

SUR LA PROGRESSION ARITHMETIQUE

par E. EHRHART

professeur au Lycée Kléber à Strasbourg

1) Somme des puissances $p^{\text{èmes}}$ des termes d'une progression arithmétique.

Il est bien connu que, pour la plus simple de ces progressions, la suite naturelle des entiers jusqu'à n , ces sommes sont données par les polynômes de Bernoulli :

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2} \quad S_2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \quad S_3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2,$$

$$S_4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

$$S_5 = \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2+2n-1), \text{ etc...}$$

Désignons par $F_p(x, y)$ le $p^{\text{ème}}$ polynôme homogène de Bernoulli ; ainsi :

$$F_2(x, y) = \frac{1}{6} (x+y)(2x+y). \text{ Donc :}$$

$$F_p(x, 1) - F_p(x-1, 1) = x^p,$$

que x soit entier ou non. En posant $x = \frac{l}{r}$, il vient :

$$F_p\left(\frac{l}{r}, 1\right) - F_p\left(\frac{l}{r} - 1, 1\right) = \left(\frac{l}{r}\right)^p.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par r^{p+1} :

$$F_p(l, r) - F_p(l-r, r) = rl^p.$$

D'où :

$$F_p(l-r, r) - F_p(l-2r, r) = r(l-r)^p,$$

$$F_p(l-2r, r) - F_p(l-3r, r) = r(l-2r)^p,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$F_p(l-qr, r) - F_p[l-(q+1)r, r] = r(l-qr)^p = ra^p.$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, on obtient :

$$a^p + (a+r)^p + (a+2r)^p + \dots + l^p = \frac{1}{r} [F_p(l, r) - F_p(a-r, r)].$$

2) Somme des puissances $p^{\text{èmes}}$ des termes positifs d'une progression arithmétique décroissante.

Le dernier terme a de la progression $n, n-r, n-2r, \dots, a$, est le reste de la division de n par r . Dans le cas où n et r sont entiers et positifs, nous nous proposons d'exprimer la somme s_p des puissances $p^{\text{èmes}}$ des termes en fonction du seul paramètre n, r étant supposé donné.

Le reste a de n par r étant une fonction périodique de n , il en est de même pour $F_p(a-r, r)$, de sorte que $s_p = f(n) + \varphi(n)$, où $f(n)$ est un polynôme et $\varphi(n)$ une fonction de période r . Or, les formules de Bessel permettent de former un polynôme trigonométrique $\varphi(n)$, qui prend pour les valeurs $0, 1, 2, \dots, r-1$ de la variable des valeurs données $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi^{r-1}$. On trouve ainsi, par exemple :

$$s_1 = n + (n-3) + (n-6) + \dots + a = \frac{n(n+3)}{6} + \frac{2}{9} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{3} n\right).$$

Comme $0 \leq \frac{2}{9} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{3} n \right) < \frac{1}{2}$, on peut encore écrire, en désignant par $\|A\|$ l'entier le plus voisin du nombre A , non semi-entier :

$$s_1 = \left\| \frac{n(n+3)}{6} \right\|.$$

On trouve de même :

$$s_3 = n^3 + (n-3)^3 + (n-6)^3 + \dots + a^3 = \frac{n^2(n+3)^2}{12} - \frac{2}{9} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{3} n \right),$$

ou :

$$s_3 = \left\| \frac{n^2(n+3)^2}{12} \right\|.$$

3) Somme des valeurs entières des termes d'une progression arithmétique de raison rationnelle (*).

$[x]$ désignera la partie entière d'un nombre x , $\frac{p}{a}$ une fraction irréductible, p et n des entiers. A étant un nombre quelconque, posons $[aA] = \alpha$. Alors :

$$\left[A + \frac{pb}{a} \right] = \left[\frac{\alpha + pb}{a} \right].$$

On peut donc toujours se ramener au calcul, en fonction du paramètre n , de :

$$s_n = \left[\frac{n}{a} \right] + \left[\frac{n-b}{a} \right] + \left[\frac{n-2b}{a} \right] + \dots + \left[\frac{r}{a} \right],$$

où r est le reste de la division de l'entier n par b , car, supprimer des termes à la fin, revient à calculer une somme $s = s_n - s_n'$.

Considérons l'équation diophantienne :

$$(1) \quad x + ay = n \quad (x, y \text{ entiers } \geq 0).$$

y peut prendre les valeurs $0, 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{a} \right]$. (1) a donc $\left[\frac{n}{a} \right] + 1$ solutions. De même : $x + ay = n - b, x + ay = n - 2b, \dots, x + ay = r$ ont respectivement $\left[\frac{n-b}{a} \right] + 1, \left[\frac{n-2b}{a} \right] + 1, \dots, \left[\frac{a}{r} \right] + 1$ solutions.

Or, ces équations s'obtiennent en portant les $\left[\frac{n}{b} \right] + 1$ valeurs $z = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{b} \right]$ dans l'équation diophantienne :

$$(2) \quad x + ay + bz = n \quad (x, y, z \text{ entiers } \geq 0).$$

(*) Des sommes de valeurs entières se présentent souvent en arithmétique. Citons, par exemple, la *formule de Gauss*, qui donne le nombre N de points à coordonnées entières situés dans ou sur le cercle de rayon r , centré à l'origine :

$$N = 1 + 4 \left(\left[\frac{r^2}{1} \right] - \left[\frac{r^2}{3} \right] + \left[\frac{r^2}{5} \right] - \left[\frac{r^2}{7} \right] + \dots \right).$$

Par suite, en désignant par N_n le nombre de solutions de (2), on a :

$$N_n = s_n + \left[\frac{n}{b} \right] + 1,$$

ou :

$$s_n = N_n - \left[\frac{n}{b} \right] - 1.$$

Le calcul de N_n est classique. D'après une remarque due à Euler, cette fonction de n est le coefficient de t^n dans le développement en série entière de :

$$f(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^a)(1-t^b)} = (1+t+t^2+\dots)(1+t^a+t^{2a}+\dots)(1+t^b+t^{2b}+\dots),$$

développement qu'on obtient facilement, sinon vite, en décomposant la fraction rationnelle $f(t)$ en éléments simples.

Soit, par exemple, à calculer :

$$s_n = \left[\frac{1}{2} \right] + \left[\frac{4}{2} \right] + \left[\frac{7}{2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{2} \right],$$

dont la progression arithmétique de base a pour raison $\frac{3}{2}$.

Donc, $s_n = N_n - \left[\frac{n}{3} \right] - 1$, où N_n compte les solutions entières, non négatives, de :

$$x + 2y + 3z = n.$$

La fraction génératrice de N_n est :

$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} = \frac{1}{6(1-t)^3} + \frac{1}{4(1-t)^2} + \frac{17}{72(1-t)} + \frac{1}{8(1+t)} + \frac{1}{9(1-jt)} + \frac{1}{9(1-kt)},$$

où $1, j, k$ sont les racines cubiques de l'unité. D'où :

$$\begin{aligned} N_n &= \frac{1}{6} C_{n+2}^2 + \frac{1}{4} C_{n+2}^1 + \frac{17}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{1}{9} (j^n + k^n) \\ &= \frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + \frac{47}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{2}{9} \cos \frac{2\pi}{3} n. \end{aligned}$$

Comme d'autre part :

$$\begin{aligned} \left[\frac{n}{3} \right] &= \frac{n}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cos \frac{2\pi}{3} n + \frac{\sqrt{3}}{9} \sin \frac{2\pi}{3} n, \\ s_n &= \frac{n^2}{12} + \frac{n}{6} - \frac{1}{72} + \frac{(-1)^n}{8} - \frac{1}{9} \cos \frac{2\pi}{3} n - \frac{\sqrt{3}}{9} \sin \frac{2\pi}{3} n. \end{aligned}$$

En négligeant une partie, dont la valeur absolue est inférieure à $\frac{1}{2}$, quel que soit n :

$$s_n = \left\| \frac{n(n+2)}{12} \right\|.$$