

LES POINTS ET LES LONGUEURS IMAGINAIRES A PROPOS D'UN PROBLEME D'INTERSECTION

Si on complète le plan réel euclidien en adjoignant à ses points réels les points imaginaires, deux points M et F, dont l'un au moins est imaginaire, étant donnés, seul le carré de la distance MF est déterminé ; quant à la distance MF, elle ne saurait être définie que comme l'une ou l'autre des racines carrées (opposées) de son prétendu carré.

Soulignons ici entre parenthèses le danger de conserver le terme distance, ou longueur, ou la notation MF quand il s'agit de points imaginaires. Paradoxalement, la mesure algébrique d'un vecteur imaginaire porté par un axe est bien définie, mais, le « sens » du vecteur faisant défaut, la longueur reste indéterminée.

Prenons maintenant l'équation bipolaire de l'ellipse réelle. Pour un point réel :

$$(1) \quad MF + MF' = 2a.$$

Soit M un point imaginaire de l'ellipse ; on peut choisir MF et MF' de manière à avoir encore l'équation bipolaire : $MF + MF' = 2a$. Le sens du mot équation est ici analogue à celui qu'il a dans équation polaire : 1° Si l'équation est vérifiée, le point est sur l'ellipse. 2° Si le point est sur l'ellipse, il existe un choix (un seul ici) des rayons bipolaires, pour lequel l'équation est vérifiée.

Abordons le problème d'intersection posé dans le n° 207 * :

I) Pour un point réel commun aux deux ellipses, on a :

$$\begin{cases} MF + MF_1 = 2a, \\ MF + MF_2 = 2a. \end{cases}$$

Pour un point imaginaire, sur (C_1) $(MF)_1 + MF_1 = 2a$,
sur (C_2) $(MF)_2 + MF_2 = 2a$,
égalités dans lesquelles $(MF)_1$ et $(MF)_2$ sont bien déterminés.

Nous aurons donc :

$$\begin{cases} \text{soit } (MF)_2 = (MF)_1 = MF, \\ \text{soit } (MF)_2 = -(MF)_1 = -MF. \end{cases}$$

a) Si $(MF)_2 = MF$, on est conduit au calcul et aux résultats du n° 207 : deux points réels et distincts sur la médiatrice de F_1F_2 .

b) Si $(MF)_2 = -MF$,

$$\begin{cases} MF + MF_1 = 2a \\ -MF + MF_2 = 2a \end{cases} \iff \begin{cases} MF_1 = 2a - MF \\ MF_2 = 2a + MF \end{cases} \Rightarrow MF_1^2 + MF_2^2 = 8a^2 + 2MF^2$$

Inversement :

$$\begin{cases} MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF^2 = 8a^2 \\ MF + MF_1 = 2a \end{cases} \Rightarrow \pm MF_2 - MF = 2a \quad (1).$$

Quel que soit le signe portant sur MF_2 , on peut toujours choisir $(MF)_2$ et $(MF)_1$ de manière que (1) s'écrive $(MF)_2 + (MF)_1 = 2a$.

Le lieu des points (réels ou imaginaires) tels que :

$$MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF^2 = 8a^2,$$

est une droite perpendiculaire à F_1F_2 (J milieu de F_1F_2).

Il y a deux points imaginaires communs aux deux ellipses sur cette droite.

(*) Intersection de deux ellipses ayant un foyer commun et même longueur de grand axe $2a$ (*Bull.* 207, p. 360).

II) Pour les points réels, l'égalité (1) $MF + MF' = 2a$ et l'égalité (2) obtenue par deux élévations au carré sont équivalentes :

$$(2) \quad MF^4 + MF'^4 - 2MF^2 \cdot MF'^2 - 8a^2(MF^2 + MF'^2) + 16a^4 = 0.$$

[(2) ne contient plus que des termes bien définis pour les points imaginaires].

Ecrivons (2) pour (C_1) , puis pour (C_2) , et retranchons membre à membre :

$$(MF_1^2 - MF_2^2)(MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF^2 - 8a^2) = 0.$$

Pour la médiatrice (1), $MF_1 = MF_2 \iff MF_1^2 = MF_2^2$ (2).

Dans la définition par foyer directrice (1), $MF = eMH \iff MF^2 = e^2MH^2$ (2).

Ce n'est qu'en apparence que, quand il s'agit de points imaginaires, on raisonne sur (1).

III) Soient $\vec{F_x}$ et $\vec{F_y}$ les axes focaux orientés par les vecteurs $\vec{FO_1}$ et $\vec{FO_2}$, x et y les abscisses d'un point quelconque M du plan par rapport aux axes classiques de (C_1) et (C_2) . Ces abscisses sont comptées à partir des centres O_1 et O_2 . Nous appellerons c et d les demi-distances focales respectives de (C_1) et (C_2) .

Si M est un point commun, nous avons :

$$(MF)_1 = a + \frac{cx}{a} \quad (MF)_2 = a + \frac{dy}{a}.$$

$$a) \quad (MF)_1 = (MF)_2 \iff cx = dy.$$

Nous avons au second membre de l'équivalence logique l'équation d'une droite que nous savons être la médiatrice de F_1F_2 .

Par ailleurs, cette équation est vérifiée :

$$1^\circ \text{ pour } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{intersection des axes non focaux,}$$

$$2^\circ \text{ pour } \begin{cases} x = \epsilon \frac{a^2}{c} \\ y = \epsilon \frac{a^2}{d} \end{cases} \quad (\epsilon = \pm 1) \quad \text{ce sont les points communs aux direc-}$$

trices relatives à F d'une part ($\epsilon = -1$), aux directrices relatives à F_1 et F_2 ($\epsilon = +1$) d'autre part.

$$b) \quad (MF)_2 = -(MF)_1 \Rightarrow cx + dy + 2a^2 = 0.$$

$$\text{La droite obtenue ainsi passe par le point } \begin{cases} y = -\frac{a^2}{c} \\ x = -\frac{a^2}{d} \end{cases}, \text{ point commun aux}$$

deux directrices relatives à F . On peut vérifier que le faisceau constitué par les deux directrices relatives à F et les deux sécantes communes réelles aux deux ellipses est harmonique en coupant par $x = 0$ (par exemple).

Nous retrouvons ainsi les résultats obtenus par notre collègue Bernard (n° 215) au moyen de la définition foyer-directrice.

S'il m'est permis d'ajouter un mot, je voudrais signaler que Laguerre a fait connaître une représentation réelle des points imaginaires du plan réel : il associe à un point imaginaire les deux points réels (un sur chacune) des deux droites isotropes issues de ce point. C'est ainsi que, une droite et un cercle non sécants étant donnés, définissant un faisceau à points limites I et J , les deux points imaginaires communs sont représentés respectivement par (I_+, J_-) et (J_+, I_-) et les foyers imaginaires de notre ellipse par (F_+, F_-) et (F'_+, F'_-) . J'ai pu moi-même, en modifiant un peu le calcul des équipollences de Bellavitis, puis en l'étendant aux points imaginaires, retrouver la représentation de Laguerre et aussi construire un calcul géométrique réel (une algèbre) adapté à cette représentation..., mais ceci est une autre histoire.

G. DELPLA.

Note. — Cette mise au point a été prononcée à la Régionale de Nancy et au cours de la discussion qui a suivi M. Cl. Pair a fait remarquer que ce problème repose sur une équivoque, ou plus précisément sur l'énoncé incomplet d'un théorème : « Deux coniques ont quatre points communs... dans le plan complexe... » et encore faudrait-il ajouter quelques précisions dans le cas du contact. Mais, dans le plan projectif complexe, l'ellipse n'est pas définie par $MF + MF' = 2a$, expression qui n'a aucun sens, ou plutôt, comme vient de nous le montrer M. Delpla, qui en a quatre..., en général : je fais ici encore une réserve, car où sont les points d'intersection lorsque les deux ellipses sont symétriques par rapport à leur foyer commun ?
