

A PROPOS DU PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DE HIGH SCHOOL

Remarque du traducteur : La déclaration qui suit a paru sous le titre « On the Mathematics Curriculum of the High School » dans les numéros de mars 1962 des deux revues américaines « The Mathematics Teacher » et « The American Mathematical Monthly ». Elle paraît ici en traduction avec l'aimable autorisation de ces revues. Bien que ce texte se réfère à la situation aux Etats-Unis, et aux travaux visant à réformer l'enseignement des Mathématiques entrepris là-bas, il n'est peut-être pas sans intérêt pour l'Europe : d'abord en raison de l'importance et de la portée des directives qu'il énonce ; en outre, parce que certaines des tendances auxquelles il fait allusion se reflètent également dans diverses entreprises européennes de réforme de l'enseignement des Mathématiques. — Bien que le terme « high school » désigne aux Etats-Unis un niveau scolaire un peu différent, on verra que du point de vue de l'enseignement des Mathématiques ce niveau équivaut pratiquement à l'enseignement du Second Degré.

Le traducteur : Alexandre WITTENBERG, Québec (Canada).

Le mémorandum qui suit a été composé par plusieurs des soussignés et envoyé à soixante-quinze mathématiciens des Etats-Unis et du Canada. On n'a pas essayé d'accumuler un grand nombre de signatures en sollicitant tous les membres de la communauté mathématique. Le but poursuivi était plutôt d'obtenir un nombre modeste de signatures venant d'hommes possédant une compétence, un « background » et une expérience mathématiques, et se trouvant à des endroits différents. Un petit nombre parmi les soussignés, dont l'appui est certes bienvenu, offrirent d'apporter l'appui de leurs noms après que des collègues leur eurent parlé du mémorandum.

Les mathématiciens de ce pays disposent maintenant d'un climat plus favorable pour développer et faire accepter des améliorations dans l'enseignement des Mathématiques. En fait, plusieurs groupes ont reconnu l'occasion qui se présente et accomplissent, avec les meilleures intentions du monde, un travail considérable pour en tirer profit.

Ce serait cependant une tragédie si la réforme des programmes s'engageait dans une mauvaise direction et si cette précieuse occasion était gaspillée. Malheureusement, l'état de choses actuel comporte des facteurs et des forces qui peuvent nous égarer. Autrefois, l'enseignement s'est trouvé sous la domination d'éducateurs professionnels qui avaient peut-être tendance à mettre l'accent sur la pédagogie aux dépens du contenu de l'enseignement ; il est possible que les mathématiciens réagissent maintenant en mettant l'accent sur le contenu aux dépens de la pédagogie ; leur action peut être tout aussi inefficace. Des mathématiciens peuvent affirmer inconsciemment que tous les jeunes gens devraient aimer ce qu'aiment les mathématiciens contemporains, ou bien que les seuls élèves dont il vaut la peine de s'occuper soigneusement sont ceux qui pourraient un jour devenir des mathématiciens professionnels. Le fait qu'aujourd'hui il est nécessaire d'apprendre beaucoup plus de mathématiques qu'autrefois peut nous faire rechercher des raccourcis qui pourraient, cependant, causer plus de tort que de bien.

Etant donné les dangers possibles, il sera peut-être utile que nous formulions des principes qui nous semblent fondamentaux et des directives pratiques.

1) POUR QUI ? — Le programme de Mathématiques des écoles secondaires doit servir les besoins de tous les élèves : il doit contribuer au fonds culturel de l'élève moyen et offrir une préparation professionnelle aux futurs usagers des Mathématiques, c'est-à-dire aux ingénieurs et travailleurs scientifiques ; il doit tenir compte pour cela aussi bien des sciences physiques, qui forment la base de notre civilisation technologique, que des sciences sociales qui auront peut-être besoin de plus en plus de Mathématiques dans l'avenir. Tout en satisfaisant les besoins des autres élèves, le programme peut aussi offrir les matériaux les plus essentiels aux futurs mathématiciens. Mais enseigner à tous les élèves des matières qui ne sauraient intéresser que la petite minorité de futurs mathématiciens est du gaspillage et revient à ne pas tenir compte des besoins de la communauté scientifique et de ceux de la société en général.

2) SAVOIR, C'EST SAVOIR FAIRE. — En Mathématiques, des connaissances n'ont une valeur que si elles ne consistent pas simplement en une possession d'information, mais constituent un « savoir faire ». Savoir des Mathématiques signifie être capable de faire des Mathématiques : d'utiliser le langage mathématique avec une certaine aisance, de résoudre des problèmes, de soumettre des raisonnements à une analyse critique, de découvrir des démonstrations et, ce qui est peut-être l'activité la plus importante, de reconnaître un concept mathématique dans une situation concrète donnée, ou de l'extraire d'une telle situation.

Pour ces raisons, introduire des concepts nouveaux en l'absence d'un arrière-fonds suffisant de faits concrets, introduire des concepts unificateurs alors qu'il n'y a pas d'expérience à unifier, ou insister sur les concepts introduits, sans que des applications concrètes viennent proposer à l'élève un défi intellectuel véritable, tout cela est pire qu'inutile : une formalisation prématurée peut conduire à la stérilité ; l'introduction prématurée d'abstractions provoque la résistance, particulièrement celle d'esprits critiques qui, avant d'accepter une telle notion, désirent savoir pourquoi elle s'impose et comment elle peut être utilisée.

3) LES MATHÉMATIQUES ET LES AUTRES SCIENCES. — Dans leur signification culturelle, aussi bien que dans leur usage pratique, les Mathématiques sont liées aux autres sciences et les autres sciences sont liées aux Mathématiques, qui constituent leur langage et leur instrument essentiel. Si on les sépare des autres sciences, les Mathématiques perdent une des sources les plus importantes d'intérêt et de motivation.

4) DÉVELOPPEMENT INDUCTIF ET PREUVES FORMELLES. — La pensée mathématique n'est pas simplement raisonnement déductif, elle ne consiste pas seulement en démonstrations formelles. Les processus mentaux qui nous suggèrent quoi démontrer et comment le démontrer font tout autant partie de la pensée mathématique que la démonstration qui finit par en résulter. Dégager le concept approprié d'une situation concrète, généraliser à partir de cas particuliers observés, raisonner de façon

inductive, raisonner par analogie, et trouver des raisons intuitives pour une conjecture qui se dégage, tout cela sont des façons mathématiques de penser.

En fait, l'élève ne peut pas comprendre le rôle véritable de la démonstration formelle et rigoureuse s'il n'a pas une certaine expérience de tels processus de pensée « non formels » ; Hadamard a très bien décrit ce rôle : « Le but de la rigueur mathématique est de sanctionner et de légitimer les conquêtes de l'intuition, et elle n'a jamais eu d'autre but. »

Il y a différents niveaux de rigueur. L'élève devrait apprendre à apprécier, à découvrir et à analyser de façon critique des démonstrations au niveau qui correspond à son expérience et à ses connaissances. En le poussant de façon prématurée vers un niveau trop formel, on peut le décourager et le dégoûter. En outre, il peut beaucoup mieux acquérir le sens de la rigueur sur des exemples dans lesquels la démonstration règle des difficultés authentiques, que sur des exemples de coupage de cheveux en quatre ou d'une insistance sans fin sur des trivialités.

5) MÉTHODE GÉNÉTIQUE. — « Dans chaque matière il y a grand avantage pour l'étudiant à lire les travaux originaux, car on assimile toujours la science de la façon la plus complète lorsqu'elle est à l'état naissant », écrivait James Clerk Maxwell. Il y a eu quelques maîtres inspirés, tels Ernst Mach, qui pour expliquer une idée en référaient à sa genèse et retraçaient la formation historique de cette idée. Ceci peut nous suggérer un principe général : la meilleure façon de guider le développement mental de l'individu est de lui faire retracer le développement mental du genre humain — retracer ses grandes lignes, naturellement, et non pas les mille erreurs de détail.

Ce principe génétique peut nous garder d'une confusion répandue : Si A précède logiquement B dans un certain système, il peut néanmoins être justifié de faire passer B avant A dans l'enseignement, surtout si B est venu historiquement avant A. En général, nous pouvons nous attendre à un plus grand succès en faisant ce que nous suggère le principe génétique qu'en suivant les suggestions d'une conception purement formelle des Mathématiques.

6) MATHÉMATIQUES « TRADITIONNELLES ». — L'enseignement mathématique dans les écoles élémentaires et secondaires est bien en retard sur les besoins de notre époque et a grand besoin d'améliorations essentielles : nous souscrivons fortement à cette opinion à peu près universellement acceptée. Cependant, il faudrait examiner de très près l'affirmation souvent entendue voulant que les matières enseignées dans les écoles secondaires soient périmées ; il ne faudrait pas l'accepter sans contrepartie. L'algèbre élémentaire, la géométrie plane et, dans l'espace, la trigonométrie, la géométrie analytique et le calcul différentiel et intégral sont toujours d'importance fondamentale, comme ils l'étaient il y a cinquante ou cent ans. Les futurs usagers des Mathématiques doivent apprendre toutes ces matières, qu'ils se préparent à devenir mathématiciens, physiciens, spécialistes en sciences sociales ou ingénieurs, et toutes ces matières peuvent offrir des valeurs culturelles aux élèves généraux. Le programme traditionnel comprend tous ces sujets, à l'exception du calcul différentiel et intégral, dans une certaine mesure ; il serait désastreux d'abandonner l'un quelconque d'entre eux.

Ce qui est mauvais dans le programme actuel n'est pas tant le choix des matières en tant que tel, que l'isolement des Mathématiques d'autres domaines de la connaissance et de la recherche, particulièrement des sciences physiques, et l'isolement des différentes matières enseignées les unes des autres ; même à l'intérieur d'un même sujet, les techniques et les théorèmes apparaissent à l'élève comme des trucs isolés et non reliés entre eux ; il est laissé dans le noir sur l'origine et les buts des manipulations et des faits qu'on lui demande d'apprendre par cœur. Et c'est ainsi qu'il arrive malheureusement souvent que les matières enseignées apparaissent comme inutiles et ennuyeuses, sauf peut-être pour les quelques futurs mathématiciens qui peuvent persister en dépit du programme.

7) MATHÉMATIQUES « MODERNES ». — Etant donné le manque de connexion entre les différentes parties du programme actuel, il est possible que les groupes

travaillant sur les nouveaux programmes soient bien inspirés de chercher à introduire des concepts unificateurs généraux. Nous pensons aussi qu'il est possible qu'un usage judicieux des ensembles et du langage et des concepts de l'algèbre « abstraite » apporte plus de cohérence et d'unité dans le programme de high school. Cependant, l'esprit des Mathématiques modernes ne peut pas être enseigné simplement en répétant leur terminologie. En accord avec nos principes, nous souhaitons que l'introduction de termes et de concepts nouveaux soit précédée d'une préparation « concrète » suffisante, et qu'elle soit suivie d'applications véritables, proposant de vrais problèmes aux élèves, et non pas de matières insignifiantes et ne rimant à rien : il faut motiver et appliquer une notion nouvelle si l'on veut convaincre des jeunes gens intelligents qu'elle vaut la peine de lui accorder leur attention.

Nous ne pouvons nous engager ici dans une analyse détaillée des programmes nouveaux qui ont été proposés, mais nous ne pouvons pas ne pas dire que, si nous les évaluons sur la base des directives formulées plus haut, nous trouvons des points sur lesquels nous ne pouvons pas être d'accord.

Naturellement, tous les mathématiciens n'ont pas les mêmes goûts. Les Mathématiques ont beaucoup d'aspects. On peut les considérer comme un instrument qui nous permet de comprendre le monde autour de nous : il est probable que c'est cette valeur-là que les Mathématiques possédaient pour Archimède et Newton. On peut aussi considérer les Mathématiques comme un jeu soumis à des règles arbitraires, où la principale considération est de s'en tenir aux règles du jeu : une vue de ce genre peut être appropriée pour certains problèmes de fondements. Il y a plusieurs autres aspects des Mathématiques et un mathématicien de profession peut préférer l'un quelconque d'entre eux. Cependant, lorsqu'il s'agit d'enseignement, le choix n'est pas une simple affaire de goût. Nous pouvons attendre de jeunes gens intelligents qu'ils désirent explorer le monde autour d'eux, mais nous ne pouvons pas attendre d'eux qu'ils apprennent des règles arbitraires : pourquoi juste ces règles-là et non pas d'autres ?

En tout cas, nous souhaitons de tout cœur beaucoup de succès à ceux qui travaillent à ces nouveaux programmes. Nous souhaitons particulièrement que les nouveaux programmes reflètent davantage la connexion entre les Mathématiques et les autres sciences, et qu'ils tiennent soigneusement compte de la distinction entre les matières qui ont préséance du point de vue logique, et les matières qui devraient avoir la priorité dans l'enseignement. De cette façon seulement pourrions-nous espérer que les valeurs fondamentales des Mathématiques, leur signification, but et utilité véritables seront rendus accessibles à tous les élèves, y compris, évidemment, les futurs mathématiciens. On a récemment exprimé « des soucis largement répandus au sujet d'une tendance à exagérer l'abstraction dans l'enseignement des Mathématiques aux ingénieurs », cela montre la même voie (*).

Lars V. Ahlfors,
Harvard University.

Harold M. Bacon,
Stanford University.

Clifford Bell,
University of California
(at Los Angeles).

Richard E. Bellman,
Rand Corporation.

Lipman Bers,
New York University.

Garrett Birkhoff,
Harvard University.

R. P. Boas,
Northwestern University.

Alfred T. Brauer,
University of North Carolina.

Richard Brauer,
Harvard University.

Jack R. Britton,
University of Colorado.

(*) Premier groupe d'études d'été concernant les programmes de mécanique théorique et appliquée (First Summer Study Group in Theoretical and Applied Mechanics Curricula), Boulder (Colorado), juin 1961.

- R. Creighton Buck,
University of Wisconsin.
- George F. Carrier,
Harvard University.
- Hirsh Cohen,
International Business Machines Corp.
- Richard Courant,
New York University.
- H.S.M. Coxeter,
University of Toronto.
- Dan T. Dawson,
Stanford University.
- Avron Douglass,
University of Maryland.
- Arthur Erdélyi,
California Institute of Technology.
- Walter Freiburger,
Brown University.
- K.O. Friedrichs,
New York University.
- Paul R. Garabedian,
New York University.
- David Gilbarg,
Stanford University.
- Sydney Goldstein,
Harvard University.
- Herman Goldstine,
International Business Machines Corp.
- Herbert Greenberg,
International Business Machines Corp.
- John D. Hancock,
Alameda State College.
- Charles A. Hutchinson,
University of Colorado.
- Mark Kac,
Rockefeller Institute.
- Wilfred Kaplan,
University of Michigan.
- Aubrey J. Kempner,
University of Colorado.
- Lucien B. Kinney,
Stanford University.
- Morris Kline,
New York University.
- Ignace I. Kolodner,
University of New Mexico.
- Rudolph E. Langer,
University of Wisconsin.
- C.M. Larsen,
San Jose State College.
- Peter D. Lax,
New York University.
- Walter Leighton,
Western Reserve University.
- Norman Levinson,
Massachusetts Institute of Technology.
- Hans Lewy,
University of California, Berkeley.
- W. Robert Mann,
University of North Carolina.
- M. H. Martin,
University of Maryland.
- Deane Montgomery,
Institute for Advanced Study.
- Marston Morse,
Institute for Advanced Study.
- Zeev Nehari,
Carnegie Institute of Technology.
- Jerzy Neyman,
University of California, Berkeley.
- Frederick V. Pohle,
Adelphi College.
- H. O. Pollack,
Bell Telephone Labs., Inc.
- George Pólya,
Stanford University.
- Hillel Poritsky,
General Electric Company.
- William Prager,
Brown University.
- Murray H. Protter,
University of California, Berkeley.
- Tibor Rado,
Ohio State University.
- Warwick W. Sawyer,
Wesleyan University.
- Max M. Schiffer,
Stanford University.
- James B. Serrin,
University of Minnesota.
- Lehi T. Smith,
Arizona State University.
- I. S. Sokolnikoff,
University of California at L.A.
- Eli Sternberg,
Brown University.

J. J. Stoker,
New York University.

A. H. Taub,
University of Illinois.

Clifford E. Truesdell,
Johns Hopkins University.

Robert J. Walker,
Institute for Defense Analysis
and Cornell University.

Wolfgang Wasow,
University of Wisconsin.

André Weil,
Institute for Advanced Study.

Alexander Wittenberg,
Laval University.