

DOUBLES PRODUITS VECTORIELS

1. *Enoncé.* — Il y a six doubles produits vectoriels de trois vecteurs libres U, V, W ; ce sont :

(1) $X = U \wedge (V \wedge W) \quad Y = V \wedge (W \wedge U) \quad Z = W \wedge (U \wedge V)$,
et leurs opposés $U \wedge (W \wedge V) = -X \dots$ Nous démontrerons que, s'il existe un tétraèdre $OABC$ dont les quatre hauteurs OO', AA', BB', CC' ont un point commun H (tétraèdre orthocentrique), et dont les arêtes OA, OB, OC sont respectivement parallèles à U, V, W , les vecteurs X, Y, Z sont proportionnels aux côtés du triangle ABC :

(2) $X = T \cdot \vec{BC} \quad Y = T \cdot \vec{CA} \quad Z = T \cdot \vec{AB}$
 T étant un nombre dont nous préciserons la valeur.

Nous avons déjà signalé cette interprétation dans le *Bulletin mathématique des Facultés des Sciences et des Grandes Ecoles*, tome I, année 1934, pages 202 à 207. L'exposé était alors assez différent de ce qui suit.

2. *Origine de cette interprétation.* — Construisons les vecteurs liés :

$$\vec{OL} = U \quad \vec{OM} = V \quad \vec{ON} = W.$$

Supposons que les quatre points O, L, M, N ne soient pas dans un même plan ; alors le vecteur $V \wedge W$ est perpendiculaire au plan OMN ; le vecteur X est parallèle à ce plan et il est orthogonal à la droite OL . Supposons encore qu'un plan perpendiculaire à OL et ne passant pas par O coupe les droites OM et ON en des points B et C à distance finie ; la droite BC est alors parallèle à X . Supposons enfin que le plan qui passe par C , et qui est perpendiculaire à OM , coupe OL en un point A à distance finie et distinct de O ; la droite CA est alors parallèle à Y . Dans le tétraèdre $OABC$ ainsi construit, les arêtes opposées OA et BC sont orthogonales, ainsi que OB et CA ; il en est donc de même de OC et AB de sorte que AB est parallèle à Z . Il en résulte aussi que ce tétraèdre est orthocentrique et qu'il répond à la définition donnée au § 1.

Il est manifeste que nos trois hypothèses sont vérifiées si U, V, W ne sont pas coplanaires et si aucune des faces du trièdre $O(LMN)$ n'est un angle droit. H et O' sont alors distincts de O . Nous nous plaçons dans ce cas au § 3 et nous y démontrons les formules (2) qui entraînent immédiatement la formule classique :

$$(3) \quad X + Y + Z = O.$$

Nous y démontrons aussi les autres formules classiques :

$$(4) \quad X = (U \cdot W) \cdot V - (U \cdot V) \cdot W \quad \dots \quad \dots$$

Aux § 4 et § 5, nous examinons tous les autres cas possibles. Pour chacun d'eux, ou bien nous donnons les valeurs de X, Y, Z , ou bien nous indiquons comment on peut définir des points A, B, C sur les droites OL, OM, ON respectivement, et un nombre T tels que les formules (2) soient encore exactes. Dans tous ces cas particuliers, les démonstrations des formules (2), (3) et (4) seraient très simples, mais nous ne les donnerons pas.

3. Cas de U, V, W non coplanaires, aucune face du trièdre $O(LMN)$ n'étant un angle droit. — Occupons-nous d'abord des vecteurs :

$\vec{OA} = u \quad \vec{OB} = v \quad \vec{OC} = w$
(résultant des constructions du § 2) et de leurs doubles produits vectoriels :

$$(1)' \quad x = u \wedge (v \wedge w) \quad \dots \quad \dots$$

Nous allons montrer qu'ils vérifient :

$$(2)' \quad x = t \cdot \vec{BC} \quad y = t \cdot \vec{CA} \quad z = t \cdot \vec{AB}$$

et

$$(4)' \quad x = (u \cdot w) \cdot v - (u \cdot v) \cdot w \quad \dots \quad \dots$$

Dans le tétraèdre orthocentrique $OABC$, le plan des hauteurs $OO'H$, $AA'H$ est perpendiculaire à la droite BC et la coupe en un certain point G . Les trois droites BCG , $OA'G$, $AA'H$ sont deux à deux orthogonales. On peut donc définir un trièdre trirectangle, unitaire, direct (i, j, k) dont les arêtes sont parallèles à ces droites, ce qui donne :

$$(5) \quad u = \overline{OA'} \cdot j + \overline{A'A} \cdot k \quad v = \overline{OG} \cdot j + \overline{GB} \cdot i \quad w = \overline{OG} \cdot j + \overline{GC} \cdot i.$$

On en déduit :

$$v \wedge w = \overline{OG} (\overline{GC} - \overline{GB}) \cdot (j \wedge i) = -\overline{OG} \cdot \overline{BC} \cdot k,$$

$$x = -\overline{OA'} \cdot \overline{OG} \cdot \overline{BC} \cdot (j \wedge k) = -\overline{OA'} \cdot \overline{OG} \cdot \overline{BC}.$$

Le quadrilatère plan $HO'GA'$ étant inscriptible, on a $\overline{OA'} \cdot \overline{OG} = \overline{OH} \cdot \overline{OO'}$ même si $H O' G A'$ ne sont pas tous distincts. Donc, si on pose :

$$(6) \quad t = -\overline{OH} \cdot \overline{OO'},$$

on a la première des formules (2)' et les autres par analogie. t n'est pas nul puisque H et O' sont distincts de O .

De (5) on tire encore : $u \cdot v = u \cdot w = \overline{OA'} \cdot \overline{OG} = -t$, de sorte que le second membre de la première des formules (4)' est :

$$(w - v) t = t \cdot \vec{BC} = x.$$

Pour passer de là à (2) et (4), remarquons que U et u sont colinéaires et non nuls, ainsi que V et v , W et w . Donc, si on pose :

$$(7) \quad U = l \cdot u \quad V = m \cdot v \quad W = n \cdot w,$$

l, m, n sont trois nombres finis et non nuls. Si on porte ces valeurs (7) de U, V, W dans (1), on obtient $X = lmn \cdot x$. Il suffit donc de poser :

$$(8) \quad T = lmnx$$

pour avoir (2). T n'est pas nul.

Si on porte (7) dans le second membre de (4), celui-ci devient le second membre de (4)' multiplié par lmn , donc $lmn \cdot x = X$.

4. Cas de U, V, W coplanaires.

a) Si l'un au moins des vecteurs U, V, W est nul, X, Y, Z sont nuls.

b) Même résultat si U, V, W sont colinéaires.

c) Cas de deux vecteurs colinéaires, par exemple V et W , donc O, M, N en ligne droite. Soit E la projection de L sur cette droite. Si on remplace le vecteur U par $\vec{EL}$, les vecteurs X, Y, Z ne sont pas changés. On peut prendre : A en L ; B et C confondus en E ; $T = -\overline{OM} \cdot \overline{ON}$.

d) Cas où OL, OM, ON sont trois droites distinctes, situées dans un même plan, ne faisant entre elles aucun angle droit. A, B, C sont les sommets d'un triangle ayant O pour orthocentre ; — $2t$ est la puissance de O par rapport au cercle circonscrit à ce triangle.

e) Cas où OL, OM, ON sont trois droites distinctes, situées dans un même

plan, l'angle MON étant droit. On peut prendre : A en O ; B et C sur la perpendiculaire en L à OL ; $T = -mnOL^2$.

5. *Cas de U, V, W non coplanaires, l'une au moins des faces du trièdre $O(LMN)$ étant un angle droit.*

f) Si ce trièdre est trirectangle, X, Y, Z sont nuls. A, B, C sont arbitraires sur les droites OL, OM, ON ; H est en O ; $T = 0$.

g) Cas de deux angles droits, par exemple OL perpendiculaire au plan OMN . Si on remplace M par sa projection sur ON , X, Y, Z ne sont pas changés et on est ramené au cas c) avec E en O .

h) Cas d'un seul angle droit, MON par exemple. Si on remplace le point L par sa projection sur le plan MON , X, Y, Z ne sont pas changés. On est alors ramené au cas e).

Louis ANTOINE,
Professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Rennes.
