES

Interrogation de Mathématiques

(Interrogateur : M. PERRICHET)

42 candidates ont été interrogées. Les notes se répartissent ainsi : un 18, un 17, deux 16, trois 15, huit 14, six 13, six 12, quatre 11, cinq 10, quatre 9, deux 8.

La cotation a été indulgente pour tenir compte des modifications apportées cette année au programme, mais, malgré tout, le tassement des notes autour de 13 fait ressortir l'honnête médiocrité du concours, déjà sensible à l'écrit.

Volontairement, les problèmes posés à l'écrit ne concernaient pas les parties nouvelles du programme ; mais à l'oral presque toutes les candidates ont été interrogées à la fois sur les nouveaux et sur les anciens paragraphes du programme. Si, pour certaines, la solidité des connaissances était suffisante dans les deux cas, un trop grand nombre, comme on pouvait s'y attendre, n'avaient pas bien appris ou assimilé les nouvelles théories.

Ceci peut s'expliquer, d'ailleurs, par la parution tardive des nouveaux programmes et la décision également tardive des suppressions effectuées exceptionnellement cette année. Il faut espérer que nous ne serons plus l'an prochain dans cette période de rodage.

Le 30 juin 1961.