

41^e année - N° 223 - Juin 1962

Mathématiques "modernes" et enseignement
du second degré

Une axiomatique de la géométrie

Le système international des unités de mesure

L'Assemblée générale de 1962

N° 223 - Bulletin de l'

Association des
Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public

**Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public.**

29, rue d'Ulm - Paris (5^e)

Présidents d'Honneur :

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN.

Bureau.

Président :

M. GILBERT, 33 bis, rue Champ-Lagarde, Versailles (S.-et-O.) (tél. 950-53-81) (*Affaires générales ; Enseignement Technique ; Conférences ; Bulletin*).

Vice-Présidents :

Mlle FÉLIX, 2, rue Octave-Feuillet, Paris, 16^e (TRO. 37-22) (*Enseignement du Second Degré*).

M. CHAZAL, 2, rue Thimonnier, Paris, 9^e (TRU. 61-11) (*Programmes*).

M. RAMIS, 35, rue Pierre-Nicole, Paris, 5^e (MED. 09-48) (*Classes préparatoires*).

M. SAMUEL, 3, avenue du Lycée-Lakanal, Bourg-la-Reine (Seine) (ROB. 35-34) (*Enseignement Supérieur*).

Secrétaire général :

M. VISSIO, 15, rue J.-Giraudoux, Sceaux (Seine) (FLO. 18-98) (*Administration de l'A.P.M. ; Préparation des réunions ; Bulletin*).

Secrétaires :

Mlle CLAVIER, 24, rue Linné, Paris, 5^e (POR. 00-03) (*Programmes*).

Mlle BIARD, 2, place De-Gaulle, Fontenay-aux-Roses (Seine) (ROB. 36-03) (*Formation des maîtres*).

M. CHASTENET DE GÉRY, 4, rue des Capucins, Meudon-Bellevue (S.-et-O.) (OBS. 48-48) (*Dictionnaire*).

M. GASNAULT (*Enseignement du Premier Degré et Enseignement court*).

M. ROSSAT-MIGNOD, 19, rue de l'Odéon, Paris, 6^e (DAN. 37-77) (*Régionales*).

M. WALUSINSKI, 26, parc de la Bérengère, Saint-Cloud (S.-et-O.) (VAL. 29-09) (*Rédaction du Bulletin ; Publicité*).

Trésorier :

Mlle LONJARET, 10, rue Pérignon, Paris, 7^e (FON. 35-20).

Trésorier-adjoint :

Mlle AÏTOFF, 16, rue de l'Arbalète, Paris, 5^e (*Expédition des Bulletins, des Brochures, etc...*).

Présidents des Commissions :

Programmes : M. CHAZAL ; *Formation des maîtres* : M. SAMUEL.

Dictionnaire : M. REVUZ ; *Premier degré* : Mlle VERVAECKE.

Rédaction : M. GILBERT (associés : Mlle FÉLIX, MM. CHAZAL, CHEVALLIER, CROZES, HUISMAN, ITARD, REVUZ, WALUSINSKI).

Rapporteurs spécialisés.

Concours des Grandes Ecoles : M. CHAZAL.

Histoire des Mathématiques : M. ITARD.

Astronomie (liaison avec la Société Astronomique de France) : M. WALUSINSKI.

I. ETUDES.

- A. HUISMAN : Les mathématiques « modernes » dans l'enseignement du second degré 279
- C. FRASNAY : Deux structures équivalentes pour la géométrie plane 291

II. ESSAIS ET PROBLEMES PEDAGOGIQUES.

- R. MULLER : Espace ponctuel associé à un module ; géométrie affine dans cet espace 313
- E. EHRHART : Sur la progression arithmétique 318
- G. DELPLA : Les points et les longueurs imaginaires, à propos d'un problème d'intersection 321
- L. ANTOINE : Doubles produits vectoriels 323
- A. WITTENBERG : A propos du programme de mathématiques de « high school » 325
- F. BRACHET : Le Système International des Unités de mesure 331

III. BIBLIOGRAPHIE.

- J. ITARD : Les livres arithmétiques d'Euclide (G. W.) 341
- L. SCHWARTZ : Méthodes mathématiques pour les sciences physiques (G. W.) 342
- Mathématiques du XX^e siècle 343
- Brèves rencontres : J. FAVARD ; BLANC-LAPIERRE ; CABANNES ... 343-344

IV. DOCUMENTS OFFICIELS.

- Concours d'entrée à l'E.N.S. de Fontenay-aux-Roses 347
- Enseignement de l'astronomie dans les classes de Mathématiques et de Mathématiques-Technique 356
- Inscription des élèves dans les classes préparatoires aux grandes écoles . 357

V. LA VIE DE L'ASSOCIATION.

- L'Assemblée générale du 13 avril 1962 361
- Les journées angevines 365
- Réunion du Comité (13 mai 1962) 367
- Coups d'œil sur un scrutin 370
- Chronique des Régionales 373
- Le Courrier de la Rédaction 374
- Chronique des Réformes à venir 378

Le coin du Trésorier

COTISATION. — Elle comprend l'abonnement au Bulletin, ainsi que les fascicules d'énoncés.

Cotisation normale	10 NF
Cotisation réduite (stagiaires C.P.R., élèves des E.N.S. et des I.P.E.S., jeunes gens accomplissant leur service militaire, retraités)	5 NF

ABONNEMENT (personnes n'appartenant pas à l'Enseignement Public, bibliothèques, etc...) :

France et Communauté : 12 NF - Autres pays : 15 NF

Le numéro : 3 NF

MODE DE PAIEMENT : Virement postal (adressé au centre de chèques du tireur) ou mandat-carte à l'adresse :

A.P.M. — 29, rue d'Ulm, Paris, 5^e — C.C.P. Paris 5708-21

RECOMMANDATIONS DU TRESORIER — Indications à porter sur le talon du chèque : 1^o Nom (en majuscules) et prénom. — 2^o Adresse où doit être envoyé le Bulletin. — 3^o Ancienne adresse en cas de changement. — 4^o Nom de l'établissement où l'on exerce. — 5^o Nom de l'établissement précédent en cas de mutation en fin d'année scolaire.

N.-B. — Toute nouvelle adhésion demandée en cours d'année scolaire compte à partir du 1^{er} octobre précédent. Elle donne droit à tous les bulletins déjà parus au cours de l'année scolaire, sous réserve qu'ils ne soient pas épuisés.

Comité.

Sortants en 1963 : MM. DEVIOSSE (Lycée de Lillebonne) ; CHAZAL (Charlemagne) ; Mme DUBOIS-VIOLETTE (Fénelon) ; MM. GIRARD (Janson-de-Sailly) ; LEGRAND (Compiègne) ; Mlle MINOIS (Le Havre) ; MM. POITOU (Fac. Sc., Lille) ; WALUSINSKI (Saint-Cloud).

Sortants en 1964 : MM. BARBUT (Ecole des Hautes Etudes, Paris) ; BRIANÇON (Aix-en-Provence) ; GÉNESTINE (Lycée Technique, Clichy) ; CHOQUET (Fac. des Sciences, Paris) ; Mlle FÉLIX (La Fontaine) ; MM. FOUCHÉ (Janson-de-Sailly) ; GILBERT (Lycée Technique, Versailles) ; Mlle LONJARET (Carnot) ; M. RUFF (Saint-Louis).

Sortants en 1965 : Mlle AÏTOFF (Montgeron) ; MM. CHEVALLIER (Marcelin-Berthelot) ; CLUZEL (E.N.N.A., Paris) ; Mlle DEROO (Racine) ; MM. DUMONT (Montaigne, Paris) ; FRENKEL (Fac. des Sc., Strasbourg) ; QUEYSANNE (Janson-de-Sailly) ; SIGNORET (Montaigne, Bordeaux).

Sortants en 1966 : Mme AUDIN (E.N. Auteuil, Paris) ; Mlle BIARD (E.N.S., Fontenay) ; MM. CROZES (Henri-IV) ; LE MÉNAGER (Angers) ; MUGNIER (Enseignement technique, C.N.E.C.) ; RAMIS (Louis-le-Grand) ; SAMUEL (Fac. des Sc., Paris) ; SIROS (Charlemagne) ; Mlle VERVAECKE (Fénelon, Lille) ; M. VISSIO (Lakanal, Sceaux).

Membres de droit

M. GIRAULT (Janson-de-Sailly) ; M. LECOEVRE (Aix) ; Mlle MASSON (Marie-Curie) ; Mme NICOD (Collège Marie-Vidalenc, Lyon) ; M. POUX (Saint-Cloud) ; Mlle ROULET (Victor-Hugo) ; M. SÉNÉCAT (Henri-IV) ; M. WALUSINSKI (Saint-Cloud).

LES MATHÉMATIQUES « MODERNES » DANS L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRÉ

L'initiation aux Mathématiques dites modernes, qui se fait depuis quelque temps à partir de la Seconde, serait peut-être plus efficace et mieux acceptée si elle était entreprise plus tôt. C'est du moins ce que pensent quelques collègues, à la demande desquels ont été faits à l'Institut Pédagogique National les exposés dont le texte suit.

I. — LES ENSEMBLES

Nous admettons la notion intuitive d'ensemble, collection d'objets distincts quelconques, par exemple : les lettres de l'alphabet, les chiffres de la numération décimale, les élèves d'une classe de Cinquième.

Nous disposons d'une règle qui permet, pour tout objet donné, de décider s'il appartient ou non à l'ensemble considéré. Si un objet est désigné par x et un ensemble par A , nous exprimons que x est élément de A par l'écriture : $x \in A$ et que x n'est pas élément de A par : $x \notin A$.

Pour tout objet x , en ce qui concerne A , il n'y a que deux éventualités possibles : $x \in A$ ou $x \notin A$ (principe du tiers exclu).

L'égalité $x = y$ entre objets signifie que x et y désignent le même objet. Bien entendu, dans la pratique, une telle égalité ne consiste pas en une évidence telle que $2 = 2$. Ce sera par exemple plutôt : $2 = 6/3$; x et y appartiennent alors à une même « classe d'équivalence », notion qui sera précisée plus loin.

Autre exemple : dans le plan, tous les triangles qui se déduisent d'un triangle donné ABC par une isométrie constituent une classe d'équivalence, dont ABC peut être considéré comme un représentant.

De même, l'égalité $A = B$ entre ensembles signifie que A et B sont formés exactement des mêmes éléments. En général, cette égalité résulte d'une démonstration. Si A est défini comme formé des objets qui possèdent une propriété a , et B comme formé des objets qui possèdent une propriété b , les ensembles A et B sont égaux si les propriétés a et b sont équivalentes, c'est-à-dire si chacune d'elles entraîne l'autre.

Exemple : A est l'ensemble des triangles ayant deux côtés égaux, B est l'ensemble des triangles ayant deux angles égaux.

Ou encore : A est l'ensemble des entiers divisibles par 9, B est l'ensemble des entiers dont la somme des chiffres (en écriture décimale) est divisible par 9.

Signalons ici une erreur fréquente chez les élèves : croire que deux ensembles sont égaux lorsqu'ils contiennent le même nombre d'éléments.

Parties d'un ensemble, inclusion.

Soit un ensemble E ; tout ensemble A formé avec des éléments de E est une partie (ou sous-ensemble) de E . On dit aussi que A est inclus dans E .

S'il existe des éléments de E qui ne figurent pas dans A , on dit que A est strictement inclus dans E , ce qu'on note : $A \subset E$.

On a une inclusion large, notée $A \subseteq E$, s'il n'est pas exclu que A soit égal à E ; on dit alors que E est la partie pleine de E .

Un autre cas particulier est celui où A ne contient aucun élément. On a alors la partie vide notée $\emptyset$. C'est l'état « néant » des statistiques administratives.

Ici encore, remarquons l'importance d'une définition précise des éléments d'un ensemble ; une erreur fréquente chez les élèves est de dire que, dans un ensemble dont les éléments sont des arbres, les branches d'un arbre constituent un sous-ensemble.

Soit $A \subseteq E$; supposons E défini par une propriété e et A par une propriété a . L'appartenance à A entraîne l'appartenance à E , ce qu'on exprime par : $x \in A \Rightarrow x \in E$.

De même, pour les objets considérés, la possession de la propriété a entraîne celle de la propriété e , ce qu'on exprime par : $a \Rightarrow e$ (implication).

Si A et E sont égaux, chacun d'eux est inclus dans l'autre, ce qu'on traduit par l'« équivalence » : $A = E \Leftrightarrow "A \subseteq E \text{ et } E \subseteq A"$ ou encore par : $x \in A \Leftrightarrow x \in E$.

De même, les propriétés de définition a et e sont alors équivalentes : $a \Leftrightarrow e$; chacune d'elles entraîne l'autre.

Remarque : L'inclusion (stricte ou large) possède la propriété de transitivité : " $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$ " $\Rightarrow$ $A \subseteq C$.

L'inclusion large est réflexive : $A \subseteq A$; l'inclusion stricte ne l'est pas.

L'égalité, entre éléments ou entre ensembles, possède les trois propriétés de :

réflexivité : $x = x$; $A = A$;

symétrie : $x = y \Rightarrow y = x$; $A = B \Rightarrow B = A$;

transitivité : " $x = y$ et $y = z$ " $\Rightarrow$ $x = z$; " $A = B$ et $B = C$ " $\Rightarrow$ $A = C$.

Parties complémentaires.

Soit $A \subseteq E$; la partie de E qui est formée des éléments qui n'appartiennent pas à A est le « complément » de A par rapport à E . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble de base E , nous désignons ce complément par A' . Il y a réciprocity entre deux parties complémentaires :

$$(A')' = A.$$

Par exemple, la partie vide et la partie pleine sont complémentaires.

Au point de vue logique, le passage au complément correspond à la négation : dire que $x \in A'$ équivaut à dire que $x \notin A$, que x ne possède pas la propriété qui, dans E , définit A .

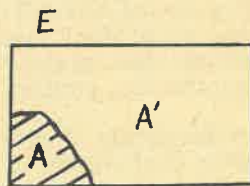


FIG. 1

Exemples : Si E est l'ensemble des entiers naturels, et A la partie de E définie par : $x < 5$, nous aurons : A' défini par $x \geq 5$.

Dans le même ensemble, le complément de : $5 < x$ et $x \leq 13$ est : $x \leq 5$ ou $x > 13$.

Sur une droite xy , le complément d'un segment ouvert $]AB[$ est formé par les deux demi-droites Ax et By .

Théorème : $A \subset B \iff B' \subset A'$

(A et B sont des parties d'un ensemble E , et leurs compléments sont pris par rapport à E).

1) Supposons $A \subset B$; si $x \in B'$, on ne peut avoir $x \in A$ puisque :

$$x \in A \Rightarrow x \in B,$$

donc : $x \in B' \Rightarrow x \in A'$, ce qui signifie : $B' \subset A'$. En résumé :

$$A \subset B \Rightarrow B' \subset A'.$$

2) Supposons $B' \subset A'$; nous pouvons refaire le même raisonnement ou, plus simplement, appliquer le résultat précédent :

il nous permet d'écrire : $B' \subset A' \Rightarrow (A')' \subset (B')'$,

c'est-à-dire : $B' \subset A' \Rightarrow A \subset B$, ce qui démontre le théorème (dans une première étude, on peut se borner à une vérification à partir de la représentation graphique classique).

Au point de vue logique, nous pouvons de même écrire, entre les propriétés a et b définissant des parties de l'ensemble de base :

$$(a \Rightarrow b) \iff (b' \Rightarrow a') ; (a = b) \iff (a' = b'),$$

en désignant par a' la négation de a .

Exemple : « Tous les électeurs sont majeurs » ou « être électeur » implique « être majeur » équivaut à : « n'être pas majeur » implique « n'être pas électeur ».

Pour démontrer que, dans l'ensemble des triangles, la propriété « deux côtés sont égaux » entraîne la propriété « les angles opposés sont égaux », on peut démontrer que « deux angles inégaux » entraîne « les côtés opposés sont inégaux ».

En utilisant le théorème précédent, on peut imaginer diverses manières de démontrer l'équivalence $a \iff b$ de deux propriétés ; par exemple en démontrant :

$$« b' \Rightarrow a' » \text{ et } « b \Rightarrow a ».$$

Dénombrement des parties d'un ensemble fini.

Soit E un ensemble formé de n éléments ; proposons-nous de déterminer combien on peut former de parties avec des éléments de E . Envisageons quelques cas particuliers :

1) E est l'ensemble vide ; il n'y a qu'une partie, E lui-même.

2) $E = \{a\}$; il y a deux parties : $\emptyset$ et $\{a\}$.

3) $E = \{a, b\}$; il y a quatre parties : $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$.

4) $E = \{a, b, c\}$; pour obtenir les parties de E , nous pouvons écrire d'abord toutes celles qui ne contiennent pas c ; ce sont les quatre parties du cas précédent. En introduisant c dans chacune d'elles, on obtient les parties de E qui contiennent c . Finalement, le nombre des parties de $\{a, b, c\}$ est double du nombre de parties de $\{a, b\}$, soit 8.

D'une manière générale, le nombre de parties d'un ensemble de n éléments est 2^n (en y comprenant la partie vide et la partie pleine).

Nous pouvons faire un dénombrement plus précis en cherchant combien il y a de parties à $n-1, n-2, \dots$ éléments. Par exemple, pour un ensemble de six éléments, combien y a-t-il de parties à trois éléments ?

Supposons qu'on ait fait un dénombrement complet pour l'ensem-

ble $\{a, b, c, d, e\}$; pour l'ensemble $\{a, b, c, d, e, f\}$, les parties à trois éléments comprennent :

- a) les parties à trois éléments de $\{a, b, c, d, e\}$;
- b) les parties qui contiennent f , qu'on peut obtenir en introduisant f dans les parties à deux éléments de $\{a, b, c, d, e\}$.

Finalement, en désignant par C_n^k le nombre des parties à k éléments obtenues à partir d'un ensemble de n éléments, nous aurons :

$$C_6^3 = C_5^3 + C_5^2$$

et en général :

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

Bien entendu, dans une partie telle que $\{a, c, d\}$, l'ordre dans lequel on écrit les lettres n'intervient pas ; $\{a, c, d\}$ et $\{d, a, c\}$ sont une même partie.

La formule précédente (des combinaisons) permet de construire le triangle de Pascal. La cinquième ligne, par exemple, signifie que, pour un ensemble de quatre éléments, il y a : une partie vide ; quatre parties à un seul élément ; six parties à deux éléments...

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
.....					

FIG. 2

On vérifie que la somme des nombres écrits sur la ligne de rang n est bien égale à 2^{n-1} .

Remarque : Parmi les 2^n parties d'un ensemble de n éléments, on distingue celles qui contiennent 0, 1, ..., n éléments ; ce qui précède montre que l'on a :

$$2^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$$

Pour trouver le nombre des parties d'un ensemble de n éléments, on peut encore raisonner de la manière suivante :

Pour chaque élément, deux éventualités se présentent : ou il est utilisé, ou il ne l'est pas, et les choix relatifs aux divers éléments sont indépendants les uns des autres. Pour trois éléments, on peut faire une figure telle que la figure 3. On retrouve les 2^n parties.

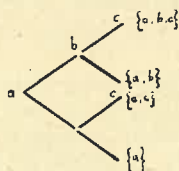
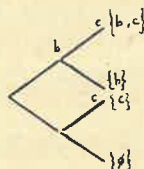


FIG. 3



Pratiquement, l'emploi du triangle de Pascal est peu commode ; on sera donc amené à calculer les nombres de la $n^{\text{ième}}$ ligne, sans avoir calculé les nombres des lignes précédentes. On peut amorcer ce calcul à l'aide d'exemples tels que les suivants :

Etant donnés n points du plan (tels qu'aucune droite n'en contienne plus de deux), combien peut-on obtenir de segments distincts en joignant ces points deux par deux ?

En utilisant le résultat précédent, trouver le nombre des triangles dont les sommets sont trois des n points donnés.

Opérations sur les parties d'un ensemble E.

A) *Intersection* : Etant données deux parties A et B de E, l'intersection $A \cap B$ est l'ensemble formé par les éléments qui figurent à la fois dans A et B.

Si $A = B$: $A \cap A = A$.

Si $A \subset B$: $A \cap B = A$, et réciproquement,
(en effet, $A \cap B = A$ montre que $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$,
donc $x \in A \Rightarrow x \in B$).

Si A et B n'ont aucun élément commun, on dit qu'ils sont disjoints. Cela revient à dire que leur intersection est l'ensemble vide. Tel est le cas, par exemple, pour une partie A et son complément.

Si B est l'ensemble vide : $A \cap \emptyset = \emptyset$, quel que soit le sous-ensemble A de E.

Quelle que soit la partie A de E, on a : $A \cap E = A$, propriété qu'on exprime en disant que E est l'élément neutre de l'opération $\cap$ appliquée aux parties de E.

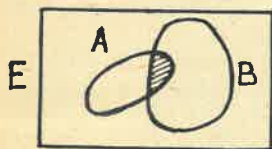
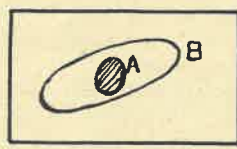
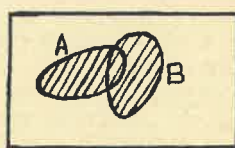


FIG. 4



$$A \cap B = A$$

FIG. 5



$$A \cup B$$

FIG. 6

Réciproquement, s'il existe une partie X de E telle que, pour toute partie A, on ait : $A \cap X = A$, alors $X = E$. Car cette relation doit avoir lieu en particulier pour $A = E$: $E \cap X = E$, et, comme d'autre part : $E \cap X = X$, nous en déduisons (transitivité de l'égalité) : $X = E$.

L'opération est commutative : $A \cap B = B \cap A$.

De plus, ayant défini l'opération $(A \cap B) \cap C$, on vérifie qu'elle est associative :

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

ce qui permet d'écrire plus simplement $A \cap B \cap C$, expression dans laquelle on peut permuter les lettres, en raison de la commutativité de l'opération.

Exemple : Le demi-plan est un ensemble de points qui, par définition, est convexe. L'intersection de deux demi-plans à frontières sécantes est un angle convexe. On définit de même un polygone convexe.

La droite est, elle aussi, un ensemble convexe de points.

Puisque l'intersection de deux ensembles convexes est un ensemble convexe, l'intersection d'une droite et d'un polygone convexe, si elle n'est

pas vide, est un ensemble convexe de points. On démontre d'ailleurs aisément que cette intersection est un segment (si, dans le plan d'un polygone convexe P , on mène une droite qui ne contient aucun sommet de P , cette droite a, avec le périmètre de P , zéro ou deux points communs).

Au point de vue logique, l'opération $\cap$ correspond à la « conjonction » de deux propriétés. Par exemple, si A est l'ensemble des entiers multiples de 2, B l'ensemble des entiers multiples de 3, $A \cap B$ est l'ensemble des entiers multiples de 6.

Ou : A ensemble des triangles rectangles, B ensemble des triangles isocèles ; $A \cap B$ est l'ensemble des triangles qui sont à la fois rectangles et isocèles.

B) *Réunion* : Soient A et B deux parties de E ; l'ensemble « réunion », noté $A \cup B$, est celui qui est formé des éléments qui appartiennent à l'un au moins des ensembles A et B . Si un élément figure à la fois dans A et B , il figure dans $A \cup B$, mais une seule fois.

Si $A = B$: $A \cup A = A$.

Si $A \subset B$: $A \cup B = B$, et réciproquement.

On a : $A \cup \emptyset = A$, quelle que soit la partie A de E . On exprime cette propriété en disant que $\emptyset$ est l'élément neutre de l'opération $\cup$. Réciproquement, s'il existe une partie déterminée X de E telle que : $A \cup X = A$, quel que soit $A \subset E$, alors $X = \emptyset$. En effet, on aura en particulier : $\emptyset \cup X = \emptyset$ et, comme d'autre part : $\emptyset \cup X = X$, il en résulte que $X = \emptyset$.

L'opération $\cup$ est commutative :

$$A \cup B = B \cup A.$$

On vérifie qu'elle est associative :

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ ou plus simplement } A \cup B \cup C.$$

Exemple : La réunion de deux ensembles convexes de points n'est pas nécessairement convexe ; c'est ainsi que la réunion de deux demi-plans à frontières sécantes est un angle concave.

Au point de vue logique, l'opération $\cup$ correspond à la disjonction qui s'exprime par « ou », étant entendu que les éventualités réunies par ce mot ne s'excluent pas l'une l'autre. Par exemple, dire que le produit ab est nul équivaut à la disjonction « $a = 0$ ou $b = 0$ ».

Remarque : Si A et B sont disjoints, le nombre d'éléments de $A \cup B$ est la somme des nombres d'éléments de A et B . Sinon, en désignant par $n(A)$ le nombre d'éléments de A , on a :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Exercice : Sur 100 élèves d'un collège, 73 apprennent l'anglais, 46 apprennent l'allemand, 32 apprennent les deux langues. Déterminer : combien d'élèves n'apprennent aucune des deux langues ; combien n'en apprennent qu'une seule.

Relation avec l'opération « complément ».

Soient, dans E , deux parties A et B ; le complément, par rapport à E , de leur intersection $A \cap B$, est la partie formée des éléments qui appartiennent soit à A' , soit à B' . Donc :

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

On voit de même que :

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$

formule qui est d'ailleurs une conséquence de la première ; appliquons en effet la première à A' et B' :

$$(A' \cap B')' = (A')' \cup (B')' = A \cup B.$$

De même, en logique, la négation de la conjonction « a et b » est la disjonction « a' ou b' » ; la négation de la disjonction « a ou b » est la conjonction « a' et b' ».

Produit cartésien de deux ensembles.

Soient : $E = \{a, b, c\}$, $F = \{\alpha, \beta\}$. Le produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble des couples (m, μ) où $m \in E$ et $\mu \in F$. Ici, c'est l'ensemble formé par les six couples :

$$(a, \alpha), (a, \beta), (b, \alpha), (b, \beta), (c, \alpha), (c, \beta).$$

On peut représenter $E \times F$ graphiquement à l'aide d'un repère cartésien, en portant a, b, c sur Ox , α, β sur Oy . En particulier, les points à coordonnées entières situés dans le premier quadrant représentent le produit $N \times N$ de l'ensemble des entiers naturels par lui-même.

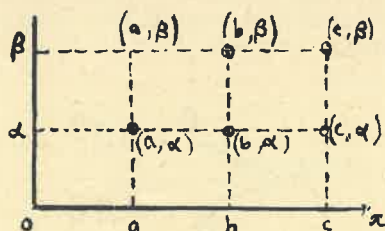


FIG. 7

De même, l'ensemble des fractions b/a peut être considéré comme obtenu à partir du produit cartésien de $\{1, 2, \dots\}$ par $\{0, 1, 2, \dots\}$. La fraction b/a est alors le couple (a, b) , b appartenant au deuxième ensemble et a au premier ($a \neq 0$). Les fractions sont ainsi représentées par les points à coordonnées entières du premier quadrant, à l'exception de ceux qui sont sur Oy .

Autres exemples : à partir du produit cartésien de $\{1, 2, \dots, 10, \text{roi, dame, valet}\}$ et de $\{\text{trèfle, carreau, cœur, pique}\}$, on fabrique les cartes d'un jeu de 52.

Les tables d'addition et de multiplication dans un système de numération sont obtenues à partir d'un produit cartésien.

Partition d'un ensemble.

Soit un ensemble E , et dans E deux parties complémentaires non vides A et A' . Elles possèdent les propriétés suivantes : 1) elles ne sont pas vides ; 2) elles sont disjointes ; 3) leur réunion est l'ensemble de base E .

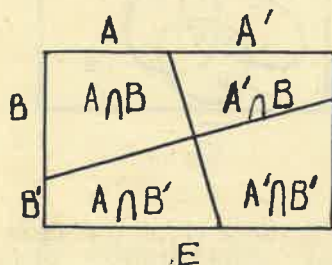


FIG. 8

D'une manière générale, soient $A, B, \dots, L$ des parties de E ; nous dirons qu'elles réalisent une partition de E si : 1) elles ne sont pas vides ; 2) elles sont deux à deux disjointes ; 3) leur réunion est E .

Exemple : A l'aide de deux parties non disjointes de E , soit A et B , on peut réaliser une partition de E en quatre classes :

$$A \cap B, A \cap B', A' \cap B, A' \cap B'.$$

On vérifie que tout élément de E appartient à une, et une seule, des classes, lesquelles sont deux à deux disjointes. Enfin, aucune n'est vide si aucune des parties A et B n'est incluse dans l'autre. En effet, si, par exemple : $A' \cap B = \emptyset$, cela entraînerait :

$$x \in A' \Rightarrow x \in B' \text{ ou } A' \subset B' \text{ ou } B \subset A.$$

A l'aide de trois parties A, B, C , on obtiendrait une partition de E en 16 classes. D'une manière générale, un raisonnement par « dichotomie » (déjà employé précédemment), et résumé par la figure 9, montre qu'avec n parties, on peut réaliser une partition en 2^n classes.

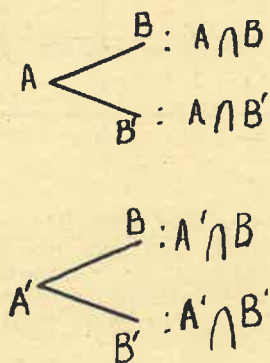


FIG. 9

Remarquons à ce propos que la représentation graphique classique doit se faire avec des courbes de forme quelconque, et non pas avec des cercles. Il est possible de tracer trois cercles de manière à partager le plan en huit régions, mais on démontre qu'il n'est pas possible de tracer un quatrième cercle de manière qu'il partage en deux chacune des régions précédentes.

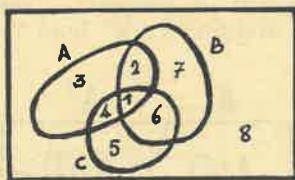


FIG. 10

La plupart des classifications visent à réaliser une partition de l'ensemble étudié : divisions administratives (département, arrondissement...), catalogue de bibliothèque, classes d'un lycée, etc...

Autre exemple : Si l'on jette deux dés (cubiques), l'ensemble des 36 coups possibles est obtenu comme produit cartésien de l'ensemble $(1, 2, \dots, 6)$ par lui-même. On peut obtenir une partition de cet ensemble en rangeant dans une même classe les coups donnant une même somme de points. On trouve ainsi, pour les sommes $2, 3, \dots, 12$, les nombres de coups suivants :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1,

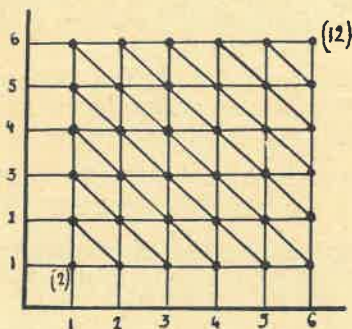


FIG. 11

ce qui montre que les six totaux pairs se présentent dans 18 cas, de même que les cinq totaux impairs.

Exercices

1) Sur 100 élèves d'un collège : 28 apprennent l'espagnol, 30 l'allemand, 42 l'anglais, 8 l'allemand et l'espagnol, 10 l'espagnol et l'anglais, 5 l'allemand et l'anglais, 3 les trois langues. Combien n'apprennent aucune des trois langues ? Combien n'en apprennent qu'une seule ?

2) Sur 100 élèves : 15 apprennent l'allemand seul, 21 l'allemand mais pas l'espagnol, 9 l'allemand et l'anglais, 30 l'allemand, 49 l'anglais, 25 l'espagnol et l'anglais, 55 l'espagnol. Combien n'apprennent aucune des trois langues ?

3) Soient : E l'ensemble des triangles, A l'ensemble des triangles isocèles, B l'ensemble des triangles rectangles. Définir en langage ordinaire les ensembles : $A \cup B$, $A \cap B$, et les compléments (par rapport à E) de : A, B, $A \cup B$, $A \cap B$.

4) Soit E l'ensemble des voitures immatriculées en France et, dans E, A l'ensemble des Dauphines, B l'ensemble des voitures immatriculées 59. Définir en langage ordinaire les ensembles suivants :

$\bar{A}$, $\bar{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup \bar{B}$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cup B$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{A} \cup \bar{B}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$.

5) Soient E un ensemble de billes, A la partie de E formée de billes en acier, B la partie formée de billes noires. Définir en langage ordinaire les mêmes ensembles qu'à l'exercice 4.

6) Soit E l'ensemble des entiers naturels x définis par : $1 \leq x \leq 20$, et les parties de E :

$A = \{1, 2, 5, 7, 9, 11, 12\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 13\}$.

Ecrire les parties de E représentées par les expressions de l'exercice 4.

7) Pour l'étude d'un ensemble d'êtres vivants, on distingue les qualités « être fumeur » et « être affligé d'un cancer ». Indiquer la partition en quatre classes que permet l'emploi de ces qualités.

8) Si A et B sont des parties d'un ensemble E et A' et B' leurs compléments par rapport à E , représenter par une figure les parties définies par les expressions suivantes (où x représente un élément de E) : $x \in A$ et $x \in B$; $x \in A$ ou $x \in B$; $x \in A$ et $x \notin B$; $x \in A'$ et $x \in B$; $x \notin A$ ou $x \in B'$. Donner les expressions de ces parties, à l'aide de A , A' , B , B' et des opérations $\cap$ ou $\cup$.

9) Pour quelle partie A de E peut-on avoir : $A \cup \emptyset = \emptyset$?
 A étant une partie de E , pour quelles parties X de E peut-on avoir ?
 $A \cap \emptyset = \emptyset$?

10) A partir de trois parties A , B , C de E , on peut réaliser une partition de E . Donner les expressions des 16 classes de cette partition, en fonction de A , B , C , de leurs compléments, et de l'opération $\cap$.

11) Vérifier sur une figure, et démontrer les relations suivantes :
 $A \cap B \subset A$; $A \cap B \subset B$; $A \subset A \cup B$; $B \subset A \cup B$.

12) A l'aide de figures, vérifier la distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, et la distributivité de l'opération $\cup$ par rapport à $\cap$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

13) Etant donnés deux ensembles A et B , quels sont les ensembles X tels que : $A \cap X = B$? Faire une figure, en remarquant que B doit être inclus dans A .

14) Etant donnés deux ensembles A et B , quels sont les ensembles X tels que : $A \cup X = B$? Montrer qu'il n'existe qu'une seule solution X lorsqu'on impose la condition supplémentaire : $A \cap X = \emptyset$.

15) Simplifier les expressions :

$$A \cap B \cap A \cap C ; A \cup B \cup A \cup C.$$

16) Démontrer la relation :

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C).$$

17) Dans une enquête qui a porté sur 1 000 personnes, 816 ont déclaré aimer le chocolat, 723 la crème glacée, 645 le nougat, 562 le chocolat et la crème glacée, 463 le chocolat et le nougat, 470 la crème glacée et le nougat. On ignore s'il y a des personnes qui n'ont pas avoué leur goût pour l'une des denrées. Combien y a-t-il au plus de personnes qui ont déclaré aimer à la fois le chocolat, la crème glacée et le nougat ?

18) Démontrer l'équivalence : $A \subset B \iff A' \cup B = E$,
(A et B sont des parties de E , A' le complément de A par rapport à E).

19) Démontrer : $A \subset B \implies A \cap C \subset B \cap C$
vérification graphique et démonstration formelle.

20) Démontrer : $A \subset B \implies A \cup C \subset B \cup C$
vérification graphique et démonstration formelle.

21) Démontrer l'équivalence : $\langle A \subset B \text{ et } A \subset C \rangle \iff A \subset B \cap C$.

22) Démontrer l'équivalence : $\langle A \subset C \text{ et } B \subset C \rangle \iff A \cup B \subset C$.

23) Démontrer l'équivalence : $A \subset B \iff A \cap B' = \emptyset$.

24) Démontrer : $A \subset B \text{ et } A' \subset B \implies B = E$
(A et B parties de E , A' complément par rapport à E).

25) Dans les figures ci-contre, le rectangle représente l'ensemble de base. Définir les parties hachurées à l'aide des opérations $\cup$, $\cap$ et complément par rapport à E .

26) Dans des figures analogues à la figure 18, mettre des hachures sur la région représentant : $(A \cup B) \cap C'$; $(A \cap B) \cup C'$; $(A \cap B) \cap C'$.

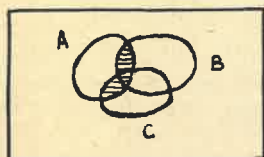


FIG. 12



FIG. 13

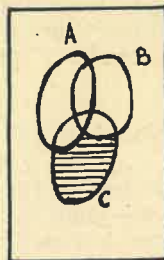


FIG. 14

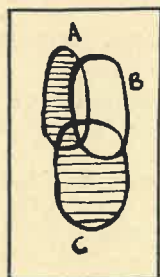


FIG. 15

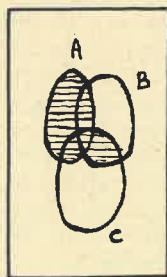


FIG. 16

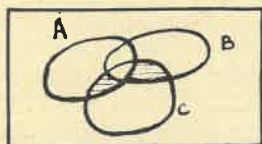


FIG. 17



FIG. 18

27) Dans une banque, trois employés se nomment Dupont, Dubois et Durand. L'un est caissier, un autre comptable, un autre secrétaire. Trouver la fonction de chacun, sachant que :

- 1) si Dupont est caissier, Dubois est comptable ;
- 2) si Dupont est comptable, Dubois est secrétaire ;
- 3) si Dubois n'est pas caissier, Durand est comptable ;
- 4) si Durand est secrétaire, Dupont est comptable.

28) Trois jeunes filles, Juliette, Héroïse et Laure, sont interrogées sur leurs âges et elles répondent chacune par trois phrases :

Juliette dit : J'ai 22 ans ; j'ai 2 ans de moins qu'Héroïse ; j'ai un an de plus que Laure.

Héroïse dit : Je ne suis pas la plus jeune ; Laure et moi avons 3 ans d'écart ; Laure a 25 ans.

Laure dit : Je suis plus jeune que Juliette ; Juliette a 23 ans ; Héroïse a 3 ans de plus que Juliette.

Sachant que chaque jeune fille a menti une fois et dit vrai les deux autres fois, trouver les âges des trois jeunes filles.

29) Dans le plan, on considère deux triangles ABC et DEF comme des ensembles de points, ceux qui sont sur le périmètre du triangle. Tracer les deux triangles de manière que les deux ensembles aient une intersection formée de : 0 point, 1 point, 2 points, 3 points, 4 points, 5 points, 6 points. Montrer qu'il est impossible que l'intersection soit formée de 7 points.

Problèmes de dénombrement.

30) Une classe comprend 30 élèves, une autre 35 ; de combien de manières peut-on former un groupe de deux élèves (un de chaque classe) ?

31) De combien de manières peut-on charger deux facteurs de distribuer six lettres ? De combien de manières si l'on veut que les deux facteurs soient employés ?

32) De combien de manières peut-on répartir six objets distincts en deux parties (non vides) ?

33) De combien de manières peut-on associer deux lettres (distinctes ou non) d'un alphabet de 26 lettres ?

34) Combien y a-t-il de nombres de trois chiffres (répétés ou non) dont les chiffres sont 1, 2, 3 ; calculer leur somme.

Les arrangements, qui diffèrent des combinaisons en ce qu'on y tient compte de l'ordre dans lequel sont écrits les objets, se présentent dans des questions telles que les suivantes :

35) Dans la numération décimale, combien y a-t-il de nombres de trois chiffres (non répétés) dont les chiffres sont 3, 5, 7 ?

36) Avec un alphabet de 26 lettres, combien peut-on écrire de mots de trois lettres distinctes ?

37) Combien y a-t-il de nombres de n chiffres (non répétés) dans la numération décimale. Envisager deux cas, selon qu'on accepte ou non le zéro comme premier chiffre de gauche.

Le calcul du nombre de permutations de n objets est un cas particulier du précédent :

38) Avec n chiffres différents, combien peut-on écrire de nombres de n chiffres (sans répétition de chiffre) ?

39) Dans un bal où il y a 10 hommes et 10 femmes, de combien de manières peut-on former des couples d'un homme et une femme ?

40) On dispose de 5 ouvrages en allemand, 7 en anglais, 10 en français ; de combien de manières peut-on en prélever deux de langues différentes ?

41) On a six paires de gants ; de combien de façons peut-on choisir un gant droit et un gant gauche, mais non de la même paire ?

42) Deux personnes entrent dans un compartiment où il y a six places libres ; de combien de manières peuvent-elles s'asseoir ?

43) Combien peut-on écrire de mots de deux lettres, l'une étant une consonne, l'autre une voyelle, avec un alphabet de 20 consonnes et 6 voyelles ? De combien de manières peut-on choisir une consonne et une voyelle ?

44) Combien peut-on écrire de mots avec les lettres (non répétées) a, b, c, d, e, f ? Parmi ces mots, combien y en a-t-il qui commencent par ab ?

45) On veut ranger sur un rayon de bibliothèque 5 livres en allemand, 6 en anglais, 8 en français. De combien de manières peut-on le faire : si l'on classe ensemble les livres de chaque langue ; si on les place pêle-mêle ?

46) De combien de manières peut-on répartir 20 objets différents en deux groupes de 12 et 8 ? En trois groupes de 5, 7 et 8 ?

(à suivre).

DEUX STRUCTURES EQUIVALENTES POUR LA GEOMETRIE PLANE

par Claude FRASNAY

Maître-Assistant à la Faculté des Sciences de Grenoble

SOMMAIRE. — *L'objet de cet exposé est l'équivalence entre la structure de plan métrique euclidien (relativement à un groupe ordonné) et la structure de plan affine normé (relativement à un corps ordonné). Il s'agit surtout, en ce domaine à peu près classique, de préciser la terminologie et les idées générales, puisque la démonstration d'équivalence emprunte ses grandes lignes au développement traditionnel de la Géométrie.*

Le seul point délicat de cette démonstration concerne l'associativité et la commutativité du produit des scalaires dans une structure de plan métrique euclidien. Nous proposons une méthode basée sur le théorème de l'orthocentre et sur la règle de proportion : $ab = cd \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{d}{a}$. A cette occasion, nous établissons que la règle de proportion est caractéristique des groupes commutatifs.

§ 1. ESPACES METRIQUES, ESPACES AFFINES NORMES

Les structures qui nous intéressent concernent deux ensembles de base : un ensemble E de *points*, un ensemble S de *scalaires*.

I. STRUCTURE D'ESPACE MÉTRIQUE.

1. Groupes totalement ordonnés.

a) Une structure (α, ω) de *groupe totalement ordonné* sur un ensemble S comporte une addition α et un ordre ω vérifiant l'axiome (G) suivant :

(G) L'ensemble S, muni de l'addition α , est un groupe commutatif non réduit à son élément neutre. L'ordre ω est total sur S et compatible avec l'addition α : $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (quels que soient les scalaires x, y, z de S).

b) Pour tout scalaire x du groupe totalement ordonné S, posons : $|x| = \text{Max}(x, -x)$. Cette *valeur absolue* vérifie, quels que soient les scalaires a, b de S :

$$\left\{ \begin{array}{l} |a| = 0 \iff a = 0, \\ |a| = |-a|, \\ |a + b| \leq |a| + |b| \end{array} \right.$$

c) Lorsqu'on choisit un scalaire $u \in S$ tel que $u > 0$, la conjonction de l'axiome (G) et de la condition $u > 0$ constitue l'axiome (GJ) d'une structure (α, ω, u) de *groupe totalement ordonné et jaugé* sur S.

2. Espaces métriques.

a) Soit (α, ω) une structure de groupe totalement ordonné sur un ensemble S, et soit E un ensemble non vide.

Une structure (α, ω, δ) d'*espace métrique* sur E (relativement au groupe totalement ordonné S) est définie par une application

$(P, Q) \rightarrow \delta(P, Q)$ de $E \times E$ dans S (*distance* des points P, Q) vérifiant l'axiome (M) suivant :

(M) Quels que soient les points A, B, C de E , on a :

$$\begin{cases} \delta(A, B) = 0 \iff A = B, \\ \delta(A, B) = \delta(B, A), \\ \delta(A, C) \leq \delta(A, B) + \delta(B, C). \end{cases}$$

Cet axiome implique immédiatement $\delta(P, Q) \geq 0$ (quels que soient les points P, Q de E).

Lorsque S est jaugé par un scalaire u , le même axiome (M) définit une structure $(\alpha, \omega, u, \delta)$ d'espace métrique sur E relativement au groupe totalement ordonné et jaugé S .

b) Si F est une partie non vide d'un espace métrique E , la restriction de l'application δ à l'ensemble $F \times F$ définit F comme *sous-espace métrique* de E .

Si E et E' sont deux espaces métriques relativement au même groupe totalement ordonné S , une *isométrie* entre E et E' est une application φ de E sur E' conservant les distances (ce qui implique la biunivocité de φ).

3. Espaces réglés.

a) Comme exemple d'espace métrique relativement à un groupe totalement ordonné S , on peut prendre (en vertu des propriétés de la valeur absolue) l'ensemble S lui-même muni de la fonction distance

$$\delta(x, y) = |x - y| \text{ (métrique canonique sur } S\text{).}$$

Un espace métrique D (relativement à S) est appelé une *droite métrique* dès que D est isométrique à S (muni de sa métrique canonique).

b) Un *espace réglé* est un espace métrique E non réduit à un point et contenant, pour tout couple (A, B) de points distincts, une droite métrique D et une seule passant par A et B . Dans un tel espace réglé E , on peut alors montrer que le *segment* $[A, B]$ de la droite D est l'ensemble des points $P \in E$ tels que $\delta(A, B) = \delta(A, P) + \delta(P, B)$.

c) Soit D une droite d'un espace réglé E .

Une *droite orientée* $\Delta = (D, \theta)$ de *support* D est définie par un ordre θ total sur D , vérifiant (quels que soient les points A, B, P de D) la condition :

$$P \in [A, B] \iff A \leq P \leq B \text{ ou } B \leq P \leq A.$$

A une telle *orientation* θ de D , on peut associer une *mesure*

$(P, Q) \rightarrow \overline{PQ}$ (application de $D \times D$ dans S) en posant :

$$\begin{cases} \overline{PQ} = \delta(P, Q) \text{ si } P \leq Q, \\ \overline{PQ} = -\delta(P, Q) \text{ si } Q < P. \end{cases}$$

Il en résulte immédiatement $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ quels que soient les points A, B, C de D . On montre alors facilement que la droite D supporte deux droites orientées (et deux seulement) : $\Delta_1 = (D, \theta_1)$ et $\Delta_2 = (D, \theta_2)$, d'orientations θ_1 et θ_2 opposées.

Toute isométrie de l'espace réglé E (sur lui-même) transforme une droite en une droite, une droite orientée en une droite orientée.

4. Notion de pliage.

On dit qu'un espace réglé E est *pliable* autour d'un sous-espace métrique F (ou que F est un *pli* de E) s'il existe une partition $\{F, F_1, F_2\}$

de E et une isométrie σ de $F \cup F_1$ sur $F \cup F_2$ vérifiant (quels que soient les points P, P_1, P_2 de E) :

$$\begin{cases} P \in F \Rightarrow \sigma(P) = P, \\ P_1 \in F_1 \text{ et } P_2 \in F_2 \Rightarrow \text{le segment } [P_1, P_2] \text{ rencontre } F. \end{cases}$$

On démontre alors les propriétés suivantes :

a) La relation « $[P, Q]$ ne rencontre pas F » est une relation d'équivalence entre points P, Q de l'ensemble $F' = F_1 \cup F_2$ (complémentaire de F dans E). Les ensembles F_1, F_2 sont les classes de F' pour cette relation. La partition $\{F, F_1, F_2\}$ associée au pli F est donc unique : F_1 et F_2 sont les *demi-espaces de bord* F .

b) Pour un point $A \in E$, considérons la fonction $f(P) = \delta(A, P)$ lorsque P parcourt le pli F . Il existe un point $B \in F$ et un seul tel que $f(B)$ soit valeur minimum de la fonction $f(P)$: on dit que B est la *projection* de A sur le pli F .

c) La relation « P se projette sur F au milieu du segment $[P, Q]$ » définit une application biunivoque $Q = \psi(P)$ de E sur lui-même. Cette transformation ψ est une isométrie involutive, dite *symétrie* par rapport au pli F . La symétrie ψ est un prolongement du *pliage* σ associé à F : ce pliage est donc unique.

d) Toute isométrie φ de l'espace réglé E (sur lui-même) transforme le pli F en un pli $\varphi(F)$. Si deux points P et Q sont symétriques par rapport à F , les points $\varphi(P)$ et $\varphi(Q)$ sont symétriques par rapport à $\varphi(F)$ (autrement dit : la transmuée $\varphi \psi \varphi^{-1}$ d'une symétrie ψ par une isométrie φ est encore une symétrie). Si N est la projection de P sur le pli F , $\varphi(N)$ est la projection de $\varphi(P)$ sur le pli $\varphi(F)$.

5. Structure topologique sous-jacente à une structure métrique.

a) Soit A un point d'un espace métrique E (relativement à un groupe totalement ordonné S). Pour tout scalaire $r \in S$ tel que $r > 0$, la *boule* de centre A et de rayon r est l'ensemble des points $P \in E$ tels que :

$$\delta(A, P) < r.$$

Les boules permettent d'introduire sur E une structure sous-jacente d'espace topologique séparé en convenant qu'une partie F de E est voisine d'un point $A \in E$ dès que F contient une boule de centre A .

b) Dans un espace réglé E , la frontière d'une boule de centre A et de rayon r est l'ensemble des points $P \in E$ tels que $\delta(A, P) = r$.

Pour un espace réglé E , considérons la proposition suivante :

(C) Si une droite D de E rencontre une boule B de E , alors D rencontre aussi la frontière de B .

Lorsque la proposition (C) est vraie, quelles que soient D et B , on dit que E vérifie l'*axiome du compas*. Il en est ainsi, par exemple, lorsque E est un espace réglé relativement au groupe additif ordonné $\mathbb{R}$ des nombres réels.

II. STRUCTURE D'ESPACE AFFINE NORMÉ.

1. Espaces affines.

a) Sur un ensemble S , soit (α, μ) une structure de *corps* définie par une addition α et une multiplication μ .

Soit E un ensemble non vide : les transformations de E (applications

biunivoques de E sur E) constituent un groupe $\mathcal{G}$ pour l'opération interne $\varphi \circ \psi$ (composition de deux transformations φ et ψ).

Une structure $(\alpha, \mu, \mathcal{C}, h)$ d'espace affine sur E (relativement au corps S) est définie par une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{G}$ et une application

$(x, \varphi) \rightarrow h(x, \varphi)$ de $S \times \mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ (*multiplication affine*) vérifiant l'axiome (A) suivant :

(A) L'opération interne $\psi \circ \varphi$ et l'opération externe $h(x, \varphi)$ définissent sur $\mathcal{C}$ une structure d'espace vectoriel relativement au corps S . Pour tout couple $(P, Q) \in E \times E$, il existe une transformation $\varphi \in \mathcal{C}$ et une seule telle que $Q = \varphi(P)$.

La conjonction de l'axiome (A) et de la condition « $\dim \mathcal{C} = n$ » constitue l'axiome (A_n) d'une structure d'espace affine de dimension n (sur E , relativement à S) : droite affine si $n = 1$, plan affine si $n = 2$, etc.

b) Pour la structure $(\alpha, \mu, \mathcal{C}, h)$ précédente, les transformations $\varphi \in \mathcal{C}$ sont les *translations* de l'espace affine E . L'axiome (A) implique : « $\mathcal{C}$ est un sous-groupe commutatif de $\mathcal{G}$ ». Il est d'usage de noter additivement $(\varphi + \psi)$ au lieu de $\psi \circ \varphi$ la composition des translations et d'écrire $x\varphi$ au lieu de $h(x, \varphi)$ pour la multiplication affine.

Pour tout couple (P, Q) de points de E , désignons par $\overrightarrow{PQ}$ la translation transformant P en Q . L'application $(P, Q) \rightarrow \overrightarrow{PQ}$ de $E \times E$ dans $\mathcal{C}$ vérifie (quels que soient les points A, B, C de E) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = 0 \iff A = B, \\ \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}, \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}. \end{array} \right.$$

Pour tout sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{C}$ et tout point $A \in E$, introduisons l'ensemble F des points $P \in E$ tels que $\overrightarrow{AP} \in \mathcal{V}$. En restreignant à F les translations $\varphi \in \mathcal{V}$, on peut définir sur F une structure d'espace affine (relativement au corps S) : pour cette raison, on dit que F est un *sous-espace affine* de E . En particulier, lorsque $\dim \mathcal{V} = 1$, F est une droite affine de E admettant comme *vecteur directeur* tout vecteur $\varphi \in \mathcal{V}$ tel que $\varphi \neq 0$: dès lors, la droite F est l'ensemble des points $P \in E$ tels que $\overrightarrow{AP} = x\varphi$ lorsque x parcourt S .

c) Exemple fondamental d'espace affine.

Prenons pour E un espace vectoriel relativement au corps S . Pour tout couple $(A, P) \in E \times E$, posons $\varphi_A(P) = P + A$. Lorsque A parcourt E , les applications φ_A constituent un groupe $\mathcal{C}$ de transformations de E . Introduisons sur $\mathcal{C}$ une multiplication affine h en posant $h(x, \varphi_A) = \varphi_{xA}$ pour tout $x \in S$. Il est immédiat que $(\alpha, \mu, \mathcal{C}, h)$ est une structure d'espace affine sur E , relativement au corps S .

Les identités $\varphi_A + \varphi_B = \varphi_B \circ \varphi_A = \varphi_{A+B}$ et $x\varphi_A = \varphi_{xA}$ montrent que l'application $A \rightarrow \varphi_A$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel E sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}$.

2. Corps ordonnés.

Une structure (α, μ, ω) de *corps ordonné* sur un ensemble S comporte une addition α , une multiplication μ et un ordre ω vérifiant l'axiome (K) suivant :

(K) L'ensemble S , muni de l'addition α et de la multiplication μ , est

un corps commutatif. L'ordre ω est total sur S et compatible avec les opérations α, μ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{quels que soient les scalaires} \\ x, y, z \text{ de } S. \end{array}$$

Si u est l'unité du corps S , la structure (α, ω, u) est une structure de groupe totalement ordonné et jaugé, sous-jacente à la structure (α, μ, ω) de corps ordonné.

Un corps ordonné S est dit *pythagoricien* si, quels que soient les scalaires x et y de S , il existe $z \in S$ tel que $z^2 = x^2 + y^2$. (En outre, z est unique lorsqu'on astreint ce scalaire à la condition $z \geq 0$: on note alors

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3. Espaces vectoriels normés.

a) Sur un ensemble S , soit (α, μ, ω) une structure de corps ordonné définie par une addition α , une multiplication μ et un ordre ω .

Sur un ensemble V , soit (α, μ, t, h) une structure d'espace vectoriel (relativement au corps S) définie par une opération interne t et une opération externe h .

Une structure $(\alpha, \mu, \omega, t, h, n, p)$ d'espace vectoriel normé sur V (relativement au corps ordonné S) est définie par une application $\varphi \rightarrow \|\varphi\|$ de V dans S (norme n) et une application $(\varphi, \psi) \rightarrow \varphi \cdot \psi$ de $V \times V$ dans S (produit scalaire p) vérifiant l'axiome (N) suivant :

(N) Quels que soient les vecteurs φ, ψ, θ de V et le scalaire x de S , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \cdot \varphi = \|\varphi\|^2, \\ \varphi \neq 0 \Rightarrow \|\varphi\| > 0, \\ \varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi, \\ \theta \cdot (\varphi + \psi) = \theta \cdot \varphi + \theta \cdot \psi, \\ \varphi \cdot (x\psi) = x(\varphi \cdot \psi). \end{array} \right.$$

Un vecteur $\varphi \in V$ est *unitaire* lorsque $\|\varphi\| = u$ (unité du corps S). Deux vecteurs φ, ψ de V sont *orthogonaux* lorsque $\varphi \cdot \psi = 0$. Une famille de vecteurs de V est *orthonormée* lorsque ses vecteurs sont unitaires et deux à deux orthogonaux.

b) Propriétés d'une norme et d'un produit scalaire.

Soit V un espace vectoriel normé relativement à un corps ordonné S . Quels que soient les vecteurs φ, ψ de V et le scalaire x de S , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\varphi\| = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0, \\ \|x\varphi\| = |x| \|\varphi\|, \\ \varphi \cdot \psi \leq \|\varphi\| \|\psi\|, \\ \|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|. \end{array} \right.$$

L'inégalité $\varphi \cdot \psi \leq \|\varphi\| \|\psi\|$ est banale lorsque $\varphi = 0$. Lorsque $\varphi \neq 0$, elle résulte de $\|a\psi - b\varphi\|^2 = a(ac - b^2)$ en posant $a = \|\varphi\|^2$, $b = \varphi \cdot \psi$ et $c = \|\psi\|^2$.

L'inégalité $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$ se déduit de la précédente en comparant $\|\varphi + \psi\|^2$ et $(\|\varphi\| + \|\psi\|)^2$.

c) Si V est un espace vectoriel normé de dimension 2, et si (φ_1, φ_2) est un couple de vecteurs indépendants, on peut poser :

$$\psi_0 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}, \quad \psi_1 = \varphi_2 - (\varphi_0 \cdot \varphi_2)\varphi_0, \quad \psi_2 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|}.$$

Dès lors, le couple de vecteurs (ψ_0, ψ_2) est orthonormé. Pour tout couple (x, y) de scalaires, la norme $z = \|\theta\|$ du vecteur $\theta = x\psi_0 + y\psi_2$ vérifie

$z^2 = x^2 + y^2$. Autrement dit, le corps ordonné S des scalaires est nécessairement pythagoricien.

Réciproquement, si S est un corps ordonné pythagoricien, l'espace vectoriel produit $V = S \times S$ (de dimension 2) peut être muni du produit scalaire $(x, y) \cdot (x', y') = xx' + yy'$ et de la norme $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Espaces affines normés.

Sur un ensemble S , soit (α, μ, ω) une structure de corps ordonné définie par une addition α , une multiplication μ et un ordre ω .

Sur un ensemble E non vide, soit $(\alpha, \mu, \mathcal{C}, h)$ une structure d'espace affine relativement au corps S définie par un groupe $\mathcal{C}$ de translations et une multiplication affine h . Si t désigne l'opération interne dans $\mathcal{C}$ (addition de deux translations), la structure (α, μ, t, h) est une structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{C}$ relativement au corps S .

Une structure $(\alpha, \mu, \omega, \mathcal{C}, h, n, p)$ d'espace affine normé sur E (relativement au corps ordonné S) est définie par une norme $\varphi \rightarrow n(\varphi)$ (application de $\mathcal{C}$ dans S) et par un produit scalaire $(\varphi, \psi) \rightarrow p(\varphi, \psi)$ (application de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ dans S) vérifiant la condition :

« La structure $(\alpha, \mu, \omega, t, h, n, p)$ est une structure d'espace vectoriel normé sur l'ensemble $\mathcal{C}$, relativement au corps ordonné S ».

La conjonction de cette condition et de l'axiome (A) constitue l'axiome (AN) d'une structure d'espace affine normé. De manière analogue, nous noterons (A_nN) l'axiome d'une structure d'espace affine normé de dimension n .

5. Structure métrique sous-jacente à une structure affine normée.

Sur un ensemble S , soit (α, μ, ω) une structure de corps ordonné. L'addition α , la multiplication μ et l'ordre ω vérifient l'axiome (K).

Sur un ensemble E , soit $\Sigma = (\alpha, \mu, \omega, \mathcal{C}, h, n, p)$ une structure d'espace affine normé relativement au corps ordonné S . Le groupe $\mathcal{C}$ des translations, la multiplication affine h , la norme n et le produit scalaire p vérifient l'axiome (AN) relativement à (α, μ, ω) .

a) Si u est l'unité du corps S , la structure (α, ω, u) est une structure de groupe totalement ordonné et jaugé sur S . L'addition α , l'ordre ω et la jauge u vérifient l'axiome (GJ).

b) Pour tout couple (P, Q) de points de E , posons :

$$\delta(P, Q) = \|\vec{PQ}\|.$$

Des propriétés de la norme $n(\varphi) = \|\varphi\|$ et du produit scalaire $p(\varphi, \psi) = \varphi \cdot \psi$ dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{C}$, il résulte que la distance δ (application de $E \times E$ dans S) vérifie l'axiome (M) relativement à (α, ω) .

Autrement dit, la structure $\sigma = (\alpha, \omega, \mu, \delta)$ est une structure d'espace métrique sur E relativement au groupe totalement ordonné et jaugé S . Notons Π le procédé de déduction associant la structure σ à la structure $\Sigma = (\alpha, \mu, \omega, \mathcal{C}, h, n, p)$: la structure métrique $\sigma = \Pi(E, S, \Sigma)$ est dite sous-jacente à la structure affine normée Σ .

La structure sous-jacente σ est, bien entendu, plus riche qu'une simple structure d'espace métrique. Par exemple, il y a identité entre les droites affines de E (pour la structure Σ) et les droites métriques de E (pour la structure σ). Il en résulte que E , s'il n'est pas réduit à un point, est un espace réglé.

§ 2. PLANS METRIQUES EUCLIDIENS, PLANS AFFINES NORMES

Nous allons nous restreindre à l'axiomatique de la géométrie plane et définir des structures plus particulières : structure de plan métrique, structure de plan métrique euclidien, structure de plan affine normé. Simultanément, le seul développement que nous donnerons à cette axiomatique se résumera en une trentaine de propositions classiques, indispensables à la démonstration d'équivalence que nous avons en vue.

I. STRUCTURE DE PLAN MÉTRIQUE.

1. Plans métriques.

Sur un ensemble E non vide, soit (α, ω, δ) une structure d'espace métrique relativement à un groupe totalement ordonné S . Il est entendu que l'addition α , l'ordre ω et la distance δ vérifient les axiomes (G) et (M).

On dit que E est un *plan métrique* (relativement à S) s'il vérifie l'axiome (P) suivant :

(P) L'espace métrique E est un espace réglé pliable autour de chacune de ses droites.

Dès lors, pour toute droite D du plan E , nous noterons $[D]$ la symétrie de E autour de D .

2. Parallélisme et perpendicularité.

a) Soient D et D' deux droites quelconques du plan métrique E .

La relation de *parallélisme* $D \parallel D'$ se définit par :

« $D = D'$ ou D, D' ne se rencontrent pas. ».

La relation de *perpendicularité* $D \perp D'$ se définit par :

« $D \neq D'$ et D' est invariante par la symétrie $[D]$. ».

Proposition 1. — Quelles que soient les droites D, D' et l'isométrie φ du plan métrique E :

$$\begin{cases} D \parallel D' \Rightarrow D' \parallel D \text{ et } \varphi(D) \parallel \varphi(D'), \\ D \perp D' \Rightarrow D' \perp D \text{ et } \varphi(D) \perp \varphi(D'). \end{cases}$$

b) Si deux points distincts A et B sont symétriques par rapport à une droite D , on dit que D est *médiatrice* du segment $[A, B]$. Soient D_1 et D_2 les *demi-plans* de bord D , tels que $A \in D_1$ et $B \in D_2$. Posons : $f(P) = \delta(P, B) - \delta(P, A)$ pour P variant dans le plan E .

Proposition 2. — Les relations $P \in D$, $P \in D_1$, $P \in D_2$ sont respectivement équivalentes à $f(P) = 0$, $f(P) > 0$, $f(P) < 0$.

Corollaire. — Si un *triangle* $\{A, B, C\}$ vérifie $\delta(C, A) = \delta(C, B)$, la projection de C sur la droite AB est milieu du segment $[A, B]$.

c) *Proposition 3.* — Etant donné une droite D et un point P , il passe par P une droite D' et une seule telle que $D \perp D'$.

(Comme D' passe nécessairement par la projection de P sur D , le seul cas délicat est : $P \in D$).

Corollaire 1. — $D \perp D'_1$ et $D \perp D'_2 \Rightarrow D'_1 \parallel D'_2$.

Corollaire 2. — Etant donné deux droites orientées Δ, Δ' de supports D, D' non perpendiculaires, soit $P' = \psi(P)$ l'application de Δ dans Δ' définie par : « $P \in D$ et P' est la projection de P sur D' . » La fonction ψ est strictement monotone.

3. Symétries et transpositions.

a) *Proposition 4.* — Les seules isométries du plan E conservant point par point une droite D sont la transformation identique et la symétrie [D].

Corollaire. — Les droites d'un plan métrique E sont les seuls plis de E.

b) *Proposition 5.* — Si Δ et Δ' sont deux droites orientées sécantes, il existe une symétrie [D] et une seule transformant Δ en Δ' . (La droite D est dite *bissectrice* des droites orientées Δ, Δ').

c) A tout point $A \in E$, on peut associer la transformation involutive $P' = \varphi(P)$ de E définie par : « A est milieu de $[P, P']$. ». La transformation φ est la *transposition* de centre A : nous la noterons (A).

Proposition 6. — Si D_1 et D_2 sont deux droites perpendiculaires quelconques passant par A, on a : $(A) = [D_2] \circ [D_1]$.

Corollaire. — Toute transposition φ est une isométrie. Pour une telle transposition φ et toute droite D de E, on a $\varphi(D) \parallel D$.

4. Repérage d'un plan métrique.

Considérons un couple $\varrho = (\Delta_1, \Delta_2)$ de droites orientées de E dont les supports D_1, D_2 sont perpendiculaires : on dit que ϱ est un *repère* du plan métrique E. Le point A commun à D_1 et D_2 est l'*origine* de ce repère.

a) Pour tout point $P \in E$, soient P_1 et P_2 les projections de P sur D_1 et D_2 . Les scalaires $x = \overline{AP_1}$ (mesure sur Δ_1) et $y = \overline{AP_2}$ (mesure sur Δ_2) sont les *coordonnées* de P dans le repère ϱ : *abscisse* x, *ordonnée* y. On définit ainsi une application biunivoque $P \rightarrow (x, y)$ de E sur une partie T de $S \times S$ (on peut avoir $T \neq S \times S$).

Dès lors, toute transformation $P \rightarrow P'$ de E peut être caractérisée (dans ϱ) par une transformation $(x, y) \rightarrow (x', y')$ de T.

b) Si D est la bissectrice de Δ_1 et Δ_2 , on peut mentionner cinq isométries remarquables de E (associées au repère ϱ) : les trois symétries $[D_1]$, $[D_2]$, [D], la transposition $(A) = [D_2] \circ [D_1]$ et l'isométrie $\psi = [D] \circ [D_1]$. L'isométrie ψ conserve A et transforme Δ_1 en Δ_2 : nous dirons que ψ est une *rotation normale* de centre A.

Proposition 7. — Les transformés du point (x, y) par les cinq isométries remarquables $[D_1]$, $[D_2]$, [D], (A) et ψ sont respectivement les points $(x, -y)$, $(-x, y)$, (y, x) , $(-x, -y)$ et $(-y, x)$.

Corollaire. — Toute rotation normale ψ de centre A vérifie :

$$\psi \circ \psi = (A).$$

Proposition 8. — Si ψ est une rotation normale de centre A, et D une droite passant par A, on a : $\psi(D) \perp D$.

(Conséquence des corollaires des propositions 2 et 7).

5. Nous dirons que le groupe totalement ordonné S est un groupe *dyadique* si, pour tout $x \in S$, il existe $y \in S$ tel que $x = 2y$. Dès lors, pour A et B distincts dans le plan E, le segment $[A, B]$ a toujours un milieu et une médiatrice. Dans ce cas :

Proposition 9. — Etant donné quatre points P, Q, P', Q' de E tels que $\delta(P, Q) = \delta(P', Q') \neq 0$, il existe deux isométries de E (et deux seulement) transformant P en P' et Q en Q'.

Corollaire. — Etant donné deux repères ϱ et ϱ' de E, il existe une isométrie $P \rightarrow P'$ de E (et une seule) transformant ϱ en ϱ' . Les coordonnées de P' dans ϱ' sont identiques aux coordonnées de P dans ϱ .

II. STRUCTURE DE PLAN MÉTRIQUE EUCLIDIEN.

1. Plans métriques euclidiens.

Sur un ensemble E , soit (α, ω, δ) une structure de plan métrique relativement à un groupe totalement ordonné S . Il est entendu que l'addition α , l'ordre ω et la distance δ vérifient les axiomes (G), (M) et (P).

On dit que le plan métrique E est *euclidien* s'il vérifie l'axiome (H) suivant (dit *axiome des parallèles*) :

(H) Si deux droites D_1 et D_2 de E se rencontrent, et s'il existe une autre droite de E ne les rencontrant pas, alors $D_1 = D_2$.

Remarque. — En parlant de plan métrique « euclidien », nous reprenons une dénomination traditionnelle. Mais, en fait, la géométrie plane d'Euclide doit être considérée comme l'étude d'une structure un peu plus riche : celle d'un plan métrique vérifiant, non seulement l'axiome des parallèles, mais aussi l'axiome du compas.

2. Parallélisme.

a) *Proposition 10.* — Etant donné une droite D et un point P du plan métrique euclidien E , il passe par P une droite D' de E et une seule telle que $D \parallel D'$.

Corollaire 1. — La relation « $D \parallel D'$ » est une relation d'équivalence entre droites D, D' de E . (La classe d'une droite D pour cette relation est appelée la *direction* de D).

Corollaire 2. — Quelles que soient les droites D_1, D_2, D'_1, D'_2 de E :

$$D_1 \perp D_2, D_1 \parallel D'_1 \text{ et } D_2 \parallel D'_2 \Rightarrow D'_1 \perp D'_2.$$

Corollaire 3. — Si un point P parcourt E , et si (x, y) sont les coordonnées de P dans un repère φ , la fonction $P \rightarrow (x, y)$ applique E sur $T = S \times S$.

b) *Proposition 11.* — Si $D_1 \parallel D_2$ et $D_1 \neq D_2$, il existe une symétrie $[D]$ et une seule transformant la droite D_1 en la droite D_2 . La droite D (parallèle à D_1 et D_2) est l'ensemble des points $A \in E$ tels que la transposition (A) transforme D_1 en D_2 .

Corollaire 1. — Si trois droites parallèles D, D', D'' sont coupées par une sécante en trois points M, M', M'' tels que M' soit milieu de $[M, M'']$, il en est de même pour toute autre sécante (*lemme de Thalès*).

Corollaire 2. — Le groupe S des scalaires d'un plan métrique euclidien vérifie la condition : « Pour tout $x \in S$ et tout entier $n \geq 2$, il existe $y \in S$ tel que $x = ny$. ».

(En particulier, S est un groupe dyadique. La proposition 9 et son corollaire sont donc valables dans un plan métrique euclidien).

c) *Proposition 12.* — Les trois côtés $[B, C]$, $[C, A]$, $[A, B]$ d'un triangle quelconque $\{A, B, C\}$ ont leurs médiatrices concourantes.

(Conséquence des propositions 2, 3 et du corollaire 2 de la proposition 10).

3. Glissements.

Appelons *glissement* d'un plan métrique euclidien E toute isométrie φ de E décomposable en un produit $\varphi = (B) \circ (A)$ de deux transpositions.

La transformation identique est un glissement. Tout glissement autre que la transformation identique est dit un glissement *strict*.

a) *Proposition 13.* — Si φ est un glissement strict, il existe une direction d et une seule telle que :

$$\begin{cases} D \text{ est une droite de direction } d \Rightarrow \varphi(D) = D, \\ D \text{ est une droite de direction } \neq d \Rightarrow \varphi(D) \neq D \text{ et } \varphi(D) \parallel D. \end{cases}$$

(On dit que d est la *direction* du glissement strict φ).

Proposition 14. — Si φ est un glissement strict de direction d , il transforme tout point P en un point $P' \neq P$ tel que la droite PP' ait la direction d .

Proposition 15. — Etant donné deux points P et P' de E , il existe un glissement et un seul transformant P en P' .

Proposition 16. — Etant donné un glissement φ , on peut (d'une infinité de façons) le décomposer en un produit $\varphi = (B) \circ (A)$ de deux transpositions. On peut choisir arbitrairement dans E : soit le point A , soit le point B .

b) La relation : « Il existe un glissement φ tel que $A' = \varphi(A)$ et $B' = \varphi(B)$ », est une relation d'équivalence entre couples (A, A') et (B, B') de points de E . On peut la noter $(A, A') \equiv (B, B')$, et on l'exprime aussi en disant que (A, A', B', B) est un *parallélogramme*.

Proposition 17. — $(A, A') \equiv (B, B') \iff [A, B']$ et $[A', B]$ ont même milieu.

Corollaire 1. — $(A, A') \equiv (B, B') \Rightarrow (A, B) \equiv (A', B')$.

Corollaire 2. — Si P, P', Q, Q' sont les projections de A, A', B, B' sur une droite D :

$$(A, A') \equiv (B, B') \Rightarrow (P, P') \equiv (Q, Q').$$

Proposition 18. — Si A, A', B, B' sont quatre points d'une même droite orientée : $(A, A') \equiv (B, B') \iff \overline{AA'} = \overline{BB'}$. Si A, A', B, B' sont quatre points distincts non alignés :

$$(A, A') \equiv (B, B') \iff AA' \parallel BB' \text{ et } AB \parallel A'B'.$$

Corollaire. — Si un glissement conserve une droite D , il conserve les deux droites orientées Δ_1 et Δ_2 de support D .

Proposition 19. — Les hauteurs d'un triangle $\{A, B, C\}$ sont concourantes.

(Conséquence des propositions 12 et 18).

c) *Proposition 20.* — Si $\mathcal{I}$ est le groupe des isométries de E , les glissements de E constituent un sous-groupe commutatif $\mathcal{G}$ de $\mathcal{I}$.

(Conséquence des propositions 15, 16 et du corollaire 1 de la proposition 17).

Etant donné un repère φ de E , d'origine A , on peut associer à tout glissement φ de E le point $P = \varphi(A)$, puis le couple (x, y) des coordonnées de P dans φ . Il en résulte une application biunivoque $\varphi \rightarrow (x, y)$ de $\mathcal{G}$ sur $S \times S$.

Proposition 21. — L'application $\varphi \rightarrow (x, y)$ est un isomorphisme du groupe $\mathcal{G}$ sur le groupe produit $S \times S$. Autrement dit, la relation « $\varphi \rightarrow (x, y)$ et $\varphi' \rightarrow (x', y')$ » entraîne la relation :

$$\ll \varphi' \circ \varphi \rightarrow (x + x', y + y') \gg.$$

III. STRUCTURE DE PLAN AFFINE NORMÉ.

1. Plans affines normés.

Sur un ensemble S , soit (α, μ, ω) une structure de corps ordonné. Il est entendu que l'addition α , la multiplication μ et l'ordre ω vérifient l'axiome (K).

Sur un ensemble E , soit $\Sigma = (\alpha, \mu, \omega, \mathcal{C}, h, n, p)$ une structure de plan affine normé relativement au corps ordonné S . Il est entendu que le groupe $\mathcal{C}$ des translations, la multiplication affine h , la norme n et le produit scalaire p vérifient l'axiome (A_2N) , conjonction des axiomes (A_2) et (N) :

(A_2) L'opération interne $\psi \circ \varphi = \varphi + \psi$ et l'opération externe $h(x, \varphi) = x\varphi$ définissent sur $\mathcal{C}$ une structure d'espace vectoriel de dimension 2 relativement au corps S . Pour tout couple (P, Q) de points de E , il existe une transformation $\varphi \in \mathcal{C}$ et une seule telle que $Q = \varphi(P)$.

(N) La norme $n(\varphi) = \|\varphi\|$ et le produit scalaire $p(\varphi, \psi) = \varphi \cdot \psi$ définissent sur $\mathcal{C}$ une structure d'espace vectoriel normé relativement au corps ordonné S .

Des conditions d'existence précédemment énoncées pour un espace affine et pour un espace vectoriel normé de dimension 2, il résulte : « Pour qu'il existe un plan affine normé relativement à un corps ordonné S , il faut et il suffit que S soit un corps pythagoricien. »

2. Structure métrique sous-jacente.

Etant donné deux ensembles E et S , soit $\Sigma = (\alpha, \mu, \omega, \mathcal{C}, h, n, p)$ une structure de plan affine normé sur E relativement à une structure (α, μ, ω) de corps ordonné sur S . Soit $\sigma = (\alpha, \omega, u, \delta)$ la structure sous-jacente d'espace métrique sur E relativement à la structure (α, ω, u) de groupe totalement ordonné et jaugé sur S .

Nous savons déjà que l'espace métrique E est réglé, puisque les droites métriques de E (pour la structure σ) se confondent avec les droites affines de E (pour la structure Σ).

a) Si A et B sont deux points d'une droite quelconque D de E , tels que $\overrightarrow{AB}$ soit unitaire, on peut trouver une base orthonormée (φ, ψ) de l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ telle que $\varphi = \overrightarrow{AB}$.

Si l'on pose $f(P) = \overrightarrow{AP} \cdot \psi$, la droite D est l'ensemble des points $P \in E$ tels que $f(P) = 0$. Introduisons l'ensemble D_1 des points $P \in E$ tels que $f(P) > 0$, et l'ensemble D_2 des points $P \in E$ tels que $f(P) < 0$. A tout point $P \in D \cup D_1$ tel que $\overrightarrow{AP} = x\varphi + y\psi$ (pour $y \geq 0$), on peut associer le point $P' \in D \cup D_2$ tel que $\overrightarrow{AP'} = x\varphi - y\psi$. En considérant la partition $\{D, D_1, D_2\}$ de E et l'application $P \rightarrow P'$ de $D \cup D_1$ sur $D \cup D_2$, on montre facilement que l'espace réglé E est pliable autour de la droite D .

La structure métrique sous-jacente σ vérifie donc l'axiome (P) : c'est une structure de plan métrique.

b) Soient deux droites D et D' du plan affine E , admettant respectivement des vecteurs directeurs φ et φ' . Lorsque D et D' ne se rencontrent pas, les vecteurs φ et φ' sont nécessairement dépendants. Il en résulte que la structure métrique σ vérifie l'axiome (H) des parallèles : c'est une structure de plan métrique euclidien.

Proposition 22. — La structure métrique sous-jacente à une structure de plan affine normé est une structure de plan métrique euclidien.

Remarque. — Pour que la métrique d'un plan affine normé (relativement à un corps ordonné S) vérifie l'axiome du compas, il faut et il suffit que S vérifie la condition : « Pour tout $x \in S$ tel que $x \geq 0$, il existe $y \in S$ tel que $x = y^2$. ». En prenant $S = \mathbb{P}$ (plus petit sous-corps pythagoricien du corps ordonné $\mathbb{R}$ des nombres réels), on obtient des plans affines normés ne vérifiant pas l'axiome du compas puisque, par exemple,

$$\sqrt{2} \in \mathbb{P} \text{ et } \sqrt[4]{2} \notin \mathbb{P}.$$

3. Soit E un plan affine normé relativement à un corps ordonné S .

Nous allons énoncer quelques propositions qui permettent d'interpréter « métriquement » les termes typiques de la structure de plan affine normé : multiplication xy dans S , groupe $\mathcal{C}$ des translations de E , multiplication affine $x\varphi$, norme $\|\varphi\|$ et produit scalaire $\varphi.\psi$.

a) *Proposition 23.* — Si φ et φ' sont des vecteurs directeurs de deux droites D et D' de E :

$$\begin{cases} D \parallel D' \iff \varphi \text{ et } \varphi' \text{ sont dépendants,} \\ D \perp D' \iff \varphi \text{ et } \varphi' \text{ sont orthogonaux.} \end{cases}$$

Proposition 24. — Pour toute droite orientée $\Delta = (D, \theta)$ de E , il existe un vecteur unitaire α et un seul tel que $\overrightarrow{PQ} = \overline{PQ} \alpha$ quels que soient les points P et Q de D .

Proposition 25. — Si trois droites parallèles distinctes D_0, D_1, D_2 de E sont coupées par deux droites orientées Δ, Δ' respectivement en P_0, P_1, P_2 et P'_0, P'_1, P'_2 , on a :

$$\frac{\overline{P_0P_1}}{\overline{P_0P_2}} = \frac{\overline{P'_0P'_1}}{\overline{P'_0P'_2}}$$

Corollaire. — Soient u l'unité du corps S et a, b deux scalaires quelconques de S . Pour tout repère ϱ d'origine A , les points de coordonnées (u, a) et (b, ab) sont alignés avec A .

b) *Proposition 26.* — Le groupe des translations de E (pour sa structure affine) est identique au groupe des glissements de E (pour sa structure métrique).

c) La multiplication affine $\psi = x\varphi$ et le produit scalaire $x = \varphi.\psi$ représentent deux relations entre un scalaire x de S et deux translations φ, ψ de E . Soient A, B, C trois points de E tels que $\overrightarrow{AB} = \varphi$ et $\overrightarrow{AC} = \psi$, Δ une droite orientée dont le support D passe par A et B , C' la projection de C sur D .

Proposition 27. — En effectuant les mesures sur Δ :

$$\begin{cases} \psi = x\varphi \iff C \in D \text{ et } (\overrightarrow{AC}) = x(\overrightarrow{AB}), \\ x = \varphi.\psi \iff x = (\overrightarrow{AB}) (\overrightarrow{AC'}). \end{cases}$$

§ 3. LE THEOREME D'EQUIVALENCE

Etant donné deux ensembles de base E, S et une structure $\Sigma = (\alpha, \mu, \omega, \mathcal{C}, h, n, p)$ d'espace affine normé sur E relativement à une structure (α, μ, ω) de corps ordonné sur S , on sait définir un procédé de déduction $\sigma = \Pi(E, S, \Sigma)$ associant à Σ une structure sous-jacente $\sigma = (\alpha, \omega, u, \delta)$ d'espace métrique sur E relativement à une structure (α, ω, u) de groupe totalement ordonné et jaugé sur S . Ce procédé consiste essentiellement à prendre comme jauge u l'unité du corps S et comme distance δ la fonction $\delta(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$.

Théorème d'équivalence : Si Σ est une structure de plan affine normé, la structure métrique sous-jacente $\sigma = \Pi(E, S, \Sigma)$ est une structure de plan métrique euclidien. Réciproquement, pour toute structure σ de plan métrique euclidien, il existe une structure Σ et une seule de plan affine normé telle que $\sigma = \Pi(E, S, \Sigma)$.

I. LES TROIS PARTIES DU THÉORÈME D'ÉQUIVALENCE.

Le théorème d'équivalence comprend trois propositions : une proposition directe, une proposition réciproque d'unicité, une proposition réciproque d'existence.

1. La *proposition directe* sur la métrique sous-jacente à un plan affine normé est la proposition 22.
2. La *proposition réciproque d'unicité* résulte du fragment de géométrie d'un plan affine normé, donné au § 2 (en III, 3). Il est possible d'interpréter « métriquement » les termes typiques $\mu, \mathcal{C}, h, n, p$ d'une structure $\Sigma = (\alpha, \mu, \omega, \mathcal{C}, h, n, p)$ de plan affine normé, en utilisant la structure sous-jacente $\sigma = (\alpha, \omega, u, \delta)$ de plan métrique euclidien.

Lorsque σ est donnée *a priori*, il en résulte bien l'unicité de Σ (mais sans que l'on sache encore si Σ existe). Plus précisément, si E est un plan métrique euclidien relativement à un groupe totalement ordonné et jaugé S :

- a) L'unicité de la multiplication μ (dans S) résulte du corollaire de la proposition 25.
- b) L'unicité du groupe $\mathcal{C}$ des translations de E résulte de la proposition 26.
- c) L'unicité de la multiplication affine h et l'unicité du produit scalaire p résultent de la détermination de μ et $\mathcal{C}$, et de la proposition 27.
- d) L'unicité de la norme n résulte de la détermination de $\mathcal{C}$ et du procédé de déduction II par lequel on pose $\|\varphi\| = \delta(P, Q)$ lorsque $\overrightarrow{PQ} = \varphi$.

3. La *proposition réciproque d'existence* va utiliser les fragments de géométrie d'un plan métrique et d'un plan métrique euclidien, donnés au § 2 (en I et II).

Etant donné une structure $\sigma = (\alpha, \omega, u, \delta)$ de plan métrique euclidien sur E (relativement à un groupe totalement ordonné et jaugé S), il s'agit de définir des termes typiques possibles $\mu, \mathcal{C}, h, n, p$ en se référant aux données de la proposition d'unicité. Puis de montrer que la structure ainsi introduite $\Sigma = (\alpha, \mu, \omega, \mathcal{C}, h, n, p)$ vérifie les axiomes (K) et (A₂N) d'un plan affine normé (relativement à un corps ordonné).

Nous allons nous consacrer maintenant à la démonstration de cette proposition réciproque d'existence. Mais, auparavant, nous allons établir un lemme intéressant (le *lemme des proportions*) qui simplifiera l'étude de la multiplication μ des scalaires dans une structure de plan métrique euclidien.

II. LE LEMME DES PROPORTIONS.

1. Soit G un ensemble muni d'une opération interne partout définie $(x, y) \rightarrow xy$ (notée multiplicativement). Pour pouvoir introduire des rapports et des proportions entre des éléments de G , il faut supposer préalablement que la multiplication xy vérifie les deux conditions suivantes :

- a) G possède une unité u pour la multiplication xy .
(Cet élément u , caractérisé par « $ux = xu = x$ pour tout $x \in G$ » est nécessairement unique).
- b) Tout élément $z \in G$ admet un inverse z^{-1} , et un seul, pour la multiplication xy .

(Cet élément z^{-1} est caractérisé par « $zz^{-1} = z^{-1}z = u$ », ce qui implique : $(z^{-1})^{-1} = z$ et $u^{-1} = u$).

Pour abrégé, lorsque ces deux conditions sont vérifiées, nous dirons que G est un *quasi-groupe*. (Il manque la condition d'associativité pour que G soit un groupe).

2. Dans un quasi-groupe G , on peut noter l'élément $y^{-1}x$ sous la forme d'un *rapport* : $\frac{x}{y} = y^{-1}x$. On dit que G vérifie la *règle de proportion* (ou règle « des moyens et des extrêmes ») quand on a : $ab = cb \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{d}{a}$ (quels que soient les éléments a, b, c, d de G).

Remarquons que l'identité $ab = cd \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{d}{a}$ implique sa réciproque $\frac{b}{c} = \frac{d}{a} \Rightarrow ab = cd$.

Lorsque le quasi-groupe G est un groupe commutatif (autrement dit lorsque la multiplication xy est, en outre, associative et commutative), la règle de proportion est immédiatement vérifiée puisque :

$$ab = cd \Rightarrow b = a^{-1}(cd) = c(a^{-1}d) \text{ et } c^{-1}b = a^{-1}d.$$

Nous allons démontrer que la règle de proportion caractérise un quasi-groupe comme groupe commutatif.

3. *Lemme des proportions* : « Pour qu'un quasi-groupe soit un groupe commutatif, il faut et il suffit qu'il vérifie la règle de proportion. »

Nous venons de voir que la condition est nécessaire. Pour démontrer qu'elle est suffisante, nous allons décomposer le raisonnement en trois étapes de manière à montrer le rôle essentiel de l'associativité dans le cas particulier : $x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = y$.

Supposons donc que $ab = cd \Rightarrow c^{-1}b = a^{-1}d$, quels que soient les éléments a, b, c, d du quasi-groupe G .

a) *Commutativité* : $xy = yx$.

Il suffit d'appliquer la règle de proportion aux éléments :

$$a = y^{-1}, b = y, c = x^{-1}, d = x \text{ (d'où } ab = cd = u).$$

Dès lors, $c^{-1}b = a^{-1}d$ s'écrit : $xy = yx$.

b) *Simplification d'un rapport* : $\frac{xy}{x} = y$, ou $x^{-1}(xy) = y$.

Il suffit d'appliquer la règle de proportion aux éléments :

$$a = u, b = xy, c = x, d = y \text{ (d'où } ab = cd = xy).$$

Dès lors, $c^{-1}b = a^{-1}d$ s'écrit : $x^{-1}(xy) = y$.

c) *Associativité* : $x(yz) = (xy)z$.

Il suffit d'appliquer la règle de proportion aux éléments :

$a = z^{-1}, b = zy, c = x^{-1}, d = xy$. La simplification des rapports $z^{-1}(zy)$ et $x^{-1}(xy)$ entraîne $ab = cd = y$.

Dès lors, $c^{-1}b = a^{-1}d$ s'écrit : $x(zy) = z(xy)$, d'où $x(yz) = (xy)z$ par commutativité.

III. LA MULTIPLICATION DES SCALAIRES.

Soit E un plan métrique euclidien (relativement à un groupe totalement ordonné et jaugé S).

1. Lorsqu'on a en vue la démonstration du théorème d'équivalence, le corollaire de la proposition 25 indique comment l'on doit définir la

multiplication μ dans S . La définition utilise, comme élément accessoire, un repère $\varphi = (\Delta_1, \Delta_2)$ de E .

Soient A l'origine de φ , et u la jauge de S .

Définition 1. — Pour deux scalaires a et b de S , le produit ab est l'ordonnée (dans φ) du point d'abscisse b aligné avec A et le point (u, a) .

Pour montrer que la multiplication $(a, b) \rightarrow ab$ ne dépend pas du repère accessoire φ , il suffit d'appliquer le corollaire de la proposition 9 (concernant l'isométrie transformant un repère φ en un autre repère φ').

2. Premières propriétés de cette multiplication.

2. 1. *Règle d'intégrité* : la définition 1 entraîne immédiatement :

$$ab = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

2. 2. *Règle des signes* :

$$\begin{cases} (-a)b = -(ab) & (\text{par symétrie autour du support de } \Delta_1), \\ a(-b) = -(ab) & (\text{par transposition de centre } A), \\ (-a)(-b) = ab & (\text{conséquence des deux précédentes}). \end{cases}$$

2. 3. La jauge u est *élément neutre*.

$$\begin{cases} au = a & (\text{conséquence immédiate de la définition 1}), \\ ua = a & (\text{par symétrie autour de la bissectrice de } \Delta_1 \text{ et } \Delta_2). \end{cases}$$

2. 4. Tout scalaire $a \neq 0$ admet un *inverse* et un seul.

Pour $a \neq 0$, il existe un seul scalaire a' tel que les points (u, a) et (a', u) soient alignés avec A , autrement dit tel que $aa' = u$ (produit effectué dans le repère accessoire φ). En effectuant le produit $a'a$ dans le repère $\varphi' = (\Delta_2, \Delta_1)$, on obtient $a'a = u$. D'où l'unique scalaire $a^{-1} = a'$.

2. 5. *Compatibilité avec l'ordre* sur S .

Soit $P(x, y)$ un point variable sur une droite orientée Δ sécante en A à Δ_1 et Δ_2 . Le corollaire 2 de la proposition 3 entraîne que l'application $x \rightarrow y$ est strictement monotone.

En particulier, si Δ passe par un point (u, a) tel que $a > 0$, l'application $x \rightarrow y$ est strictement croissante puisque $0 \rightarrow 0$ et $u \rightarrow a$ (avec $u > 0$). Comme Δ passe par tous les points (b, ab) , il en résulte bien :

$$a > 0 \text{ et } b > 0 \Rightarrow ab > 0$$

2. 6. *Distributivité à droite* : $a(b + c) = ab + ac$.

Tout d'abord la formule $a(2d) = 2ad$ résulte du lemme de Thalès (corollaire 1 de la proposition 11). Comme S est un groupe dyadique, on peut trouver d tel que $2d = b + c$, et le lemme de Thalès entraîne encore $2ad = ab + ac$.

Finalement : $a(b + c) = a(2d) = 2ad = ab + ac$.

3. Equation d'une droite.

a) Etant donné le repère $\varphi = (\Delta_1, \Delta_2)$, considérons une droite D sécante à Δ_2 : il existe alors un couple de scalaires (a, b) et un seul tel que D passe par les points $(0, b)$ et $(u, a + b)$. On dit que a est la *pente* de D dans φ , et que b est l'*ordonnée initiale* de D .

La droite D' passant par l'origine A de φ , et telle que $D \parallel D'$, est l'ensemble des points (x, y) de E tels que $y = ax$ (conséquence immédiate de la définition 1). De la proposition 18 sur les parallélogrammes, il résulte alors que la droite D est l'ensemble des points (x, y) de E tels que $y = ax + b$ (*équation* de la droite D dans le repère φ). La fonction $f(x) = ax + b$ est la *fonction linéaire* de *coefficient* a et de *valeur initiale* b .

b) Soient D et D' deux droites sécantes à Δ_2 , de pentes respectives a et a' dans le repère $\varphi = (\Delta_1, \Delta_2)$.

Condition de parallélisme : $D \parallel D' \iff a = a'$.

Condition de perpendicularité : $D \perp D' \iff a^{-1} = -a'$.

Pour démontrer la condition de perpendicularité, il suffit (d'après la condition de parallélisme et le corollaire 2 de la proposition 10) de considérer le cas où D et D' passent par l'origine A du repère φ . Désignons par ψ la rotation normale $(x, y) \rightarrow (-y, x)$ associée au repère φ (proposition 7). D'après la proposition 8, lorsque D et D' passent par A , les trois relations $D \perp D'$, $D' = \psi(D)$, $D = \psi(D')$ sont équivalentes. Or, $D' = \psi(D)$, par exemple, s'exprime par l'alignement des points A , (u, a') , $(-a, u)$, ou encore par $a'(-a) = (-a')a = u$. Finalement :

$$D \perp D' \iff (-a')a = a(-a') = u,$$

$$\text{ou } D \perp D' \iff a^{-1} = -a'.$$

4. Règle de proportion.

a) Notons G l'ensemble des scalaires $x \in S$ tels que $x \neq 0$. D'après la règle d'intégrité, la multiplication xy peut se restreindre en une opération interne partout définie dans G . Les propriétés 2.3 et 2.4 expriment alors que G est un *quasi-groupe* pour cette opération.

b) Etant donné quatre scalaires a, b, c, d de G tels que $ab = cd$ et un repère $\varphi = (\Delta_1, \Delta_2)$ de E , considérons les trois points $I(-b, 0)$, $J(-d, 0)$, $H(0, ab)$ et les quatre droites D_1, D_2, D'_1, D'_2 d'équations respectives dans φ :

$$y = a(x + b), \quad y = c(x + d), \quad y = -a^{-1}(x + d), \quad y = -c^{-1}(x + b)$$

(fonctions linéaires compte tenu de la distributivité à droite). La droite D_1 passe par I et H , la droite D_2 passe par J et H . La droite D'_1 passe par J , et $D_1 \perp D'_1$ (condition de perpendicularité sur les pentes a et $-a^{-1}$). La droite D'_2 passe par I , et $D_2 \perp D'_2$. Ainsi les trois hauteurs du triangle $\{I, J, H\}$ sont D'_1, D'_2 et le support de Δ_2 (d'équation $x = 0$).

La proposition 19 sur la concourance des hauteurs d'un triangle revient à dire que D'_1 et D'_2 ont même ordonnée initiale. Autrement dit,

de l'hypothèse $ab = cd$, il résulte $a^{-1}d = c^{-1}b$ ou $\frac{b}{c} = \frac{d}{a}$.

Ainsi le théorème de l'*orthocentre* (point commun des trois hauteurs) apparaît comme une traduction géométrique de la règle algébrique des proportions.

5. Structure de corps ordonné sur S .

L'ensemble S était initialement muni d'une structure (α, ω, u) de groupe totalement ordonné et jaugé. La multiplication μ d'unité u introduite par la définition 1 permet de munir S d'une structure (α, μ, ω) de corps ordonné.

a) La multiplication xy est associative, commutative et doublement distributive par rapport à l'addition $x + y$.

L'associativité $x(yz) = (xy)z$ et la commutativité $xy = yx$ sont évidentes dès que l'un des scalaires x, y, z est nul. Lorsque x, y, z sont non nuls, elles résultent du lemme des proportions sur le quasi-groupe G .

La distributivité à gauche $(y + z)x = yx + zx$ résulte de la distributivité à droite et de la commutativité.

b) La multiplication xy admet u comme élément neutre, et tout scalaire $x \neq 0$ est inversible. Enfin, la multiplication est compatible avec l'ordre sur S .

Remarque. — Lorsque S est l'ensemble R des nombres réels, muni de sa structure usuelle (α, ω) de groupe additif ordonné, on sait qu'il existe une seule multiplication ν d'unité $u = 1$ et telle que (α, ν, ω) soit une structure de corps ordonné sur R . Par conséquent, si E est un plan métrique euclidien relativement au groupe additif ordonné R (jaugé par $u = 1$), la multiplication μ précédemment introduite par voie géométrique se confond avec la multiplication usuelle ν .

IV. EXISTENCE DES ÉLÉMENTS TYPIQUES $\mu, \mathcal{C}, h, n, p$.

Soit $\sigma = (\alpha, \omega, u, \delta)$ une structure de plan métrique euclidien sur E , relativement à une structure (α, ω, u) de groupe totalement ordonné et jaugé sur S .

1. Nous venons de constater l'existence d'une multiplication μ des scalaires dans S telle que la structure (α, μ, ω) vérifie l'axiome (K) des corps ordonnés.

2. Conformément à la proposition 26, le groupe $\mathcal{C}$ des translations de E peut se définir sans aucun élément accessoire :

Définition 2. — On adopte, comme groupe typique $\mathcal{C}$, le groupe des glissements du plan métrique euclidien E .

Les propositions 15 et 20 montrent alors que $\mathcal{C}$ vérifie la partie de l'axiome (A₂) des plans affines relative au seul ensemble des translations :

a) $\mathcal{C}$ est un groupe commutatif de transformations de E .

b) Pour tout couple (P, Q) de points de E , il existe une transformation $\varphi \in \mathcal{C}$ et une seule telle que $Q = \varphi(P)$.

Confondant dès à présent glissements et translations, nous noterons indifféremment $\varphi + \psi$ ou $\psi \circ \varphi$ la composition de ces transformations.

3. Avant d'introduire la multiplication affine h , la norme n et le produit scalaire p , établissons le *lemme des projections*.

Soient Δ et Δ_1 deux droites orientées non perpendiculaires, sécantes en A .

Lemme des projections. — Il existe un scalaire c tel que, pour tout point P de Δ se projetant en P_1 sur Δ_1 , on ait : $(\overline{AP}) = c(\overline{AP_1})$.

Introduisons un repère $\varphi = (\Delta_1, \Delta_2)$ et désignons par D la bissectrice des droites orientées Δ et Δ_2 (sécantes en A). Soient a et b les pentes respectives de Δ et de D dans le repère φ .

La perpendiculaire D' à D passant par le point P de Δ coupe Δ_2 en P' tel que $\overline{AP'} = \overline{AP}$ (puisque la symétrie $[D]$ transforme Δ en Δ_2). D'après la condition de perpendicularité sur les pentes de D et de D' , l'équation de D' dans φ est : $y = -b^{-1}x + \overline{AP'}$. Il en résulte $\overline{AP} = y + b^{-1}x$ pour tout point (x, y) de D' , en particulier pour le point P de coordonnées $x = \overline{AP_1}$, $y = ax$. D'où $\overline{AP} = (a + b^{-1})(\overline{AP_1})$, et le scalaire $c = a + b^{-1}$ ne dépend pas du choix de P sur Δ .

Corollaire. — Soient

- { P_1 la projection (sur Δ_1) d'un point P de Δ
- { Q la projection (sur Δ) d'un point Q_1 de Δ_1 .

Quels que soient P et Q_1 , on a : $(\overline{AP})(\overline{AQ}) = (\overline{AP_1})(\overline{AQ_1})$. (Il suffit de considérer la symétrie échangeant Δ et Δ_1 , puis d'appliquer le lemme des projections aux points P, P_1 et aux symétriques de Q_1, Q).

4. La multiplication affine h , la norme n et le produit scalaire p se définissent (conformément à la proposition 27) au moyen d'un point

accessoire A et d'une droite orientée accessoire Δ . Etant donné un glissement φ , on impose seulement à Δ de passer par les points A et $B = \varphi(A)$.

Définition 3. — Pour tout scalaire x , soit C le point de Δ tel que $\overline{(AC)} = x\overline{(AB)}$. Le produit affine $\psi = x\varphi$ est le glissement ψ tel que $c = \psi(A)$.

Définition 4. — La norme de φ est $\|\varphi\| = |\overline{AB}|$.

Définition 5. — Pour tout glissement ψ , soit C' la projection sur Δ du point $\psi(A)$. Le produit scalaire de φ par ψ est : $\varphi \cdot \psi = \overline{(AB)} \overline{(AC')}$.

a) Lorsque $\varphi = 0$ (glissement nul dans la notation additive du groupe $\mathcal{C}$), on obtient $x\varphi = 0$ (glissement nul) et $\|\varphi\| = \varphi \cdot \psi = 0$ (scalaire nul), d'où le caractère accessoire de A et de Δ .

Lorsque $\varphi \neq 0$ (glissement strict), le support D de Δ est bien déterminé pour A fixé, mais Δ peut être l'une ou l'autre des deux droites orientées opposées de support D. Le caractère accessoire de Δ vient des règles : $x(-a) = -(ax)$, $| -a | = |a|$, $(-a)(-b) = ab$.

Pour montrer le caractère accessoire du point A, il suffit de considérer le glissement θ transformant A en un autre point A' (et la droite orientée Δ en une droite orientée Δ'), puis d'appliquer le corollaire 1 de la proposition 17 (sur les parallélogrammes) et une remarque du § 1 (en I, 4 : transmuée d'une projection par une isométrie).

b) Considérons un repère $\varrho = (\Delta_1, \Delta_2)$ d'origine A : les droites orientées Δ_1 et Δ_2 passent respectivement par les points $A_1(u, 0)$ et $A_2(0, u)$.

Un point $P(x, y)$ variable dans E se projette en $P_1(x, 0)$ sur Δ_1 et en $P_2(0, y)$ sur Δ_2 . Nous savons que les relations : « φ est le glissement transformant A en P » et « (x, y) sont les coordonnées de P dans ϱ », définissent une application biunivoque $\varphi \rightarrow (x, y)$ de $\mathcal{C}$ sur $S \times S$. D'après la proposition 21, cette application est un isomorphisme du groupe $\mathcal{C}$ des glissements sur le groupe produit $S \times S$: si $\varphi \rightarrow (x, y)$ et $\varphi' \rightarrow (x', y')$, alors $\varphi + \varphi' = \varphi' \circ \varphi \rightarrow (x + x', y + y')$.

Etant donné deux glissements φ, ψ et un scalaire a tels que $\psi = a\varphi$, il existe une droite orientée Δ passant par les points A, $P = \varphi(A)$, $Q = \psi(A)$, de sorte que $\overline{(AQ)} = a\overline{(AP)}$, d'après la définition 2.

Lemme d'affinité. — Si $\varphi \rightarrow (x, y)$, alors $\psi = a\varphi \rightarrow (ax, ay)$.

C'est immédiat lorsque Δ a même support que Δ_1 ou Δ_2 . Si $\varphi \rightarrow (x', y')$ lorsque Δ est sécante à Δ_1 et Δ_2 , il existe (d'après le lemme des projections) deux scalaires c_1 et c_2 non nuls tels que $\overline{AP} = c_1x = c_2y$ et $\overline{AQ} = c_1x' = c_2y'$. Dès lors, de $\overline{(AQ)} = a\overline{(AP)}$, résulte bien :

$$x' = ax \text{ et } y' = ay.$$

Corollaire. — La multiplication affine $a\varphi$ vérifie les identités :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(b\varphi) = (ab)\varphi \quad (\text{associativité}), \\ u\varphi = \varphi \quad (\text{scalaire neutre } u), \\ \left. \begin{array}{l} (a + b)\varphi = a\varphi + b\varphi \\ a(\varphi + \varphi') = a\varphi + a\varphi' \end{array} \right\} \quad (\text{double distributivité}). \end{array} \right.$$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{C}$, muni de l'opération interne $\varphi + \varphi'$ (composition des glissements) et de l'opération externe $a\varphi$ (multiplication affine), est un espace vectoriel relativement au corps S.

Comme les points A, A_1 , A_2 ne sont pas alignés, les glissements φ_1 et φ_2 tels que $A_1 = \varphi_1(A)$ et $A_2 = \varphi_2(A)$ sont des vecteurs indépendants dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}$. Tout glissement φ tel que $\varphi \rightarrow (x, y)$ prend la forme d'une combinaison $\varphi = x\varphi_1 + y\varphi_2$: il en résulte $\dim \mathcal{C} = 2$.

Finalement, l'ensemble E est muni d'une structure $(\alpha, \mu, \mathcal{C}, h)$ qui vérifie l'axiome (A_2) des plans affines, relativement à la structure (α, μ) de corps sur S .

c) D'après les définitions 4 et 5, la norme n et le produit scalaire p vérifient immédiatement les propriétés :

$$\begin{cases} \varphi \cdot \varphi = \|\varphi\|^2, \\ \varphi \neq 0 \Rightarrow \|\varphi\| > 0. \end{cases}$$

L'identité $\varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi$ résulte du corollaire du lemme des projections.

Si $\varphi \rightarrow (x, 0)$ et $\varphi' \rightarrow (x', y')$ dans un repère $\rho = (\Delta_1, \Delta_2)$, la définition 5 s'exprime par $\varphi \cdot \varphi' = xx'$. Il en résulte les identités :

$$\varphi \cdot (\psi + \psi') = \varphi \cdot \psi + \varphi \cdot \psi' \text{ et } \varphi \cdot (a\psi) = a(\varphi \cdot \psi).$$

Ainsi, l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ (muni de la norme n et du produit scalaire p) vérifie l'axiome (N) des espaces vectoriels normés.

5. L'ensemble E était muni initialement d'une structure $\sigma = (\alpha, \omega, \mu, \delta)$ de plan métrique euclidien, relativement à une structure (α, ω, μ) de groupe totalement ordonné et jaugé sur S . Nous venons de constater l'existence d'une structure $\Sigma = (\alpha, \mu, \omega, \mathcal{C}, h, n, p)$ de plan affine normé sur E , relativement à une structure (α, μ, ω) de corps ordonné sur S . Et cette structure Σ a été définie de manière à admettre σ comme structure métrique sous-jacente, ce qui achève la démonstration du **théorème d'équivalence**.

On sait que ce théorème d'équivalence constitue une circonstance très favorable pour l'Enseignement élémentaire de la Géométrie plane.

La structure de plan métrique euclidien est une structure apparemment faible et ne nécessite que trois termes typiques : addition α et ordre ω dans l'ensemble S des scalaires, distance δ dans le plan E (le choix d'une jauge $u > 0$ dans S étant tout à fait arbitraire). Il est facile de rattacher cette structure à l'expérience concrète au moyen des instruments fondamentaux : feuille à dessin (susceptible de pliages), règle graduée, compas à pointes sèches (ou transporteur de distance).

Cependant, cette structure apparemment faible est, en fait, aussi forte que la structure de plan affine normé : celle-ci comporte sept termes typiques soumis à de nombreuses règles opératoires. La structure de plan affine normé représente pour la Géométrie une « voie royale » qu'il faut s'efforcer d'atteindre assez vite. Mais il est heureux (et conforme au caractère progressif de notre Enseignement) que cela puisse se faire en partant d'une structure équivalente plus simple.

C. FRASNAY, juin 1961.

RÉFÉRENCES

Les notions générales de « structure » et d' « équivalence de structures » sont celles de N. Bourbaki (Théorie des Ensembles, Chapitre IV).

La structure de plan métrique euclidien (à quelques nuances près de terminologie dues à la particularisation de l'ensemble des scalaires ou à la considération de l'axiome du compas) a été dégagée et développée dans les articles suivants :

- G. CHOQUET, Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire, Chapitre V de « L'Enseignement des Mathématiques », Delachaux et Niestlé (1955).
- C. FRASNAY, Un développement de la géométrie plane élémentaire (des axiomes à la mesure des angles et au produit segmentaire), revue *Alger-Mathématiques* (déc. 1959).
- G. CHOQUET, Une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire, *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques* (n° 209-213, 1960).

Les corps ordonnés pythagoriciens (dans leur application à l'axiomatique de la géométrie et aux critères de constructibilité) font l'objet d'une étude élémentaire dans l'article :

- C. FRASNAY, Sur les corps ordonnés intéressant la géométrie plane, revue *Alger-Mathématiques* (1962).

NOUVEAUTÉ

VIENT DE PARAÎTRE :

COURS D'ANALYSE

POUR LE

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES I

par

Roger DESCOMBES

Professeur à la Faculté des sciences de Lille



Volume 16 X 25 cm, de VIII-344 pages, relié toile 40 NF



Ce livre expose le cours du certificat de Mathématiques I, créé en l'année 1958-1959, Cours professé par l'auteur à la Faculté des sciences de Lille. Ce n'est donc pas un traité abondant les diverses parties de l'analyse, ni un ouvrage pour spécialiste, mais bien un cours rédigé pour être utile aux étudiants.

L'auteur n'a supposé connu du lecteur que les rudiments d'algèbre et d'analyse traditionnellement enseignés en Propédeutique : en partant donc d'un niveau élémentaire et en suivant une pente faible il souhaite le conduire au seuil d'ouvrages spécialisés et de travaux récents en analyse fonctionnelle et en théorie de l'intégration.

SOMMAIRE

CHAPITRE PREMIER : **Préliminaires.** — Ensembles, applications, relations. Nombres cardinaux. Structures algébriques. — CHAPITRE II : **Vocabulaire de topologie.** — Topologie d'un espace métrique. Limites. Ensembles compacts. Ensembles complets. — CHAPITRE III : **Fonctions continues.** — Continuité. Continuité uniforme. Familles de fonctions continues. — CHAPITRE IV : **Espaces vectoriels normés.** — Topologie associée à une norme. Applications linéaires. Produit scalaire. — CHAPITRE V : **Séries et produits infinis.** — Séries. Convergence commutative. Produits infinis. — CHAPITRE VI : **Fonctions numériques. Fonctions d'une variable réelle.** — Fonctions numériques continues. Fonctions semi-continues. Fonction d'une variable réelle, théorème de décomposition. — CHAPITRE VII : **Intégration des fonctions continues.** — Mesures sur un pavé compact de $\mathbb{R}^k$. Intégrales de Cauchy sur un intervalle compact. Intégrales de Cauchy sur un intervalle non compact. Intégrales de Cauchy vectorielles. — CHAPITRE VIII : **Fonctions intégrables.** — Intégration sur $\mathbb{R}^k$. Intégration sur un pavé de $\mathbb{R}^k$. Fonctions et ensembles négligeables. Convergence presque partout et convergence en moyenne. — CHAPITRE IX : **Fonctions et ensembles mesurables.** — Fonctions mesurables. Ensembles mesurables. Le théorème de Fubini. — CHAPITRE X : **Dérivation et intégration.** — Dérivation des fonctions numériques d'une variable réelle. Intégrales définies. Techniques de calcul des intégrales de Lebesgue. — CHAPITRE XI : **Espaces L^1 , L^2 et L^∞ .** — Topologies de L^1 , L^2 , L^∞ . Formes linéaires continues sur L^1 . Espaces L^1 , L^2 et L^∞ . — CHAPITRE XII : **Représentations d'espaces fonctionnels.** — Généralités sur les développements de Fourier. Représentations de l'espace $L^2(a, b)$. — CHAPITRE XIII : **Convergence locale des séries de Fourier.** — Techniques de calcul des séries de Fourier. Convergence locale des séries de Fourier de certaines classes de fonctions. Séries trigonométriques et séries de Fourier. — BIBLIOGRAPHIE. — INDEX.

VUIBERT 63, bd SAINT-GERMAIN, 63, PARIS-V.

A l'impression :

LE COURS DE L'A.P.M.

1. Groupes, anneaux, corps

par André et Germaine REVUZ

Un volume de 176 pages (format du *Bulletin*) sur papier couché,
couverture « surfin chamois »

*
**

Ce volume contient la rédaction complète des conférences faites en 1960-61 par notre Président André REVUZ. Ces exposés ont été rédigés et complétés de la solution détaillée des nombreux exercices par Mme Germaine REVUZ.

Spécialement conçues pour les professeurs, ces conférences ont eu et continuent d'avoir le plus grand succès. L'édition en volume mettra à la disposition de tous les Collègues, qu'ils aient déjà suivi les conférences ou qu'ils n'aient pu le faire, un outil de travail unique en son genre. Cours de mathématiques pour « grands commençants », comme dit aimablement son auteur, cet ouvrage est conçu pour aider chacun de nous à enrichir sa culture mathématique et renouveler son enseignement.

*
**

L'édition du volume est prévue pour le printemps 1962. Il sera alors mis en vente au prix de 20 NF (pour les membres de l'A.P.M., 15 NF).

Tous les Collègues ont avantage à souscrire :

- vous bénéficierez d'un tarif réduit : 10 NF ;
- vous aiderez le Bureau de l'A.P.M. dans son travail d'édition ;
- vous soulagerez la Trésorerie de l'A.P.M.

SOUSCRIVEZ : c'est votre devoir.

FAITES SOUSCRIRE VOS COLLÈGUES : c'est votre avantage.

Souscrivez sans attendre : prolongation des délais de souscription au 30 juillet 1962. Virement au c.c.p. de l'A.P.M. en précisant : Souscription Cours A.P.M. 1.

ESPACE PONCTUEL ASSOCIE A UN MODULE GEOMETRIE AFFINE DANS CET ESPACE

par R. MULLER (Lycée de Gérardmer)

Buts de cet exposé * : — donner des exemples de géométries affines indépendants de toute axiomatique autre que celle qui a servi à construire $\mathbb{N}$, base de construction de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{R}$; — faire pressentir que c'est la structure de corps de l'ensemble des opérateurs qui est à la base de la notion de *dimension* dans les espaces vectoriels.

Rappel. Définition d'un module. Etant donné un anneau A , on appelle module sur A , un ensemble E muni : — d'une loi de groupe commutatif (notée additivement) ; — d'une loi de composition externe dont le domaine d'opérateurs est l'anneau A et qui satisfait aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in A \quad & \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y} \\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad & (\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x} \\ & \alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}. \end{aligned}$$

Remarque : Pour éviter toute confusion entre les éléments de E et ceux de A , l'élément x de E est noté $\vec{x}$.

Exercice : $\forall \alpha \in A, \forall \vec{x} \in E$, montrer que : $\alpha \vec{0} = \vec{0}$ et que $0\vec{x} = \vec{0}$.

On dit que le A -module E est unitaire si l'anneau A possède un élément unité noté 1 qui soit élément neutre pour la loi externe, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in A : \quad & \alpha \times 1 = 1 \times \alpha = \alpha \\ \forall \vec{x} \in E : \quad & 1\vec{x} = \vec{x}. \end{aligned}$$

Définition d'un espace vectoriel : si A est un corps K et si le K -module E est unitaire, celui-ci prend le nom d'espace vectoriel E sur le corps K .

Espace ponctuel associé à un module ou à un espace vectoriel E : ensemble ponctuel, noté $\mathcal{C}$, en correspondance biunivoque avec E .

Remarque : $\mathcal{C}$ ne dépend pas de l'anneau A ; c'est-à-dire que si un ensemble E est simultanément module sur un anneau A et sur un autre anneau A' , il ne lui sera associé qu'un seul espace ponctuel.

On définit l'application bijective $f: \mathcal{C} \rightarrow E$. Si $M \in \mathcal{C}$, $f(M) = \vec{x} \in E$; on parlera de l'image d'un point par f , qui est un vecteur, ou de l'image réciproque d'un vecteur, qui est un point.

Si nous introduisons le point O dans $\mathcal{C}$ tel que $f(O) = \vec{0}$, on vérifie que l'application $g: \{O\} \times \mathcal{C} \rightarrow E$ telle que $g(O, M) = f(M)$ est bijective.

Soit alors l'application $h: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow E$ définie par $(A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$,
 $h(A, B) = g(O, B) - g(O, A) = f(B) - f(A)$,

on pourra montrer : — que g est la restriction de h à $\{O\} \times \mathcal{C}$; — que $h(A, A) = \vec{0}$,
 $h(A, B) = -h(B, A)$ et que $h(A, B) = \vec{0} \iff A = B$.

La relation binaire entre deux éléments de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ définie par :

$$(A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}, (C, D) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} : h(A, B) = h(C, D)$$

(*) Régionale de Nancy, réunion du 7 décembre 1961.

est une relation d'équivalence dans $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ appelée *équipollence de deux couples de points*. Par convention, on écrit :

$h(A, B) = \overrightarrow{AB}$. Alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff (A, B) \sim (C, D)$ modulo l'équipollence. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des éléments de E , donc des éléments algébriques ; (A, B) et (C, D) sont des éléments de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, c'est-à-dire des éléments géométriques.

Dans tout espace ponctuel associé à un module, on a donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Cette relation se généralise : C étant un point quelconque,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}.$$

Géométrie affine dans un espace ponctuel.

Possédant l'espace ponctuel associé à E , on va créer dans E une *géométrie* qui dépendra essentiellement de l'anneau A ; c'est-à-dire que les A -module E et A' -module E ont même espace ponctuel associé mais y engendrent des géométries différentes.

Définition d'une droite : A étant donné dans $\mathcal{C}$ et $\vec{x} \neq \vec{0}$ donné dans E , la droite D est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{x}$ lorsque λ décrit A .

Exercice : soit la droite AB dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$; quelle est la droite AB dans le module $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{Z}$?

Soit l'application $\varphi : A \rightarrow \text{droite } D$, c'est-à-dire $\varphi : \lambda \in A \rightarrow M \in D$ avec $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{x}$. Cette application est-elle bijective ?

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{x} = \lambda' \vec{x} \Rightarrow (\lambda - \lambda') \vec{x} = \vec{0}. \text{ Si l'anneau } A \text{ est un corps } K :$$

$$(\lambda - \lambda') \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \lambda'.$$

Donc, si A est un corps K , toutes les droites sont en correspondance biunivoque puisque en correspondance biunivoque avec K . Si K est fini, toutes les droites ont le même nombre fini de points. Il n'en est pas de même, en général, si l'anneau A n'est pas un corps.

Exercice : définition d'un plan P ; montrer qu'il existe une application de $A \times A$ sur P qui est bijective si A est un corps ; qu'en résulte-t-il pour tous les plans de $\mathcal{C}$ dans ce cas ?

Génération de modules sur $\mathbb{Z}$.

Soit G un ensemble muni d'une structure de groupe commutatif. On considère G^n ($n \in \mathbb{N}$) tel que :

$$1^\circ \alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha', \beta', \gamma', \dots \in G ; (\alpha, \beta, \gamma, \dots), (\alpha', \beta', \gamma', \dots) \in G^n, \text{ on pose :} \\ (\alpha, \beta, \gamma, \dots) + (\alpha', \beta', \gamma', \dots) = (\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \dots).$$

On vérifiera que cette loi de composition interne définit une structure de groupe commutatif sur G^n .

$$2^\circ G^n \text{ est doté d'une loi de composition externe définie ainsi qu'il suit :}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \dots) \in G^n, a \in \mathbb{Z}^+. \\ a(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = (\alpha, \beta, \gamma, \dots) + (\alpha, \beta, \gamma, \dots) + \dots [a \text{ termes}]$$

et pour $a \in \mathbb{Z}^-$:

$$a(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = -(\alpha, \beta, \gamma, \dots) - (\alpha, \beta, \gamma, \dots) - \dots [-a \text{ termes}].$$

On vérifie alors que G^n a la structure d'un module sur $\mathbb{Z}$, module unitaire et commutatif. On va utiliser comme groupe G (qui nous donnera le $\mathbb{Z}$ -module G^n) le groupe $\mathbb{R}/p\mathbb{Z}$, avec p donné dans $\mathbb{R}$.

Rappelons donc la construction du groupe $\mathbb{R}/p\mathbb{Z}$: p étant donné dans $\mathbb{R}$, on définit dans $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$:

$$a, b \in \mathbb{R} : a \mathcal{R} b \iff a - b = kp \ (k \in \mathbb{Z}).$$

On vérifie que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ; elle détermine donc une partition sur $\mathbf{R}$; l'ensemble des classes d'équivalence constitue l'espace quotient $\mathbf{R}/p\mathbf{Z}$.

Il existe une application canonique φ de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}/p\mathbf{Z}$. Désignons par $\dot{a}$, $\dot{b}$ les éléments de $\mathbf{R}/p\mathbf{Z}$.

On munit $\mathbf{R}/p\mathbf{Z}$ d'une loi de composition interne : si $\dot{a} = \varphi(a)$ et $\dot{b} = \varphi(b)$, on fait correspondre à $(\dot{a}, \dot{b})$ l'élément $\varphi(a + b)$. Cet élément est-il unique ? Ne dépend-il pas du choix de a tel que $\varphi(a) = \dot{a}$ et du choix de b tel que $\varphi(b) = \dot{b}$? Non, comme on le vérifie immédiatement :

$$\begin{cases} a \sim a' \pmod{\mathcal{R}} \\ b \sim b' \pmod{\mathcal{R}} \end{cases} \Rightarrow a + b \sim a' + b' \pmod{\mathcal{R}}.$$

On écrit donc $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a + b)$.

Cette loi de composition munit $\mathbf{R}/p\mathbf{Z}$ d'une structure de groupe commutatif. Montrons par exemple l'associativité :

$\dot{a}, \dot{b}, \dot{c} \in \mathbf{R}/p\mathbf{Z} \Rightarrow \exists a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que :

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \dot{a} ; \varphi(b) = \dot{b} ; \varphi(c) = \dot{c}, \\ \dot{a} + \dot{b} &= \varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a + b), \\ (\dot{a} + \dot{b}) + \dot{c} &= \varphi(a + b) + \varphi(c) = \varphi(a + b + c) = \varphi[a + (b + c)], \\ &= \varphi(a) + \varphi(b + c) = \varphi(a) + [\varphi(b) + \varphi(c)], \\ &= \dot{a} + (\dot{b} + \dot{c}). \end{aligned}$$

Exercice : montrer qu'on ne peut pas munir $\mathbf{R}/p\mathbf{Z}$ d'une seconde loi de composition interne qui serait notée multiplicativement par $\varphi(a) \times \varphi(b) = \varphi(ab)$; montrer pour cela que $a \sim a' \pmod{\mathcal{R}}$ et $b \sim b' \pmod{\mathcal{R}}$ n'implique pas $ab \sim a'b' \pmod{\mathcal{R}}$.

En conclusion $(\mathbf{R}/p\mathbf{Z})^n$ est un $\mathbf{Z}$ -module.

Remarque : on montre facilement que tous les $\mathbf{R}/p\mathbf{Z}$ modules en $\mathbf{Z}$ sont isomorphes, c'est-à-dire qu'il existe une application bijective $f : (\mathbf{R}/p\mathbf{Z}) \rightarrow (\mathbf{R}/p'\mathbf{Z})$ où $p \neq p'$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} f(\dot{a} + \dot{b}) &= f(\dot{a}) + f(\dot{b}) \text{ et } f(\lambda \dot{a}) = \lambda f(\dot{a}), \\ \text{avec } \dot{a}, \dot{b} &\in \mathbf{R}/p\mathbf{Z} \text{ et } \lambda \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Il en résulte que tous les $\mathbf{Z}$ -modules $(\mathbf{R}/p\mathbf{Z})^n$ sont isomorphes pour un n donné (dans $\mathbf{N}$) et p quelconque (dans $\mathbf{R}$).

Espace ponctuel associé à $(\mathbf{R}/p\mathbf{Z})^n$.

On utilise l'espace ponctuel associé à $\mathbf{R}^n$ et on identifie les points de $\mathbf{R}^n$ qui sont images de $(a + kp, b + k'p, \dots)$, $a, b \dots$ étant donnés dans $\mathbf{R}$, $k, k', \dots$ décrivant $\mathbf{Z}$. Les géométries de ces espaces seront des géométries en utilisant l'anneau $\mathbf{Z}$.

Premier exemple : $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. L'espace associé à $\mathbf{R}$ est la droite numérique. Si on confond les points qui sont images de $a + k \cdot 2\pi$ (k décrivant $\mathbf{Z}$), on obtient le cercle. On vérifie qu'il existe bien une correspondance biunivoque entre les éléments de $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ et les points du cercle, condition nécessaire et suffisante pour que celui-ci soit l'espace ponctuel associé.

Construisons une géométrie sur cet espace en utilisant la structure de $\mathbf{Z}$ -module. On obtient la géométrie des arcs orientés qui n'est rien d'autre que la géométrie affine du $\mathbf{Z}$ -module $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

Exercice : soit deux points A, B du cercle ; que représente la droite AB ? Trouvez une condition pour qu'elle possède un nombre fini de points ; ce nombre est variable.

Remarques : écrire $\widehat{AB} + \widehat{CD} = \widehat{EF} + k \cdot 2\pi$, c'est faire de la géométrie dans le $\mathbf{Z}$ -module $\mathbf{R}$; écrire $\widehat{AB} + \widehat{CD} \sim \widehat{EF} \pmod{2\pi}$, c'est encore faire de la géomé-

trie dans le $\mathbf{Z}$ - module $\mathbf{R}$ muni d'une relation d'équivalence. Mais écrire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, c'est faire de la géométrie affine dans le $\mathbf{Z}$ - module $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

La relation $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$, dite de Chasles, n'est donc rien d'autre que la relation fondamentale dans l'espace ponctuel associé à ce $\mathbf{Z}$ - module.

Second exemple : $(\mathbf{R}/p\mathbf{Z})^2$. On utilise l'espace ponctuel associé à $\mathbf{R}^2$. Si on confond les points qui sont images de $(a + kp, b + k'p)$, on obtient un tore.

Exercice : soient la droite AB dans la géométrie affine du $\mathbf{Z}$ - module $(\mathbf{R}/p\mathbf{Z})^2$ avec A image de $(\dot{0}, \dot{0})$ et B image de $(\dot{a}, \dot{b})$. Montrer que si $\dot{a}, \dot{b}$ sont rationnels, la droite AB a un nombre fini de points ; trouver le nombre des « enroulements » et le nombre des « tours ».

Autre génération de modules.

Etant donné l'anneau $\mathbf{A}$, considérons l'ensemble $\mathbf{A}^n$ avec $n \in \mathbf{N}$. En raison de la structure de groupe de $\mathbf{A}$, on peut définir $\mathbf{A}^n$ comme un module sur $\mathbf{Z}$. Mais on peut aussi définir dans $\mathbf{A}^n$ une loi de composition externe ayant l'anneau $\mathbf{A}$ pour domaine d'opérateurs :

$$\lambda, \alpha, \beta, \gamma, \dots \in \mathbf{A}, \quad \vec{x} = (\alpha, \beta, \gamma, \dots) \in \mathbf{A}^n,$$

$$\lambda \vec{x} = \lambda (\alpha, \beta, \gamma, \dots) = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma, \dots).$$

On vérifie alors que $\mathbf{A}^n$ est muni d'une structure de module sur $\mathbf{A}$. Finalement, $\mathbf{A}^n$ est un $\mathbf{Z}$ - module et un $\mathbf{A}$ - module.

Exemple : $\mathbf{Z}/p$ (p donné dans $\mathbf{Z}$).

Dans $\mathbf{Z}$, on définit la relation binaire :

$$a, b, k \in \mathbf{Z} : a \mathcal{R} b \iff a - b = kp.$$

On vérifie que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ; l'ensemble des classes d'équivalence constitue l'espace-quotient $\mathbf{Z}/p$. On note $\varphi : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/p$, $\dot{a} = \varphi(a)$ avec $a \in \mathbf{Z}$.

Exercice : montrer que $\mathbf{Z}/p$ peut être muni de deux lois de composition interne, notées $+$ et $\cdot$, telles que :

$$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a + b),$$

$$\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(a \cdot b).$$

Montrer que ces deux lois déterminent sur $\mathbf{Z}/p$ une structure d'anneau unitaire commutatif.

Cas de p premier : si p est premier, $\mathbf{Z}/p$ est un anneau d'intégrité :

$$\dot{a} \cdot \dot{b} = \dot{0} \Rightarrow \varphi(a) \cdot \varphi(b) = \dot{0} \Rightarrow \varphi(ab) = \dot{0} \Rightarrow ab = kp ;$$

p étant premier divisera, par exemple, a ; donc :

$$a = k'p \text{ et } \varphi(a) = \dot{a} = \dot{0}.$$

En résumé, $\dot{a} \cdot \dot{b} = \dot{0} \Rightarrow \dot{a} = \dot{0}$ ou $\dot{b} = \dot{0}$.

$\dot{a}$ étant donné différent de $\dot{0}$, soit alors l'application $f : \mathbf{Z}/p \rightarrow \mathbf{Z}/p$ définie par $\dot{x} \in \mathbf{Z}/p : f(\dot{x}) = \dot{a} \cdot \dot{x}$. Montrer que l'intégrité de $\mathbf{Z}/p$ entraîne la biunivocité de f . Comme $\mathbf{Z}/p$ est fini, la biunivocité entraîne la surjectivité de f . Donc, il existe $\dot{b} \in \mathbf{Z}/p$ tel que $\dot{b} \cdot \dot{a} = \dot{1}$; $\dot{a}$ possède donc un inverse : $\mathbf{Z}/p$ est un corps.

Exercice : trouver les tables d'addition et de multiplication de $\mathbf{Z}/2$, $\mathbf{Z}/3$, $\mathbf{Z}/5$; $\mathbf{Z}/6$ (dans ce dernier cas, trouver les diviseurs de zéro).

En résumé, d'après ce qui précède, $(\mathbf{Z}/p)^n$ est muni d'une structure de $\mathbf{Z}$ - module ou de $\mathbf{Z}/p$ - module (c'est un espace vectoriel sur $\mathbf{Z}/p$, si p est premier). Le $\mathbf{Z}$ - module $(\mathbf{Z}/p)^n$ et le $\mathbf{Z}/p$ - module $(\mathbf{Z}/p)^n$ sont liés par la relation :

$$\begin{array}{l} a \in \mathbf{Z} \\ \varphi(a) \in \mathbf{Z}/p \\ \vec{x} \in (\mathbf{Z}/p)^n \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{ax} = \varphi(a)\vec{x} \end{array} \right. \quad (I)$$

[démonstration : en revenant aux composantes de $\vec{x}$].

Espace ponctuel associé à $(\mathbb{Z}/p)^n$.

Il est aisé de montrer qu'il existe une application du $\mathbb{Z}$ -module $(\mathbb{Z}/p)^n$ dans le $\mathbb{Z}$ -module $(\mathbb{R}/p\mathbb{Z})^n$ qui soit *biunivoque* et qui soit une application linéaire. On pourra alors identifier $(\mathbb{Z}/p)^n$ avec son image dans $(\mathbb{R}/p\mathbb{Z})^n$, autrement dit considérer $(\mathbb{Z}/p)^n$ comme une partie de $(\mathbb{R}/p\mathbb{Z})^n$ et, par suite, *considérer l'espace ponctuel associé à $(\mathbb{Z}/p)^n$ comme une partie de l'espace ponctuel associé à $(\mathbb{R}/p\mathbb{Z})^n$* ; les géométries du $\mathbb{Z}$ -module $(\mathbb{Z}/p)^n$ et du $\mathbb{Z}/p$ -module $(\mathbb{Z}/p)^n$ sont identiques d'après la relation (I) ci-dessus.

Exemple 1 : l'espace ponctuel associé à $\mathbb{Z}/p$ est une partie de l'espace ponctuel associé à $\mathbb{R}/p\mathbb{Z}$, donc une partie du cercle. Si p est premier, l'espace a p points qui forment une droite.

Exercice. Soit $\mathbb{Z}/4$, espace ponctuel à 4 points. Trouver le nombre de droites de la géométrie du $\mathbb{Z}/4$ module $\mathbb{Z}/4$.

Exemple 2 $(\mathbb{Z}/3)^2$: son espace ponctuel est une partie de $(\mathbb{R}/3\mathbb{Z})^2$; il est constitué de 9 points. La géométrie dans l'espace ponctuel associé à l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/3)^2$ sur le corps $\mathbb{Z}/3$ comprend 12 droites portant chacune trois points, chaque point étant, de plus, le « milieu » des deux autres.

Exercice. Montrer que, dans $(\mathbb{Z}/3)^2$, le barycentre de quatre points existe et est unique. En déduire la géométrie du parallélogramme.

Le barycentre de trois points existe-t-il dans $(\mathbb{Z}/3)^2$? Comment peut-on y définir le parallélisme de deux droites? Quelles transformations géométriques y sont-elles encore définies (translation, homothétie, etc...)?

Dans l'espace ponctuel associé à l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/p)^n$ sur $(\mathbb{Z}/p)$, p premier, trouver : 1) le nombre de droites passant par un point ; 2) le nombre de droites incluses dans un plan ; 3) le nombre de plans passant par une droite.

Le problème de la géométrie métrique.

On a ainsi construit une géométrie affine dans les espaces ponctuels associés à des espaces vectoriels (ou plus généralement à des modules). Un problème se pose naturellement : peut-on y construire une géométrie *métrique*?

Prenons le cas de $(\mathbb{Z}/p)^n$ sur le corps $\mathbb{Z}/p$ (donc p premier). Définir une distance (AB) , c'est définir une *norme* dans $(\mathbb{Z}/p)^n$. La norme est une application $N : (\mathbb{Z}/p)^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\begin{aligned} \vec{x}, \vec{y} \in (\mathbb{Z}/p)^n \quad & N(\vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0} \\ & N(\vec{x} + \vec{y}) \leq N(\vec{x}) + N(\vec{y}) \\ \lambda \in \mathbb{Z}/p \quad & N(\lambda \vec{x}) = |\lambda| N(\vec{x}) \end{aligned}$$

Cela suppose d'abord que $\mathbb{Z}/p$ est un espace *valué*, c'est-à-dire qu'il existe une application $g : \mathbb{Z}/p \rightarrow \mathbb{R}^+$, notée $g(\lambda) = |\lambda|$, telle que :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{Z}/p, \quad & g(\lambda\lambda') = |\lambda\lambda'| = |\lambda| |\lambda'| \\ & |\lambda| = 0 \iff \lambda = 0 \\ & |\lambda + \lambda'| \leq |\lambda| + |\lambda'|. \end{aligned}$$

On sait que, dans $\mathbb{Z}/p$, $\lambda^{p-1} = \hat{1}$ avec $\lambda \neq 0$. Il en résulte $|\lambda|^{p-1} = |\hat{1}|$; or $\lambda \cdot \hat{1} = \lambda$, donc $|\lambda| |\hat{1}| = |\lambda| \Rightarrow |\hat{1}| = 1$, donc :
 $|\lambda| = 1$ si $\lambda \neq 0$, $|\lambda| = 0$ si $\lambda = 0$.

La valeur absolue d'un élément de $\mathbb{Z}/p$ étant définie, on peut trouver une norme dans $(\mathbb{Z}/p)^n$. Par exemple :

$$N(\vec{x}) = \sup \{ |\vec{a}|, |\vec{b}|, \dots \} \\ \vec{a}, \vec{b}, \dots \in \mathbb{Z}/p.$$

On vérifie que ceci définit bien une norme. Alors :

$$N(\vec{x}) = 1 \text{ si } \vec{x} \neq \vec{0}; \quad N(\vec{x}) = 0 \text{ si } \vec{x} = \vec{0}.$$

c'est-à-dire que la distance de deux points distincts quelconques est 1. La métrique introduite est très simple.

SUR LA PROGRESSION ARITHMETIQUE

par E. EHRHART

professeur au Lycée Kléber à Strasbourg

1) Somme des puissances $p^{\text{èmes}}$ des termes d'une progression arithmétique.

Il est bien connu que, pour la plus simple de ces progressions, la suite naturelle des entiers jusqu'à n , ces sommes sont données par les polynômes de Bernoulli :

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2} \quad S_2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \quad S_3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2,$$

$$S_4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

$$S_5 = \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2+2n-1), \text{ etc...}$$

Désignons par $F_p(x, y)$ le $p^{\text{ème}}$ polynôme homogène de Bernoulli ; ainsi :

$$F_2(x, y) = \frac{1}{6} (x+y)(2x+y). \text{ Donc :}$$

$$F_p(x, 1) - F_p(x-1, 1) = x^p,$$

que x soit entier ou non. En posant $x = \frac{l}{r}$, il vient :

$$F_p\left(\frac{l}{r}, 1\right) - F_p\left(\frac{l}{r} - 1, 1\right) = \left(\frac{l}{r}\right)^p.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par r^{p+1} :

$$F_p(l, r) - F_p(l-r, r) = rl^p.$$

D'où :

$$F_p(l-r, r) - F_p(l-2r, r) = r(l-r)^p,$$

$$F_p(l-2r, r) - F_p(l-3r, r) = r(l-2r)^p,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$F_p(l-qr, r) - F_p[l-(q+1)r, r] = r(l-qr)^p = ra^p.$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, on obtient :

$$a^p + (a+r)^p + (a+2r)^p + \dots + l^p = \frac{1}{r} [F_p(l, r) - F_p(a-r, r)].$$

2) Somme des puissances $p^{\text{èmes}}$ des termes positifs d'une progression arithmétique décroissante.

Le dernier terme a de la progression $n, n-r, n-2r, \dots, a$, est le reste de la division de n par r . Dans le cas où n et r sont entiers et positifs, nous nous proposons d'exprimer la somme s_p des puissances $p^{\text{èmes}}$ des termes en fonction du seul paramètre n, r étant supposé donné.

Le reste a de n par r étant une fonction périodique de n , il en est de même pour $F_p(a-r, r)$, de sorte que $s_p = f(n) + \varphi(n)$, où $f(n)$ est un polynôme et $\varphi(n)$ une fonction de période r . Or, les formules de Bessel permettent de former un polynôme trigonométrique $\varphi(n)$, qui prend pour les valeurs $0, 1, 2, \dots, r-1$ de la variable des valeurs données $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi^{r-1}$. On trouve ainsi, par exemple :

$$s_1 = n + (n-3) + (n-6) + \dots + a = \frac{n(n+3)}{6} + \frac{2}{9} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{3} n\right).$$

Comme $0 \leq \frac{2}{9} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{3} n\right) < \frac{1}{2}$, on peut encore écrire, en désignant par $\|A\|$ l'entier le plus voisin du nombre A , non semi-entier :

$$s_1 = \left\| \frac{n(n+3)}{6} \right\|.$$

On trouve de même :

$$s_3 = n^3 + (n-3)^3 + (n-6)^3 + \dots + a^3 = \frac{n^2(n+3)^2}{12} - \frac{2}{9} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{3} n\right),$$

ou :

$$s_3 = \left\| \frac{n^2(n+3)^2}{12} \right\|.$$

3) Somme des valeurs entières des termes d'une progression arithmétique de raison rationnelle (*).

$[x]$ désignera la partie entière d'un nombre x , $\frac{p}{a}$ une fraction irréductible, p et n des entiers. A étant un nombre quelconque, posons $[aA] = \alpha$. Alors :

$$\left[A + \frac{pb}{a} \right] = \left[\frac{\alpha + pb}{a} \right].$$

On peut donc toujours se ramener au calcul, en fonction du paramètre n , de :

$$s_n = \left[\frac{n}{a} \right] + \left[\frac{n-b}{a} \right] + \left[\frac{n-2b}{a} \right] + \dots + \left[\frac{r}{a} \right],$$

où r est le reste de la division de l'entier n par b , car, supprimer des termes à la fin, revient à calculer une somme $s = s_n - s_n'$.

Considérons l'équation diophantienne :

$$(1) \quad x + ay = n \quad (x, y \text{ entiers } \geq 0).$$

y peut prendre les valeurs $0, 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{a} \right]$. (1) a donc $\left[\frac{n}{a} \right] + 1$ solutions. De même : $x + ay = n - b, x + ay = n - 2b, \dots, x + ay = r$ ont respectivement $\left[\frac{n-b}{a} \right] + 1, \left[\frac{n-2b}{a} \right] + 1, \dots, \left[\frac{r}{a} \right] + 1$ solutions.

Or, ces équations s'obtiennent en portant les $\left[\frac{n}{b} \right] + 1$ valeurs $z = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{b} \right]$ dans l'équation diophantienne :

$$(2) \quad x + ay + bz = n \quad (x, y, z \text{ entiers } \geq 0).$$

(*) Des sommes de valeurs entières se présentent souvent en arithmétique. Citons, par exemple, la *formule de Gauss*, qui donne le nombre N de points à coordonnées entières situés dans ou sur le cercle de rayon r , centré à l'origine :

$$N = 1 + 4 \left(\left[\frac{r^2}{1} \right] - \left[\frac{r^2}{3} \right] + \left[\frac{r^2}{5} \right] - \left[\frac{r^2}{7} \right] + \dots \right).$$

Par suite, en désignant par N_n le nombre de solutions de (2), on a :

$$N_n = s_n + \left[\frac{n}{b} \right] + 1,$$

ou :

$$s_n = N_n - \left[\frac{n}{b} \right] - 1.$$

Le calcul de N_n est classique. D'après une remarque due à Euler, cette fonction de n est le coefficient de t^n dans le développement en série entière de :

$$f(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^a)(1-t^b)} = (1+t+t^2+\dots)(1+t^a+t^{2a}+\dots)(1+t^b+t^{2b}+\dots),$$

développement qu'on obtient facilement, sinon vite, en décomposant la fraction rationnelle $f(t)$ en éléments simples.

Soit, par exemple, à calculer :

$$s_n = \left[\frac{1}{2} \right] + \left[\frac{4}{2} \right] + \left[\frac{7}{2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{2} \right],$$

dont la progression arithmétique de base a pour raison $\frac{3}{2}$.

Donc, $s_n = N_n - \left[\frac{n}{3} \right] - 1$, où N_n compte les solutions entières, non négatives, de :

$$x + 2y + 3z = n.$$

La fraction génératrice de N_n est :

$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} = \frac{1}{6(1-t)^3} + \frac{1}{4(1-t)^2} + \frac{17}{72(1-t)} + \frac{1}{8(1+t)} + \frac{1}{9(1-jt)} + \frac{1}{9(1-kt)},$$

où $1, j, k$ sont les racines cubiques de l'unité. D'où :

$$\begin{aligned} N_n &= \frac{1}{6} C_{n+2}^2 + \frac{1}{4} C_{n+2}^1 + \frac{17}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{1}{9} (j^n + k^n) \\ &= \frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + \frac{47}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{2}{9} \cos \frac{2\pi}{3} n. \end{aligned}$$

Comme d'autre part :

$$\begin{aligned} \left[\frac{n}{3} \right] &= \frac{n}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cos \frac{2\pi}{3} n + \frac{\sqrt{3}}{9} \sin \frac{2\pi}{3} n, \\ s_n &= \frac{n^2}{12} + \frac{n}{6} - \frac{1}{72} + \frac{(-1)^n}{8} - \frac{1}{9} \cos \frac{2\pi}{3} n - \frac{\sqrt{3}}{9} \sin \frac{2\pi}{3} n. \end{aligned}$$

En négligeant une partie, dont la valeur absolue est inférieure à $\frac{1}{2}$, quel que soit n :

$$s_n = \left\| \frac{n(n+2)}{12} \right\|.$$

LES POINTS ET LES LONGUEURS IMAGINAIRES A PROPOS D'UN PROBLEME D'INTERSECTION

Si on complète le plan réel euclidien en adjoignant à ses points réels les points imaginaires, deux points M et F, dont l'un au moins est imaginaire, étant donnés, seul le carré de la distance MF est déterminé ; quant à la distance MF, elle ne saurait être définie que comme l'une ou l'autre des racines carrées (opposées) de son prétendu carré.

Soulignons ici entre parenthèses le danger de conserver le terme distance, ou longueur, ou la notation MF quand il s'agit de points imaginaires. Paradoxalement, la mesure algébrique d'un vecteur imaginaire porté par un axe est bien définie, mais, le « sens » du vecteur faisant défaut, la longueur reste indéterminée.

Prenons maintenant l'équation bipolaire de l'ellipse réelle. Pour un point réel :

$$(1) \quad MF + MF' = 2a.$$

Soit M un point imaginaire de l'ellipse ; on peut choisir MF et MF' de manière à avoir encore l'équation bipolaire : $MF + MF' = 2a$. Le sens du mot équation est ici analogue à celui qu'il a dans équation polaire : 1° Si l'équation est vérifiée, le point est sur l'ellipse. 2° Si le point est sur l'ellipse, il existe un choix (un seul ici) des rayons bipolaires, pour lequel l'équation est vérifiée.

Abordons le problème d'intersection posé dans le n° 207 * :

I) Pour un point réel commun aux deux ellipses, on a :

$$\begin{cases} MF + MF_1 = 2a, \\ MF + MF_2 = 2a. \end{cases}$$

Pour un point imaginaire, sur (C_1) $(MF)_1 + MF_1 = 2a$,
sur (C_2) $(MF)_2 + MF_2 = 2a$,
égalités dans lesquelles $(MF)_1$ et $(MF)_2$ sont bien déterminés.

Nous aurons donc :

$$\begin{cases} \text{soit } (MF)_2 = (MF)_1 = MF, \\ \text{soit } (MF)_2 = -(MF)_1 = -MF. \end{cases}$$

a) Si $(MF)_2 = MF$, on est conduit au calcul et aux résultats du n° 207 : deux points réels et distincts sur la médiatrice de F_1F_2 .

b) Si $(MF)_2 = -MF$,

$$\begin{cases} MF + MF_1 = 2a \\ -MF + MF_2 = 2a \end{cases} \iff \begin{cases} MF_1 = 2a - MF \\ MF_2 = 2a + MF \end{cases} \Rightarrow MF_1^2 + MF_2^2 = 8a^2 + 2MF^2$$

Inversement :

$$\begin{cases} MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF^2 = 8a^2 \\ MF + MF_1 = 2a \end{cases} \Rightarrow \pm MF_2 - MF = 2a \quad (1).$$

Quel que soit le signe portant sur MF_2 , on peut toujours choisir $(MF_2)_2$ et $(MF)_2$ de manière que (1) s'écrive $(MF)_2 + (MF_2)_2 = 2a$.

Le lieu des points (réels ou imaginaires) tels que :

$$MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF^2 = 8a^2,$$

est une droite perpendiculaire à FJ (J milieu de F_1F_2).

Il y a deux points imaginaires communs aux deux ellipses sur cette droite.

(*) Intersection de deux ellipses ayant un foyer commun et même longueur de grand axe $2a$ (*Bull.* 207, p. 360).

II) Pour les points réels, l'égalité (1) $MF + MF' = 2a$ et l'égalité (2) obtenue par deux élévations au carré sont équivalentes :

$$(2) \quad MF^4 + MF'^4 - 2MF^2 \cdot MF'^2 - 8a^2(MF^2 + MF'^2) + 16a^4 = 0.$$

[(2) ne contient plus que des termes bien définis pour les points imaginaires].

Ecrivons (2) pour (C_1) , puis pour (C_2) , et retranchons membre à membre :

$$(MF_1^2 - MF_2^2)(MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF^2 - 8a^2) = 0.$$

Pour la médiatrice (1), $MF_1 = MF_2 \iff MF_1^2 = MF_2^2$ (2).

Dans la définition par foyer directrice (1), $MF = eMH \iff MF^2 = e^2MH^2$ (2).

Ce n'est qu'en apparence que, quand il s'agit de points imaginaires, on raisonne sur (1).

III) Soient $\vec{F_x}$ et $\vec{F_y}$ les axes focaux orientés par les vecteurs $\vec{FO_1}$ et $\vec{FO_2}$, x et y les abscisses d'un point quelconque M du plan par rapport aux axes classiques de (C_1) et (C_2) . Ces abscisses sont comptées à partir des centres O_1 et O_2 . Nous appellerons c et d les demi-distances focales respectives de (C_1) et (C_2) .

Si M est un point commun, nous avons :

$$(MF)_1 = a + \frac{cx}{a} \quad (MF)_2 = a + \frac{dy}{a}.$$

$$a) \quad (MF)_1 = (MF)_2 \iff cx = dy.$$

Nous avons au second membre de l'équivalence logique l'équation d'une droite que nous savons être la médiatrice de F_1F_2 .

Par ailleurs, cette équation est vérifiée :

$$1^\circ \text{ pour } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{intersection des axes non focaux,}$$

$$2^\circ \text{ pour } \begin{cases} x = \epsilon \frac{a^2}{c} \\ y = \epsilon \frac{a^2}{d} \end{cases} \quad (\epsilon = \pm 1) \quad \text{ce sont les points communs aux direc-}$$

trices relatives à F d'une part ($\epsilon = -1$), aux directrices relatives à F_1 et F_2 ($\epsilon = +1$) d'autre part.

$$b) \quad (MF)_2 = -(MF)_1 \Rightarrow cx + dy + 2a^2 = 0.$$

$$\text{La droite obtenue ainsi passe par le point } \begin{cases} y = -\frac{a^2}{c} \\ x = -\frac{a^2}{d} \end{cases}, \text{ point commun aux}$$

deux directrices relatives à F . On peut vérifier que le faisceau constitué par les deux directrices relatives à F et les deux sécantes communes réelles aux deux ellipses est harmonique en coupant par $x = 0$ (par exemple).

Nous retrouvons ainsi les résultats obtenus par notre collègue Bernard (n° 215) au moyen de la définition foyer-directrice.

S'il m'est permis d'ajouter un mot, je voudrais signaler que Laguerre a fait connaître une représentation réelle des points imaginaires du plan réel : il associe à un point imaginaire les deux points réels (un sur chacune) des deux droites isotropes issues de ce point. C'est ainsi que, une droite et un cercle non sécants étant donnés, définissant un faisceau à points limites I et J , les deux points imaginaires communs sont représentés respectivement par (I_+, J_-) et (J_+, I_-) et les foyers **imaginaires** de notre ellipse par (F_+, F'_-) et (F'_+, F_-) . J'ai pu moi-même, en modifiant un peu le calcul des équipollences de Bellavitis, puis en l'étendant aux points imaginaires, retrouver la représentation de Laguerre et aussi construire un calcul géométrique réel (une algèbre) adapté à cette représentation..., mais ceci est une autre histoire.

G. DELPLA.

Note. — Cette mise au point a été prononcée à la Régionale de Nancy et au cours de la discussion qui a suivi M. Cl. Pair a fait remarquer que ce problème repose sur une équivoque, ou plus précisément sur l'énoncé incomplet d'un théorème : « Deux coniques ont quatre points communs... dans le plan complexe... » et encore faudrait-il ajouter quelques précisions dans le cas du contact. Mais, dans le plan projectif complexe, l'ellipse n'est pas définie par $MF + MF' = 2a$, expression qui n'a aucun sens, ou plutôt, comme vient de nous le montrer M. Delpla, qui en a quatre..., en général : je fais ici encore une réserve, car où sont les points d'intersection lorsque les deux ellipses sont symétriques par rapport à leur foyer commun ?

DOUBLES PRODUITS VECTORIELS

1. *Enoncé.* — Il y a six doubles produits vectoriels de trois vecteurs libres U, V, W ; ce sont :

(1) $X = U \wedge (V \wedge W) \quad Y = V \wedge (W \wedge U) \quad Z = W \wedge (U \wedge V)$,
et leurs opposés $U \wedge (W \wedge V) = -X \dots$ Nous démontrerons que, s'il existe un tétraèdre $OABC$ dont les quatre hauteurs OO', AA', BB', CC' ont un point commun H (tétraèdre orthocentrique), et dont les arêtes OA, OB, OC sont respectivement parallèles à U, V, W , les vecteurs X, Y, Z sont proportionnels aux côtés du triangle ABC :

(2) $X = T \cdot \vec{BC} \quad Y = T \cdot \vec{CA} \quad Z = T \cdot \vec{AB}$
 T étant un nombre dont nous préciserons la valeur.

Nous avons déjà signalé cette interprétation dans le *Bulletin mathématique des Facultés des Sciences et des Grandes Ecoles*, tome I, année 1934, pages 202 à 207. L'exposé était alors assez différent de ce qui suit.

2. *Origine de cette interprétation.* — Construisons les vecteurs liés :

$$\vec{OL} = U \quad \vec{OM} = V \quad \vec{ON} = W.$$

Supposons que les quatre points O, L, M, N ne soient pas dans un même plan ; alors le vecteur $V \wedge W$ est perpendiculaire au plan OMN ; le vecteur X est parallèle à ce plan et il est orthogonal à la droite OL . Supposons encore qu'un plan perpendiculaire à OL et ne passant pas par O coupe les droites OM et ON en des points B et C à distance finie ; la droite BC est alors parallèle à X . Supposons enfin que le plan qui passe par C , et qui est perpendiculaire à OM , coupe OL en un point A à distance finie et distinct de O ; la droite CA est alors parallèle à Y . Dans le tétraèdre $OABC$ ainsi construit, les arêtes opposées OA et BC sont orthogonales, ainsi que OB et CA ; il en est donc de même de OC et AB de sorte que AB est parallèle à Z . Il en résulte aussi que ce tétraèdre est orthocentrique et qu'il répond à la définition donnée au § 1.

Il est manifeste que nos trois hypothèses sont vérifiées si U, V, W ne sont pas coplanaires et si aucune des faces du trièdre $O(LMN)$ n'est un angle droit. H et O' sont alors distincts de O . Nous nous plaçons dans ce cas au § 3 et nous y démontrons les formules (2) qui entraînent immédiatement la formule classique :

$$(3) \quad X + Y + Z = O.$$

Nous y démontrons aussi les autres formules classiques :

$$(4) \quad X = (U \cdot W) \cdot V - (U \cdot V) \cdot W \quad \dots \quad \dots$$

Aux § 4 et § 5, nous examinons tous les autres cas possibles. Pour chacun d'eux, ou bien nous donnons les valeurs de X, Y, Z , ou bien nous indiquons comment on peut définir des points A, B, C sur les droites OL, OM, ON respectivement, et un nombre T tels que les formules (2) soient encore exactes. Dans tous ces cas particuliers, les démonstrations des formules (2), (3) et (4) seraient très simples, mais nous ne les donnerons pas.

3. Cas de U, V, W non coplanaires, aucune face du trièdre $O(LMN)$ n'étant un angle droit. — Occupons-nous d'abord des vecteurs :

$\vec{OA} = u \quad \vec{OB} = v \quad \vec{OC} = w$
(résultant des constructions du § 2) et de leurs doubles produits vectoriels :

$$(1)' \quad x = u \wedge (v \wedge w) \quad \dots \quad \dots$$

Nous allons montrer qu'ils vérifient :

$$(2)' \quad x = t \cdot \vec{BC} \quad y = t \cdot \vec{CA} \quad z = t \cdot \vec{AB}$$

et

$$(4)' \quad x = (u \cdot w) \cdot v - (u \cdot v) \cdot w \quad \dots \quad \dots$$

Dans le tétraèdre orthocentrique $OABC$, le plan des hauteurs $OO'H$, $AA'H$ est perpendiculaire à la droite BC et la coupe en un certain point G . Les trois droites BCG , $OA'G$, $AA'H$ sont deux à deux orthogonales. On peut donc définir un trièdre trirectangle, unitaire, direct (i, j, k) dont les arêtes sont parallèles à ces droites, ce qui donne :

$$(5) \quad u = \vec{OA'} \cdot j + \vec{A'A} \cdot k \quad v = \vec{OG} \cdot j + \vec{GB} \cdot i \quad w = \vec{OG} \cdot j + \vec{GC} \cdot i.$$

On en déduit :

$$v \wedge w = \vec{OG} (\vec{GC} - \vec{GB}) \cdot (j \wedge i) = -\vec{OG} \cdot \vec{BC} \cdot k,$$

$$x = -\vec{OA'} \cdot \vec{OG} \cdot \vec{BC} \cdot (j \wedge k) = -\vec{OA'} \cdot \vec{OG} \cdot \vec{BC}.$$

Le quadrilatère plan $HO'GA'$ étant inscriptible, on a $\vec{OA'} \cdot \vec{OG} = \vec{OH} \cdot \vec{OO'}$ même si $H O' G A'$ ne sont pas tous distincts. Donc, si on pose :

$$(6) \quad t = -\vec{OH} \cdot \vec{OO'},$$

on a la première des formules (2)' et les autres par analogie. t n'est pas nul puisque H et O' sont distincts de O .

De (5) on tire encore : $u \cdot v = u \cdot w = \vec{OA'} \cdot \vec{OG} = -t$, de sorte que le second membre de la première des formules (4)' est :

$$(w - v) t = t \cdot \vec{BC} = x.$$

Pour passer de là à (2) et (4), remarquons que U et u sont colinéaires et non nuls, ainsi que V et v , W et w . Donc, si on pose :

$$(7) \quad U = l \cdot u \quad V = m \cdot v \quad W = n \cdot w,$$

l, m, n sont trois nombres finis et non nuls. Si on porte ces valeurs (7) de U, V, W dans (1), on obtient $X = lmn \cdot x$. Il suffit donc de poser :

$$(8) \quad T = lmnx$$

pour avoir (2). T n'est pas nul.

Si on porte (7) dans le second membre de (4), celui-ci devient le second membre de (4)' multiplié par lmn , donc $lmn \cdot x = X$.

4. Cas de U, V, W coplanaires.

a) Si l'un au moins des vecteurs U, V, W est nul, X, Y, Z sont nuls.

b) Même résultat si U, V, W sont colinéaires.

c) Cas de deux vecteurs colinéaires, par exemple V et W , donc O, M, N en ligne droite. Soit E la projection de L sur cette droite. Si on remplace le vecteur U par $\vec{EL}$, les vecteurs X, Y, Z ne sont pas changés. On peut prendre : A en L ; B et C confondus en E ; $T = -\vec{OM} \cdot \vec{ON}$.

d) Cas où OL, OM, ON sont trois droites distinctes, situées dans un même plan, ne faisant entre elles aucun angle droit. A, B, C sont les sommets d'un triangle ayant O pour orthocentre ; — $2t$ est la puissance de O par rapport au cercle circonscrit à ce triangle.

e) Cas où OL, OM, ON sont trois droites distinctes, situées dans un même

plan, l'angle MON étant droit. On peut prendre : A en O ; B et C sur la perpendiculaire en L à OL ; $T = -mnOL^2$.

5. Cas de U, V, W non coplanaires, l'une au moins des faces du trièdre O(LMN) étant un angle droit.

f) Si ce trièdre est trirectangle, X, Y, Z sont nuls. A, B, C sont arbitraires sur les droites OL, OM, ON ; H est en O ; $T = 0$.

g) Cas de deux angles droits, par exemple OL perpendiculaire au plan OMN. Si on remplace M par sa projection sur ON, X, Y, Z ne sont pas changés et on est ramené au cas c) avec E en O.

h) Cas d'un seul angle droit, MON par exemple. Si on remplace le point L par sa projection sur le plan MON, X, Y, Z ne sont pas changés. On est alors ramené au cas e).

Louis ANTOINE,

Professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Rennes.

A PROPOS DU PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DE HIGH SCHOOL

Remarque du traducteur : La déclaration qui suit a paru sous le titre « On the Mathematics Curriculum of the High School » dans les numéros de mars 1962 des deux revues américaines « The Mathematics Teacher » et « The American Mathematical Monthly ». Elle paraît ici en traduction avec l'aimable autorisation de ces revues. Bien que ce texte se réfère à la situation aux Etats-Unis, et aux travaux visant à réformer l'enseignement des Mathématiques entrepris là-bas, il n'est peut-être pas sans intérêt pour l'Europe : d'abord en raison de l'importance et de la portée des directives qu'il énonce ; en outre, parce que certaines des tendances auxquelles il fait allusion se reflètent également dans diverses entreprises européennes de réforme de l'enseignement des Mathématiques. — Bien que le terme « high school » désigne aux Etats-Unis un niveau scolaire un peu différent, on verra que du point de vue de l'enseignement des Mathématiques ce niveau équivaut pratiquement à l'enseignement du Second Degré.

Le traducteur : Alexandre WITTENBERG, Québec (Canada).

Le mémorandum qui suit a été composé par plusieurs des soussignés et envoyé à soixante-quinze mathématiciens des Etats-Unis et du Canada. On n'a pas essayé d'accumuler un grand nombre de signatures en sollicitant tous les membres de la communauté mathématique. Le but poursuivi était plutôt d'obtenir un nombre modeste de signatures venant d'hommes possédant une compétence, un « background » et une expérience mathématiques, et se trouvant à des endroits différents. Un petit nombre parmi les soussignés, dont l'appui est certes bienvenu, offrirent d'apporter l'appui de leurs noms après que des collègues leur eurent parlé du mémorandum.

*
**

Les mathématiciens de ce pays disposent maintenant d'un climat plus favorable pour développer et faire accepter des améliorations dans l'enseignement des Mathématiques. En fait, plusieurs groupes ont reconnu l'occasion qui se présente et accomplissent, avec les meilleures intentions du monde, un travail considérable pour en tirer profit.

Ce serait cependant une tragédie si la réforme des programmes s'engageait dans une mauvaise direction et si cette précieuse occasion était gaspillée. Malheureusement, l'état de choses actuel comporte des facteurs et des forces qui peuvent nous égarer. Autrefois, l'enseignement s'est trouvé sous la domination d'éducateurs professionnels qui avaient peut-être tendance à mettre l'accent sur la pédagogie aux dépens du contenu de l'enseignement ; il est possible que les mathématiciens réagissent maintenant en mettant l'accent sur le contenu aux dépens de la pédagogie ; leur action peut être tout aussi inefficace. Des mathématiciens peuvent affirmer inconsciemment que tous les jeunes gens devraient aimer ce qu'aiment les mathématiciens contemporains, ou bien que les seuls élèves dont il vaut la peine de s'occuper soigneusement sont ceux qui pourraient un jour devenir des mathématiciens professionnels. Le fait qu'aujourd'hui il est nécessaire d'apprendre beaucoup plus de mathématiques qu'autrefois peut nous faire rechercher des raccourcis qui pourraient, cependant, causer plus de tort que de bien.

Etant donné les dangers possibles, il sera peut-être utile que nous formulions des principes qui nous semblent fondamentaux et des directives pratiques.

1) POUR QUI ? — Le programme de Mathématiques des écoles secondaires doit servir les besoins de tous les élèves : il doit contribuer au fonds culturel de l'élève moyen et offrir une préparation professionnelle aux futurs usagers des Mathématiques, c'est-à-dire aux ingénieurs et travailleurs scientifiques ; il doit tenir compte pour cela aussi bien des sciences physiques, qui forment la base de notre civilisation technologique, que des sciences sociales qui auront peut-être besoin de plus en plus de Mathématiques dans l'avenir. Tout en satisfaisant les besoins des autres élèves, le programme peut aussi offrir les matériaux les plus essentiels aux futurs mathématiciens. Mais enseigner à tous les élèves des matières qui ne sauraient intéresser que la petite minorité de futurs mathématiciens est du gaspillage et revient à ne pas tenir compte des besoins de la communauté scientifique et de ceux de la société en général.

2) SAVOIR, C'EST SAVOIR FAIRE. — En Mathématiques, des connaissances n'ont une valeur que si elles ne consistent pas simplement en une possession d'information, mais constituent un « savoir faire ». Savoir des Mathématiques signifie être capable de faire des Mathématiques : d'utiliser le langage mathématique avec une certaine aisance, de résoudre des problèmes, de soumettre des raisonnements à une analyse critique, de découvrir des démonstrations et, ce qui est peut-être l'activité la plus importante, de reconnaître un concept mathématique dans une situation concrète donnée, ou de l'extraire d'une telle situation.

Pour ces raisons, introduire des concepts nouveaux en l'absence d'un arrière-fonds suffisant de faits concrets, introduire des concepts unificateurs alors qu'il n'y a pas d'expérience à unifier, ou insister sur les concepts introduits, sans que des applications concrètes viennent proposer à l'élève un défi intellectuel véritable, tout cela est pire qu'inutile : une formalisation prématurée peut conduire à la stérilité ; l'introduction prématurée d'abstractions provoque la résistance, particulièrement celle d'esprits critiques qui, avant d'accepter une telle notion, désirent savoir pourquoi elle s'impose et comment elle peut être utilisée.

3) LES MATHÉMATIQUES ET LES AUTRES SCIENCES. — Dans leur signification culturelle, aussi bien que dans leur usage pratique, les Mathématiques sont liées aux autres sciences et les autres sciences sont liées aux Mathématiques, qui constituent leur langage et leur instrument essentiel. Si on les sépare des autres sciences, les Mathématiques perdent une des sources les plus importantes d'intérêt et de motivation.

4) DÉVELOPPEMENT INDUCTIF ET PREUVES FORMELLES. — La pensée mathématique n'est pas simplement raisonnement déductif, elle ne consiste pas seulement en démonstrations formelles. Les processus mentaux qui nous suggèrent quoi démontrer et comment le démontrer font tout autant partie de la pensée mathématique que la démonstration qui finit par en résulter. Dégager le concept approprié d'une situation concrète, généraliser à partir de cas particuliers observés, raisonner de façon

inductive, raisonner par analogie, et trouver des raisons intuitives pour une conjecture qui se dégage, tout cela sont des façons mathématiques de penser.

En fait, l'élève ne peut pas comprendre le rôle véritable de la démonstration formelle et rigoureuse s'il n'a pas une certaine expérience de tels processus de pensée « non formels » ; Hadamard a très bien décrit ce rôle : « Le but de la rigueur mathématique est de sanctionner et de légitimer les conquêtes de l'intuition, et elle n'a jamais eu d'autre but. »

Il y a différents niveaux de rigueur. L'élève devrait apprendre à apprécier, à découvrir et à analyser de façon critique des démonstrations au niveau qui correspond à son expérience et à ses connaissances. En le poussant de façon prématurée vers un niveau trop formel, on peut le décourager et le dégoûter. En outre, il peut beaucoup mieux acquérir le sens de la rigueur sur des exemples dans lesquels la démonstration règle des difficultés authentiques, que sur des exemples de coupage de cheveux en quatre ou d'une insistance sans fin sur des trivialités.

5) MÉTHODE GÉNÉTIQUE. — « Dans chaque matière il y a grand avantage pour l'étudiant à lire les travaux originaux, car on assimile toujours la science de la façon la plus complète lorsqu'elle est à l'état naissant », écrivait James Clerk Maxwell. Il y a eu quelques maîtres inspirés, tels Ernst Mach, qui pour expliquer une idée en référaient à sa genèse et retraçaient la formation historique de cette idée. Ceci peut nous suggérer un principe général : la meilleure façon de guider le développement mental de l'individu est de lui faire retracer le développement mental du genre humain — retracer ses grandes lignes, naturellement, et non pas les mille erreurs de détail.

Ce principe génétique peut nous garder d'une confusion répandue : Si A précède logiquement B dans un certain système, il peut néanmoins être justifié de faire passer B avant A dans l'enseignement, surtout si B est venu historiquement avant A. En général, nous pouvons nous attendre à un plus grand succès en faisant ce que nous suggère le principe génétique qu'en suivant les suggestions d'une conception purement formelle des Mathématiques.

6) MATHÉMATIQUES « TRADITIONNELLES ». — L'enseignement mathématique dans les écoles élémentaires et secondaires est bien en retard sur les besoins de notre époque et a grand besoin d'améliorations essentielles : nous souscrivons fortement à cette opinion à peu près universellement acceptée. Cependant, il faudrait examiner de très près l'affirmation souvent entendue voulant que les matières enseignées dans les écoles secondaires soient périmées ; il ne faudrait pas l'accepter sans contrepartie. L'algèbre élémentaire, la géométrie plane et, dans l'espace, la trigonométrie, la géométrie analytique et le calcul différentiel et intégral sont toujours d'importance fondamentale, comme ils l'étaient il y a cinquante ou cent ans. Les futurs usagers des Mathématiques doivent apprendre toutes ces matières, qu'ils se préparent à devenir mathématiciens, physiciens, spécialistes en sciences sociales ou ingénieurs, et toutes ces matières peuvent offrir des valeurs culturelles aux élèves généraux. Le programme traditionnel comprend tous ces sujets, à l'exception du calcul différentiel et intégral, dans une certaine mesure ; il serait désastreux d'abandonner l'un quelconque d'entre eux.

Ce qui est mauvais dans le programme actuel n'est pas tant le choix des matières en tant que tel, que l'isolement des Mathématiques d'autres domaines de la connaissance et de la recherche, particulièrement des sciences physiques, et l'isolement des différentes matières enseignées les unes des autres ; même à l'intérieur d'un même sujet, les techniques et les théorèmes apparaissent à l'élève comme des trucs isolés et non reliés entre eux ; il est laissé dans le noir sur l'origine et les buts des manipulations et des faits qu'on lui demande d'apprendre par cœur. Et c'est ainsi qu'il arrive malheureusement souvent que les matières enseignées apparaissent comme inutiles et ennuyeuses, sauf peut-être pour les quelques futurs mathématiciens qui peuvent persister en dépit du programme.

7) MATHÉMATIQUES « MODERNES ». — Etant donné le manque de connexion entre les différentes parties du programme actuel, il est possible que les groupes

travaillant sur les nouveaux programmes soient bien inspirés de chercher à introduire des concepts unificateurs généraux. Nous pensons aussi qu'il est possible qu'un usage judicieux des ensembles et du langage et des concepts de l'algèbre « abstraite » apporte plus de cohérence et d'unité dans le programme de high school. Cependant, l'esprit des Mathématiques modernes ne peut pas être enseigné simplement en répétant leur terminologie. En accord avec nos principes, nous souhaitons que l'introduction de termes et de concepts nouveaux soit précédée d'une préparation « concrète » suffisante, et qu'elle soit suivie d'applications véritables, proposant de vrais problèmes aux élèves, et non pas de matières insignifiantes et ne rimant à rien : il faut motiver et appliquer une notion nouvelle si l'on veut convaincre des jeunes gens intelligents qu'elle vaut la peine de lui accorder leur attention.

Nous ne pouvons nous engager ici dans une analyse détaillée des programmes nouveaux qui ont été proposés, mais nous ne pouvons pas ne pas dire que, si nous les évaluons sur la base des directives formulées plus haut, nous trouvons des points sur lesquels nous ne pouvons pas être d'accord.

Naturellement, tous les mathématiciens n'ont pas les mêmes goûts. Les Mathématiques ont beaucoup d'aspects. On peut les considérer comme un instrument qui nous permet de comprendre le monde autour de nous : il est probable que c'est cette valeur-là que les Mathématiques possédaient pour Archimède et Newton. On peut aussi considérer les Mathématiques comme un jeu soumis à des règles arbitraires, où la principale considération est de s'en tenir aux règles du jeu : une vue de ce genre peut être appropriée pour certains problèmes de fondements. Il y a plusieurs autres aspects des Mathématiques et un mathématicien de profession peut préférer l'un quelconque d'entre eux. Cependant, lorsqu'il s'agit d'enseignement, le choix n'est pas une simple affaire de goût. Nous pouvons attendre de jeunes gens intelligents qu'ils désirent explorer le monde autour d'eux, mais nous ne pouvons pas attendre d'eux qu'ils apprennent des règles arbitraires : pourquoi juste ces règles-là et non pas d'autres ?

En tout cas, nous souhaitons de tout cœur beaucoup de succès à ceux qui travaillent à ces nouveaux programmes. Nous souhaitons particulièrement que les nouveaux programmes reflètent davantage la connexion entre les Mathématiques et les autres sciences, et qu'ils tiennent soigneusement compte de la distinction entre les matières qui ont préséance du point de vue logique, et les matières qui devraient avoir la priorité dans l'enseignement. De cette façon seulement pourrions-nous espérer que les valeurs fondamentales des Mathématiques, leur signification, but et utilité véritables seront rendus accessibles à tous les élèves, y compris, évidemment, les futurs mathématiciens. On a récemment exprimé « des soucis largement répandus au sujet d'une tendance à exagérer l'abstraction dans l'enseignement des Mathématiques aux ingénieurs », cela montre la même voie (*).

Lars V. Ahlfors,
Harvard University.

Harold M. Bacon,
Stanford University.

Clifford Bell,
University of California
(at Los Angeles).

Richard E. Bellman,
Rand Corporation.

Lipman Bers,
New York University.

Garrett Birkhoff,
Harvard University.

R. P. Boas,
Northwestern University.

Alfred T. Brauer,
University of North Carolina.

Richard Brauer,
Harvard University.

Jack R. Britton,
University of Colorado.

(*) Premier groupe d'études d'été concernant les programmes de mécanique théorique et appliquée (First Summer Study Group in Theoretical and Applied Mechanics Curricula), Boulder (Colorado), juin 1961.

- R. Creighton Buck,
University of Wisconsin.
- George F. Carrier,
Harvard University.
- Hirsh Cohen,
International Business Machines Corp.
- Richard Courant,
New York University.
- H.S.M. Coxeter,
University of Toronto.
- Dan T. Dawson,
Stanford University.
- Avron Douglis,
University of Maryland.
- Arthur Erdélyi,
California Institute of Technology.
- Walter Freiburger,
Brown University.
- K.O. Friedrichs,
New York University.
- Paul R. Garabedian,
New York University.
- David Gilbarg,
Stanford University.
- Sydney Goldstein,
Harvard University.
- Herman Goldstine,
International Business Machines Corp.
- Herbert Greenberg,
International Business Machines Corp.
- John D. Hancock,
Alameda State College.
- Charles A. Hutchinson,
University of Colorado.
- Mark Kac,
Rockefeller Institute.
- Wilfred Kaplan,
University of Michigan.
- Aubrey J. Kempner,
University of Colorado.
- Lucien B. Kinney,
Stanford University.
- Morris Kline,
New York University.
- Ignace I. Kolodner,
University of New Mexico.
- Rudolph E. Langer,
University of Wisconsin.
- C.M. Larsen,
San Jose State College.
- Peter D. Lax,
New York University.
- Walter Leighton,
Western Reserve University.
- Norman Levinson,
Massachusetts Institute of Technology.
- Hans Lewy,
University of California, Berkeley.
- W. Robert Mann,
University of North Carolina.
- M. H. Martin,
University of Maryland.
- Deane Montgomery,
Institute for Advanced Study.
- Marston Morse,
Institute for Advanced Study.
- Zeev Nehari,
Carnegie Institute of Technology.
- Jerzy Neyman,
University of California, Berkeley.
- Frederick V. Pohle,
Adelphi College.
- H. O. Pollack,
Bell Telephone Labs., Inc.
- George Pólya,
Stanford University.
- Hillel Poritsky,
General Electric Company.
- William Prager,
Brown University.
- Murray H. Protter,
University of California, Berkeley.
- Tibor Rado,
Ohio State University.
- Warwick W. Sawyer,
Wesleyan University.
- Max M. Schiffer,
Stanford University.
- James B. Serrin,
University of Minnesota.
- Lehi T. Smith,
Arizona State University.
- I. S. Sokolnikoff,
University of California at L.A.
- Eli Sternberg,
Brown University.

J. J. Stoker,
New York University.

A. H. Taub,
University of Illinois.

Clifford E. Truesdell,
Johns Hopkins University.

Robert J. Walker,
Institute for Defense Analysis
and Cornell University.

Wolfgang Wasow,
University of Wisconsin.

André Weil,
Institute for Advanced Study.

Alexander Wittenberg,
Laval University.

Vient de paraître

● *La brochure n° 7 :*

**LECTURE COMMENTEE D'UNE
META-DEMONSTRATION DE GODEL**

par Jean BALIBAR.

*Edition revue et corrigée par l'auteur avec une
notice bibliographique indispensable aux professeurs
qui désirent connaître la méta-mathématique.*

Prix : 2 NF — Franco : 2,50 NF
(par virement au C.C.P. de l'A.P.M.).

LE SYSTEME INTERNATIONAL DES UNITES DE MESURE

Décret du 3 mai 1961

présenté et commenté par F. BRACHET
Inspecteur Général de l'Instruction Publique (honoraire)

Depuis le 1^{er} janvier 1962, les unités de mesure sont légalement définies par le décret du 3 mai 1961, qui abroge les textes antérieurs, notamment la loi du 14 janvier 1948.

Ce décret est accompagné d'un *Tableau général des unités de mesure légales*, qui reproduit intégralement les définitions du décret, rangées en colonne, en les complétant par de nombreuses et abondantes notes et observations.

L'ensemble est un peu disparate, et d'une consultation malaisée ; nous avons rassemblé ici, pour la commodité de nos lecteurs, l'essentiel du décret, en élaguant les passages purement juridiques ou très spécialisés, et en y insérant, à leur place naturelle, les compléments et observations qui figurent dans le tableau annexé au décret.

*
**

Article premier. — Système international S.I.

Le système de mesures obligatoire en France est, sous réserve des dispositions du troisième alinéa ci-dessous, le système métrique décimal à six unités de base, appelé, par la conférence générale des poids et mesures, Système international S.I.

Il comporte les unités de base dénommées et définies à l'article 2 et les unités, dites secondaires, dénommées et définies à l'article 3.

Est autorisé l'emploi d'unités hors système dénommées et définies à l'article 4.

Les unités dénommées et définies dans les articles sus-mentionnés sont les seules unités légales.

Article 2. — Unités de base (Système S.I.)

Les unités de base sont :

- le mètre, unité de longueur ;
- le kilogramme, unité de masse ;
- la seconde, unité de temps ;
- l'ampère, unité d'intensité de courant électrique ;
- le degré Kelvin, unité de température ;
- la candela, unité d'intensité lumineuse.

Le *mètre* (m) est la longueur égale à 1 650 763,73 longueurs d'onde, dans le vide, de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux $2p_{10}$ et $5d_5$ de l'atome de Krypton 86.

Le *kilogramme* (kg) est la masse du prototype en platine iridié, sanctionné par la conférence générale des poids et mesures en 1889 et déposé au pavillon de Breteuil, à Sèvres.

La *seconde de temps* (s) est la fraction $1/31\,556\,925,9747$ de l'année tropique pour 1900 janvier zéro à 12 heures de temps des éphémérides.

L'*ampère* (A) est l'intensité d'un courant électrique constant qui,

maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produit, entre ces conducteurs, une force de 2×10^{-7} newton par mètre de longueur, le newton étant l'unité de force définie à l'article 3.

Le *degré Kelvin* ($^{\circ}\text{K}$) est le degré de l'échelle thermodynamique des températures absolues dans laquelle la température du point triple de l'eau est 273,16 degrés.

On peut employer l'échelle Celsius, dont le degré (*degré Celsius* ; $^{\circ}\text{C}$) est égal au degré Kelvin et dont le zéro correspond à 273,15 degrés de l'échelle thermodynamique Kelvin ci-dessus définie.

La *candela* (cd) est l'intensité lumineuse, dans une direction déterminée, d'une ouverture perpendiculaire à cette direction, ayant une aire de $1/60$ de centimètre carré et rayonnant comme un radiateur intégral (corps noir) à la température de solidification du platine.

OBSERVATIONS

I. — Au sujet du mètre

La mise en pratique de la définition du mètre en longueurs d'onde se fera dans les conditions fixées par le Comité international des Poids et Mesures et la Conférence générale des Poids et Mesures.

Étalon. — L'ancien étalon national du mètre, constitué par la copie n° 8 du prototype international en platine iridié, sanctionné par la Conférence générale des Poids et Mesures en 1889, sera conservé dans les conditions fixées à l'article 7 du décret.

Sous-multiple ayant une dénomination particulière.

Le *micron* (μ), qui vaut 10^{-6}m .

II. — Au sujet du kilogramme

Étalon. — Pour la France, l'étalon du kilogramme est la copie n° 35 du kilogramme prototype international.

III. — Au sujet du degré Celsius

Températures Celsius. — Les températures Celsius, déduites de l'échelle thermodynamique Kelvin, sont pratiquement déterminées selon l'échelle internationale des températures et conformément aux règles fixées par la Conférence générale des Poids et Mesures.

Article 3. — Unités secondaires (Système S.I.)

Les unités secondaires de mesure sont dénommées et définies ainsi qu'il suit :

Unités géométriques.

Aire ou superficie.

L'unité de superficie est le mètre carré.

Le *mètre carré* (m^2) est l'aire d'un carré ayant 1 mètre de côté.

Multiple ayant une dénomination particulière.

L'are (a), qui vaut 100 m^2 .

L'are est employé pour mesurer les surfaces agraires.

Volume.

L'unité de volume est le mètre cube.

Le *mètre cube* (m^3) est le volume d'un cube ayant 1 mètre de côté.

Multiple et sous-multiple ayant une dénomination particulière.

Le stère (st), qui vaut 1 m^3 .

Le stère est employé pour mesurer le volume du bois de chauffage empilé.

Le litre (l), qui vaut un millième de mètre cube (10^{-3} m^3).

Angle plan.

L'unité d'angle est le radian.

Le *radian* (rd ou rad) est l'angle qui, ayant son sommet au centre d'un cercle, intercepte sur la circonférence de ce cercle un arc d'une longueur égale à celle du rayon du cercle.

Angle solide.

L'unité d'angle solide est le stéradian.

Le *stéradian* (sr) est l'angle solide qui, ayant son sommet au centre d'une sphère, découpe sur la surface de cette sphère une aire équivalente à celle d'un carré dont le côté est égal au rayon de la sphère.

Unités de masse.

Multiples ayant une dénomination particulière.

Le quintal (q), qui vaut 100 kg.

La tonne (t), qui vaut 1 000 kg.

Masse volumique

Titre alcoométrique

Unités de temps.

Fréquence (le Hertz) (Hz)

Unités mécaniques.

Vitesse.

L'unité de vitesse est le *mètre par seconde* (m/s), vitesse d'un mobile qui, animé d'un mouvement uniforme, parcourt une distance de 1 mètre en 1 seconde.

Accélération.

L'unité d'accélération est le *mètre par seconde par seconde* (m/s^2), accélération d'un mobile, animé d'un mouvement uniformément varié, dont la vitesse varie, en 1 seconde, de 1 mètre par seconde.

Force.

L'unité de force est le newton.

Le *newton* (N) est la force qui communique à un corps ayant une masse de 1 kilogramme une accélération de 1 mètre par seconde par seconde.

Travail et énergie.

L'unité de travail et d'énergie est le joule.

Le *joule* (J) est le travail produit par 1 newton dont le point d'application se déplace de 1 mètre dans la direction de la force.

Quantité de chaleur.

L'unité de quantité de chaleur est le joule, unité d'énergie.

Puissance.

L'unité de puissance est le watt.

Le *watt* (W) est la puissance de 1 joule par seconde.

Contrainte et pression.

L'unité de contrainte et de pression est le pascal.

Le *pascal* (Pa) est la contrainte qui, agissant sur une surface plane de 1 mètre carré, exerce sur cette aire une force totale de 1 newton.

Viscosité dynamique (le Poiseulle) (Pl)

Viscosité cinématique

Unités électriques.

Force électromotrice, différence de potentiel (ou tension).

L'unité de force électromotrice et de différence de potentiel est le volt.

Le *volt* (V) est la différence de potentiel électrique qui existe entre deux points d'un fil conducteur parcouru par un courant constant de 1 ampère, lorsque la puissance dissipée entre ces deux points est égale à 1 watt.

Résistance.

L'unité de résistance électrique est l'ohm.

L'*ohm* (Ω) est la résistance électrique qui existe entre deux points d'un fil conducteur lorsqu'une différence de potentiel constante de 1 volt, appliquée entre ces deux points, produit dans ce conducteur un courant de 1 ampère, ledit conducteur n'étant le siège d'aucune force électromotrice.

Quantité d'électricité.

L'unité de quantité d'électricité est le coulomb.

Le *coulomb* (C) est la quantité d'électricité transportée en 1 seconde par un courant de 1 ampère.

Capacité électrique.

L'unité de capacité électrique est le farad.

Le *farad* (F) est la capacité d'un condensateur électrique entre les armatures duquel apparaît une différence de potentiel de 1 volt, lorsqu'il est chargé d'une quantité d'électricité de 1 coulomb.

Inductance électrique (le Henry) (H)

Flux magnétique (le Weber) (Wb)

Induction magnétique (le Tesla) (T)

Unités optiques.

Flux lumineux.

L'unité de flux est le lumen.

Le *lumen* (lm) est le flux lumineux émis dans un stéradian par une source ponctuelle uniforme située au sommet de l'angle solide et ayant une intensité de 1 candela.

Eclairement (le lux) (lx)

Luminance

Vergence des systèmes optiques (la dioptrie) (δ)

Article 4. — Unités hors-système

Les unités hors-système sont dénommées et définies ainsi qu'il suit :

Unités géométriques.

Longueur.

Le *mille* correspond à la distance moyenne de deux points de la surface de la terre qui ont même longitude et dont les latitudes diffèrent d'un angle de 1 minute.

Sa valeur est fixée conventionnellement à 1 852 mètres.

Son emploi est autorisé seulement en navigation (maritime ou aérienne).

Angle plan.

Le *tour* (tr) est l'angle au centre qui intercepte sur la circonférence un arc d'une longueur égale à celle de cette circonférence.

Le *grade* (gr) est l'angle au centre qui intercepte sur la circonférence un arc d'une longueur égale à $1/400$ de cette circonférence.

Le *degré* (°) est l'angle au centre qui intercepte sur la circonférence un arc d'une longueur égale à $1/360$ de cette circonférence.

La *minute d'angle* (') vaut $1/60$ de degré.

La *seconde d'angle* (") vaut $1/60$ de minute.

Voici les valeurs de ces unités en radians (unité SI) :

$$\begin{array}{lll} 1 \text{ tour} = 2\pi ; & 1 \text{ grade} = \pi/200 ; & \\ 1^\circ = \pi/180 & 1' = \pi/10\,800 ; & 1'' = \pi/648\,000. \end{array}$$

Heure d'angle.

En astronomie et en navigation, il peut être fait usage de l'heure d'angle qui vaut $(2\pi : 24)$ radian, soit 15 degrés.

Unités de masse.

Masse.

Dans les transactions relatives aux diamants, perles fines et pierres précieuses, la dénomination de *carat métrique* peut être donnée au double décigramme.

Unités de temps.

Temps.

La *minute de temps* (mn) vaut 60 secondes.

L'*heure* (h) vaut 60 minutes.

Le *jour* (j ou d) vaut 24 heures.

Unités mécaniques.

Vitesse.

Le *nœud* est la vitesse uniforme qui correspond à 1 mille par heure.

Son emploi est autorisé seulement en navigation (maritime ou aérienne).

Travail ou énergie.

Le *watt-heure* (Wh) est l'énergie fournie en 1 heure par une puissance de 1 watt. Il vaut 3 600 joules.

L'*électron-volt* (eV), unité d'énergie couramment utilisée en physique nucléaire, est l'énergie acquise par un électron accéléré sous une différence de potentiel de 1 volt. Il vaut $1,59 \times 10^{-19}$ joule.

Quantité de chaleur.

La *calorie* (cal) est la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 degré Celsius la température de 1 gramme d'un corps dont la chaleur massique est égale à celle de l'eau à 15 degrés Celsius, sous la pression atmosphérique normale (101 325 pascals).

Elle équivaut, expérimentalement, à 4,1855 joules.

Unités électriques.

Quantité d'électricité (l'ampère-heure) (Ah)

Unités de la radioactivité.

Activité nucléaire.

L'unité d'activité nucléaire est le curie.

Le *curie* (ci) est l'activité nucléaire d'une quantité de radioélément (ou nuclide radioactif) pour laquelle le nombre de désintégrations par seconde est de $3,7 \times 10^{10}$.

La masse de radium dont l'activité nucléaire est 1 curie est très voisine de 1 gramme.

Quantité de rayonnement X ou γ (le Röntgen) (R) . . .

Article 5

La division décimale des unités est seule admise, sous réserve, toutefois, des dispositions de l'article 4 qui, outre la division décimale, prévoient d'autres divisions pour les unités d'angle et pour les unités de temps.

Pour les masses marquées, les mesures de capacité et la graduation de tout instrument de mesure, chaque unité et chaque multiple ou sous-multiple décimal ne peuvent avoir que leur double ou leur moitié.

Article 6

La dénomination des multiples et sous-multiples des unités de mesure, ainsi que les symboles qui représentent les unités, leurs multiples et sous-multiples, sont fixés dans le tableau général des unités de mesure légales annexé au présent décret.

Les unités de mesure, leurs multiples et sous-multiples ne peuvent être désignés que par leurs noms ou leurs symboles tels qu'ils sont déterminés dans le présent décret et son tableau annexe ci-dessus visé.

Article 7

Les étalons nationaux établis pour représenter les unités légales et mentionnés au tableau annexé au présent décret sont déposés au Conservatoire national des arts et métiers.

Article 10

Pour les grandeurs mentionnées au tableau annexé au présent décret, les unités de mesure qui y sont définies sont les unités enseignées et utilisées dans les établissements scolaires.

Article 15

Les unités légales de mesure sont définies par décret en Conseil d'Etat, après avis de la Commission technique des instruments de mesure, du Bureau national scientifique et permanent des poids et mesures et de l'Académie des sciences.

Article 18

Le présent décret entrera en vigueur le 1^{er} janvier 1962.

EXTRAITS DU TABLEAU GENERAL DES UNITES DE MESURE LEGALES

annexé au décret n° 61-501 du 3 mai 1961

FORMATION DES MULTIPLES ET SOUS-MULTIPLES DÉCIMAUX DE L'UNITÉ

Cette formation résulte du tableau suivant :

FACTEUR par lequel est multipliée l'unité		PRÉFIXE à mettre avant le nom de l'unité	SYMBOLE à mettre avant celui de l'unité
<i>Multiples</i>			
10^{12}	soit 1 000 000 000 000	téra	T
10^9	soit 1 000 000 000	giga	G
10^6	soit 1 000 000	méga	M
10^3	soit 1 000	kilo	k
10^2	soit 100	hecto	h
10^1	soit 10	déca	da
<i>Sous-multiples</i>			
10^{-1}	soit 0,1	déci	d
10^{-2}	soit 0,01	centi	c
10^{-3}	soit 0,001	milli	m
10^{-6}	soit 0,000 001	micro	μ
10^{-9}	soit 0,000 000 001	nano	n
10^{-12}	soit 0,000 000 000 001	pico	p

CONVENTIONS

A. — *Numération des très grands nombres* : Pour énoncer les puissances de 10, à partir de 10^{12} , on applique la règle exprimée par la formule :

$10^{6N} = (N)$ illion.

Exemples : $10^{12} =$ billion, $10^{18} =$ trillion, $10^{24} =$ quadrillion, $10^{30} =$ quintillion, $10^{36} =$ sextillion, etc...

B. — *Noms des unités* : Les noms des unités, même constitués par des noms de savants, sont grammaticalement des noms communs, leur initiale est une lettre minuscule et ils prennent un s au pluriel.

C. — *Symboles* : Lorsque le symbole du multiple ou du sous-multiple d'une unité comporte un exposant, celui-ci ne se rapporte pas seulement à la partie du symbole qui désigne l'unité, mais à l'ensemble du symbole.

Par exemple, dam^2 signifie $[\text{dam}]^2$, aire du carré ayant un décamètre de côté, soit 100 mètres carrés ; dam^2 ne signifie pas $\text{da}[\text{m}^2]$, ce qui correspondrait à 10 mètres carrés.

Les symboles ne prennent pas la marque du pluriel.

*
**

Du point de vue particulier de l'enseignement des Mathématiques, signalons que :

1° le *litre* est désormais officiellement défini comme étant égal au décimètre cube ; ce n'est plus le volume d'un kilogramme d'eau ;

2° l'unité d'angle plan n'est plus l'angle droit, mais le *radian*.

Toutefois, la rédaction libérale de l'article 10 n'exclut pas, dans l'enseignement, l'emploi de l'angle droit comme unité d'angle.

Une nouvelle unité d'angle apparaît, le *tour*.

Le radian, le tour, le grade et le degré sont tous définis par la longueur de l'arc qu'ils interceptent dans la position d'angle au centre.

D'un point de vue plus général, il est naturel de se demander comment se sont élaborées des modifications si profondes, et d'une portée internationale.

Le fondement scientifique de ce décret si important se trouve dans les « *Comptes rendus des séances de la onzième Conférence générale des poids et mesures* », dont la lecture est du plus haut intérêt.

Les travaux de cette Conférence eurent lieu au Ministère des Affaires étrangères ; ils occupèrent cinq séances : mardi 11, mercredi 12, vendredi 14, mardi 18 et jeudi 20 octobre 1960.

L'ordre du jour de la séance inaugurale est libellé ainsi :

Discours de Son Excellence M. le Ministre des Affaires étrangères de la République Française (*M. Couve de Murville*).

Réponse de M. le Président du Comité International des Poids et Mesures (*M. A. Danjon, Directeur de l'Observatoire de Paris*).

Discours d'ouverture de M. le Président de l'Académie des Sciences de Paris, Président de la Conférence (*M. E.-G. Barrillon*).

L'ensemble de ces trois discours constitue un résumé, de la plus haute tenue, du programme des travaux de la Conférence, travaux dont on trouve l'exposé dans ces Comptes rendus ; nous ne saurions trop recommander la présence de ces Comptes rendus dans toutes les bibliothèques des Lycées et Collèges.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

Unités de mesure (Décret du 3 mai 1961) (0,75 NF).

Centre des J.O. : 26, rue Desaix, Paris (15°) (C.C.P. 9063-13 Paris).

Comptes rendus des séances de la onzième Conférence générale des poids et mesures (10 NF).

Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris (6°) (C.C.P. 29.323 Paris).

Annuaire du Bureau des Longitudes 1962 (45 NF). Même éditeur.

Si on veut comparer la nouvelle réglementation à l'ancienne (loi du 14 janvier 1948), on trouvera cette dernière dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* de 1960.

BORDAS

27 bis, rue du Moulin-Vert, Paris, 14^e

COLLECTION COSSART ET THERON

PREPARATION AUX MATHEMATIQUES NOUVELLES

NOUVEAUTÉ

MATHÉMATIQUES

Classe de 3^e

P. THÉRON

Inspecteur Général
de l'Instruction publique

E. GALMARD

Professeur au Lycée
Janson-de-Sailly
Agrégée de l'Université

M. COUTURIER

Ancienne élève de l'E.N.S.
de Sèvres
Agrégée de l'Université

384 pages. Relié 9,80 NF

Rappel

Mathématiques 6^e, 344 p. 9,80 NF
Mathématiques 5^e, 448 p. 9,80 NF
Mathématiques 4^e, 392 p. 9,80 NF

Salle d'exposition - 93, rue de Seine, Paris, 6^e

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD - GRENOBLE

9, Grande Rue - Téléphone 44.01.96

6 bis, rue de l'Abbaye - Tél.: ODE 60.90 - PARIS

COURS DE MATHÉMATIQUES

par ROUX et MIELLOU

Professeurs au Lycée de Grenoble

TARIF JUIN 1962

Taxe locale incluse

Arithmétique 6°	épuisé
Dessin géométrique 6° et 5°	1,88 NF
Arithmétique 5°	4,58 NF
Géométrie 5° et 4° - Programme 1958	7,35 NF
Arithmétique et Algèbre 4° - Programme 1958	5,70 NF
Arithmétique et Algèbre 3° - Programme 1958	7,13 NF
Géométrie 3° - Programme 1958	6,52 NF
Géométrie 5°, 4°, 3° - Programme 1958	13,90 NF
Algèbre 2° A.B.C.M. - Programmes 1947	9,18 NF
Compléments de mise à jour au 18 juillet 1960, Algèbre 2° C.M.	1,62 NF
Géométrie 2° A.B.C.M. - Programmes 1947	9,18 NF
Compléments de mise à jour au 18 juillet 1960, Géométrie 2° C.M.	6,12 NF

NOUVEAUTÉS :

ALGÈBRE 2° A'CM et M' - Progr. 18 juillet 1960	10,18 NF
GÉOMÉTRIE 2° A'CM et M' - Progr. 18 juill. 60	15,— NF
ALGÈBRE et TRIGONOMETRIE 1 ^{re} - Toutes sections	12,24 NF
GÉOMÉTRIE 1 ^{re} A'CM et M' - Progr. 2 mai 1961	10,20 NF
GÉOMÉTRIE 1 ^{re} A.B. - Prog. 2 mai 1961	5,60 NF

ALGÈBRE 1^{re} A.B. Jusqu'à épuisement 4,38 NF.

QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU
BACCALAUREAT, 1^{re} partie, A.B.C.M. 5,14 NF

N. B. — Il n'existe pas de corrigés d'exercices pour ces ouvrages

Euclide ressuscité.

Jean ITARD. — *Les livres arithmétiques d'Euclide*, volume X de la collection « Histoire de la Pensée », Ecole Pratique des Hautes Etudes, Hermann éditeur, Paris, 1961 (232 p., 8 illustrations hors-texte, prix 15 NF).

Le cri vengeur du Professeur Dieudonné retentit encore : « A bas Euclide ! » lorsque paraît l'ouvrage dans lequel Itard le ressuscite, pour nous qui ne lisons pas les grands auteurs dans le texte original, surtout lorsqu'il s'agit des Anciens. Va-t-on vers un duel Dieudonné-Itard ? Qui est l'offensé et qui aura le choix des armes ?

Ne nous inquiétons pas, il n'y aura pas de duel, même pas le commencement d'un conflit, car ce n'est pas du même Euclide que traitent nos deux mathématiciens. La formule de M. Dieudonné a fait du bruit ; mais, en fait, c'est à une caricature d'Euclide qu'elle s'adressait justement. Il s'agissait de conjurer tout le mal qui a été commis au nom d'Euclide. Lequel, son existence même étant douteuse, ne pouvait évidemment réagir.

L'ouvrage que nous donne Itard aujourd'hui est tout au contraire une restitution, une résurrection d'un Euclide qui n'a peut-être pas physiquement existé, mais qui est le vrai, « un moment de la conscience mathématique » pour paraphraser un mot célèbre. Le problème de l'identité et de la biographie d'Euclide est malheureusement insoluble ; heureusement, il n'a pas plus d'importance que celui de la couleur de l'œil gauche de Nicolas Bourbaki. Mais ce qui importe, en histoire des sciences, pour nous qui enseignons, c'est de comprendre la portée de ce qui s'enseignait, il y a 22 ou 23 siècles ; c'est de saisir, malgré les différences de langage et l'absence du symbolisme moderne, le fond de ces découvertes qui ont donné au miracle grec un éclat si durable. Connaître enfin comment, à travers les siècles, les sages de l'Antiquité ont fécondé la pensée des savants modernes.

Itard a donc choisi, dans tout ce qui est dit appartenir à Euclide, un ensemble de 102 propositions arithmétiques des éléments VII, VIII et IX. Pour ceux d'entre nous qui ne lisons pas le grec ancien couramment (!), voici la première traduction française depuis celle de Peyrard (1818) ; l'auteur a tiré également profit des traductions et des études étrangères publiées depuis. Chaque proposition, traduite aussi précisément que possible, est suivie d'un commentaire dans le style mathématique d'aujourd'hui. Exemples : les propositions 1 et 2, nombres premiers entre eux et « plus grande commune mesure de deux nombres non premiers entre eux » présentent ce qui est curieusement appelé « algorithme d'Euclide » et qui devrait être plus exactement désigné par *anthypharèse*. Ce tout petit exemple, choisi exprès sur les premières propositions, suffit à révéler l'intérêt que trouveront les Collègues qui enseignent l'arithmétique à se replonger dans cette source.

Les 120 pages de traduction et commentaire sont précédées par un essai historique qui analyse l'œuvre euclidienne en arithmétique. Cette introduction essentielle, pour tous ceux qui, comme moi, ont tout à apprendre sur le sujet, résume les conférences faites au cours des deux dernières années * par Itard à la 6^e section de l'Ecole des Hautes Etudes. Elle se présente en chapitres relativement courts mais complets sur un sujet donné (l'anthypharèse, j'y reviens avec plaisir, ou encore la genèse de la notion de corps de nombres, l'analyse de types de raisonnement chez Euclide). La conclusion sur cette œuvre d'Euclide est prudente. Mais pouvoir dire qu'elle est née environ 250 ans avant notre ère, à un siècle près, n'est-ce pas très précis si l'on rappelle que « l'on retrouve des traces convaincantes d'une mathématique déjà abstraite et logique deux mille ans avant notre ère... ».

* L'ouvrage paraît en 1962 mais porte la date 1961.

Le livre se termine par quelques documents annexes : la division du canon, des extraits du *Gorgias* de Platon sur le pair et l'impair et des *Lois*, de Platon, sur les diviseurs d'un nombre, des extraits de Platon et d'Aristote sur les nombres figurés. Bibliographie très complète et index montrent le souci de l'auteur d'aider les lecteurs-Collègues à se cultiver intelligemment. Il donne même des références à son livre *Mathématiques et Mathématiciens* : lectures préparatoires souvent utiles.

A plusieurs occasions, la collection « Histoire de la Pensée » a été citée ici. Le livre de Itard porte le n° X bien que les n° VI, VII ou IX n'aient pas paru, à notre connaissance : ils traitent de Philosophie mathématique (Cavaillès), d'Enseignement des Sciences au XVIII^e siècle ou de la Cosmologie de Giordano Bruno (P.-H. Michel) ; nous ne manquerons pas de les analyser lorsqu'ils paraîtront.

Souhaitons que tous sachent, comme Itard l'a parfaitement réussi, nous faire sentir qu'il y a une actualité de l'histoire des sciences et que celle-ci est intimement liée avec les vertus pédagogiques conjuguées d'une histoire bien conçue et d'une science bien comprise.

G. W.

Les Mathématiques du physicien.

Laurent SCHWARTZ. — *Méthodes mathématiques pour les Sciences physiques*, un volume de la collection « Enseignement des Sciences », édit. Hermann, Paris, 1961 (392 p., relié toile, prix 45 NF).

Que les physiciens et les ingénieurs aient de plus en plus besoin d'outils mathématiques, tout le monde le dit et cela correspond à une évidente réalité. Les avis sont plus variés quant à la culture mathématique que doivent posséder les ingénieurs et les physiciens ; certains pensent que connaître un bon usage des techniques mathématiques suffit largement. Cela est évidemment indispensable et c'est pourquoi le certificat de techniques mathématiques de la physique (T.M.P.) est obligatoire pour la licence ès sciences physiques (ce qui ne signifie pas que ce certificat soit un recueil de recettes). Il faut une formation plus approfondie pour ceux des physiciens qui s'orienteront vers les parties théoriques de leur science et c'est l'objet du certificat d'option « méthodes mathématiques de la physique » (M.M.P.).

M. Laurent Schwartz a déjà une longue expérience de cet enseignement dont il est l'un des principaux, sinon le principal créateur. Personne n'était mieux qualifié que lui pour écrire ce cours ; on sait ses qualités d'exposition et qu'il sait entraîner l'auditoire des étudiants comme l'auditoire des professeurs de l'A.P.M. lorsqu'il nous fait des conférences.

Après quelques rappels de calcul intégral (on donne par exemple sans démonstration les résultats essentiels concernant l'intégrale de Lebesgue), les chapitres II et III présentent une théorie élémentaire des distributions et les opérations sur les distributions (produit tensoriel, convolution). Le chapitre sur les séries de Fourier comprend un rappel de la définition de l'espace de Hilbert et la recherche de ses bases hilbertiennes. Viennent ensuite les chapitres sur les transformations de Fourier et de Laplace ; en application, quatre pages sur les principes du « calcul symbolique » en disent plus long que maints cours anciens sur ce sujet. Les trois derniers chapitres, équations des ondes et de la chaleur, fonctions eulériennes et fonction de Bessel, illustrent et complètent les théories précédentes.

Chacun des neuf chapitres est suivi d'exercices très nombreux qui ont été proposés au certificat M.M.P.

Une certaine recherche dans la présentation typographique rend plus regrettables certaines maladresses volontaires à ce sujet dont l'auteur n'est évidemment pas responsable : l'absence d'index peut être compensée par une table des matières détaillée ; encore faudrait-il que la présentation de celle-ci fasse clairement ressortir les titres des chapitres.

Laissons ces détails pour recommander aux établissements d'enseignement de placer ce beau livre dans les bibliothèques des professeurs.

G. W.

Mathématiques du xx^e siècle.

Mathématiques du xx^e siècle, 1, première année (Bruxelles, 25-31 août 1960), publié par le Ministre de l'Education Nationale et de la Culture, Secrétariat général à la réforme de l'enseignement secondaire.

Cet ouvrage original reproduit un ensemble de 14 conférences faites par des auteurs belges ou hollandais et destinées à des professeurs, docteurs ou licenciés. Tous les textes sont, ici, rédigés en français ; chacun est accompagné d'une bibliographie succincte mais essentielle. On peut dire que chaque conférence forme un tout et peut être lue indépendamment des autres, encore que la lecture suivie soit évidemment plus profitable.

Voici la liste des sujets traités et, entre parenthèses, le nom de l'auteur : Logique inférentielle et logique bivalente de l'implication (E. W. Beth) ; la méthode axiomatique et la logique symbolique (A. Borgers) ; la théorie des ensembles (A. Borgers) ; le problème des deux centres fixes (A. Deprit) ; le problème de Lagrange à masses égales (A. Deprit) ; l'intégrale (G. Hirsch) ; espaces homogènes (P. Libois) ; espaces non-homogènes (P. Libois) ; l'univers ensembliste (G. Papy) ; quelques aspects de la statistique mathématique (J. Teghem) ; algèbres symétriques (P. J. Van Albada) ; plans projectifs (P. J. Van Albada) ; quelques notions modernes d'analyse (F. Van der Blij) ; la structure des niveaux dans l'argumentation (P. M. Van Hiele).

Ces exposés sont d'importance et de rédaction variées. L'un offre un panorama sur les théories des ensembles, l'autre condense heureusement en 50 pages les définitions de l'intégrale. D'autres, sur les problèmes de Lagrange, par exemple, entrent dans le détail des difficultés techniques.

Les 14 conférences ont été données à des stagiaires qui ont apparemment bien occupé la courte semaine du 25 au 31 août. Précisons, pour l'instruction des Collèges français et de notre Administration, que ce stage était organisé par le Ministère Belge de l'Education Nationale, conformément à des vœux émis par le Colloque de Royaumont organisé par l'O.E.C.E. Il s'agit de formation continue des professeurs, de « recyclage », comme on dit, sujet dont nous aurons tous l'occasion de reparler.

Admirons sans réserve cet ouvrage de 326 pages édité par un Ministère qui, apparemment, a le souci conjoint de la science et de la pédagogie.

G. W.

Brèves rencontres.

- J. FAVARD : *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*, tome III : *Théorie des équations*, fascicule I : *Equations différentielles* (Gauthier-Villars, Paris, 1962, 296 pages ; prix : 45 NF).

Les deux premiers tomes de ce cours ont été signalés et brièvement analysés (*Bull.* 214). On retrouve la même présentation pour cette étude des équations différentielles : rappel des résultats élémentaires, théorèmes d'existence (dans le champ réel), problèmes locaux ou globaux, études dans le champ analytique.

Chacun des cinq chapitres est suivi d'exercices.

- M. BLANC-LAPIERRE : *La Mathématique moderne à l'usage du physicien et de l'ingénieur*, tome I : *Eléments mathématiques* (éditions Eyrolles, Paris, 1961, 670 pages, relié ; prix : 98 NF).

L'originalité de ce gros ouvrage, qui s'annonce destiné aux ingénieurs et aux physiciens, est la grande place qu'il réserve aux éléments de logique (230 pages). Suit une théorie détaillée des ensembles et le dernier chapitre (96 pages) étudie les entiers naturels. Le livre ne propose pas d'exercices ; il contient un index alphabétique, mais peu ou pas de référence bibliographique. Le symbolisme mathématique utilisé est le symbolisme moderne courant.

La lecture est facile ; style clair et bonne présentation typographique. Peut-être aurait-on pu faire plus court.

- **Henri CABANNES** : *Cours de Mécanique générale* (Dunod, Paris, 1961, 302 pages, relié ; prix : 29 NF).

Ce livre est le cours de l'auteur à la Faculté des Sciences de Paris. La mécanique y est considérée comme une branche des Mathématiques appliquées. L'exposé est centré sur les fondements de la mécanique classique ; on y a ajouté deux chapitres sur la mécanique des fluides. Le livre contient des problèmes de licence dont certains avec solution. Nous avons plaisir à signaler ce livre d'un auteur qui nous a fait, il y a déjà quelques années, une belle conférence sur la mécanique des fluides (publiée dans *L'Enseignement des Sciences*). Et nous relevons aussi avec émotion la dédicace de ce livre : « A la mémoire de mon Père ».

Livres reçus.

- J.-P. PÉREZ : *Mécanique physique*, Masson, édit., Paris, 1961, 202 p., cartonné demi-souple ; prix : 26 NF.
- M. JOUGUET : *Cours de Physique*, tome I : *Chaleur, Thermodynamique, Acoustique* (192 p., broché, 17 NF) ; tome II : *Electricité* (355 p., broché, 43 NF), Editions Eyrolles, Paris, 1962.
- R. GUILLIEN : *Problèmes d'électronique* (380 p., cartonné, 76 NF), Editions Eyrolles, Paris, 1962.
- Paul ROSSIER : *Géométrie synthétique moderne*, Vuibert, édit., Paris, 1961, 348 p. ; prix :
- Roger DESCOMBES : *Cours d'Analyse pour le certificat de Mathématiques (I)*, Vuibert, édit., Paris, 1962, 344 p., relié toile ; prix : 40 NF.

COURS DE MATHÉMATIQUES

par **Pierre BOUTIN**

Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure
Professeur agrégé au Lycée Janson-de-Sailly

NOUVEAUTE JUILLET 1962

Géométrie, cl. de 2^e C.M.

RAPPEL

Classe de sixième	10,00 NF
Classe de cinquième	9,50 NF
Classe de quatrième	11,00 NF
Classe de troisième	11,50 NF

Editions DE GIGORD, 15, rue Cassette, PARIS-VI^e

mathématiques

**Cours publié
sous la direction
de ROLAND MAILLARD,
Inspecteur général
de l'instruction publique**

Classe de Sixième :
Mathématiques, par R. CAHEN

Classe de Cinquième :
Mathématiques, par R. CAHEN

Classe de Quatrième :
Mathématiques, par R. MAILLARD et E. CARALP

Classe de Troisième :
Mathématiques, par R. MAILLARD, R. CAHEN
et E. CARALP

Classes de Seconde A'CMM' :
Mathématiques, par G. GIRARD et A. LENTIN

Classes de Seconde AB :
Mathématiques, par R. CAHEN

Classes de Première A'CMM' :
par G. GIRARD et A. LENTIN
Géométrie
Algèbre - Trigonométrie

**CLASSIQUES
HACHETTE**

79, Bd Saint-Germain

→ **NOUVEAUTÉS**

Sous la direction de **R. DEDRON**

Inspecteur général de l'Instruction publique

ARITHMÉTIQUE

avec notions d'**AXIOMATIQUE**

CLASSE DE MATHÉMATIQUES

par **G. ANGLADE**

Professeur agrégé au Lycée Lakanal

Prix : **13,50 NF**

Spécimen sur demande

COLLECTION « REDECOUVERTE »

dirigée par **R. DEDRON**

Inspecteur général de l'Instruction publique

CAHIER DE TRAVAUX PRATIQUES DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE 5^e ARITHMÉTIQUE

par **E. ARNAUD**

Professeur au Lycée Lavoisier

Prix : **3,90 NF**

P. AUBRY

Professeur agrégé au Lycée Louis-le-Grand

Déjà parus : Classe de 5^e GEOMETRIE **3,90 NF**
 Classe de 6^e **3,90 NF**

Spécimens sur demande

Tous les professeurs susceptibles d'être examinateurs au Baccalauréat ont intérêt à se procurer

LE BACCALAURÉAT 1962 GUIDE DU CANDIDAT

par **R. ECHARD**

Inspecteur de l'Académie de Paris

Prix : **4,80 NF**

Le nouveau Guide du candidat au Baccalauréat ne contient pas de circulaires contradictoires et **périmées**.

Toutes les instructions et circulaires parues jusqu'en novembre 1961

en vente chez votre libraire

→ **MAGNARD**

122, boulevard Saint-Germain, Paris, 6^e

CONCOURS D'ENTREE 1961 A L'E.N.S. DE FONTENAY-AUX-ROSES *

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Correcteur : Mlle DELAVALT

Répartition des notes attribuées aux 138 copies corrigées, notées de 0 à 60.

La 4^e partie, ayant été abordée sans succès dans quelques copies, par ailleurs de faible valeur, a été peu comptée dans le barème.

Une excellente copie notée 56 domine ; l'utilisation d'une méthode un peu longue pour une question a empêché la candidate d'aborder la 4^e partie. Mais les trois premières sont traitées avec toute la rigueur souhaitable.

La répartition se fait ainsi : 56, 50, 46, 45, 7 notes de 36 à 41, 9 de 30 à 35, 20 de 24 à 29, 30 de 18 à 23, 38 de 12 à 17, 23 de 6 à 11, 7 inférieures à 6. Soient 20 notes seulement au-dessus de la moyenne et 20 entre 24 et 29. La moyenne est plus basse que l'an dernier : 6,3 sur 20 au lieu de 7 sur 20. Cependant, il y a de meilleures copies, mais aussi une grande quantité émaillées de fautes grossières de logique et, en outre, d'erreurs de calcul, ce qui n'a pas permis de relever l'ensemble comme en 1960. Certaines copies sont de véritables romans fleuves où rien n'est démontré. On souhaiterait trouver dans la rédaction *plus de précision et de concision*.

Remarques particulières :

1^{re} partie : La 1^{re} partie guidait l'élève dans la démonstration de la propriété suivante : si u_n est une suite de nombres > 0 , quand $n \rightarrow \infty$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite

$L \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n}$, a la même limite. Un exemple permettrait de conclure que $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow 0$ n'entraîne pas que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite.

La majorité des candidates ont été gênées par le fait qu'elles connaissaient cette propriété avec une démonstration différente de celle suggérée par le texte. Peu se sont laissées guider. Bien que ce ne soit pas l'esprit du texte, celles qui ont transcrit correctement leur cours ont été peu ou pas pénalisées. Par contre, une « démonstration » fréquente et que l'on peut schématiser ainsi :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \rightarrow 1 \text{ (résultat du cours)} \Rightarrow b < \sqrt[n]{u_n} < c \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \rightarrow 1$$

est d'un intérêt nul, puisque en fait hypothèse et conclusion sont identiques.

Les notions de limite et de convergence ne sont pas comprises. Les expressions incorrectes : « à partir d'un certain rang le terme général tend vers 0 », ou « si la série converge par la règle de d'Alembert, elle converge par la règle de Cauchy », ne sont pas de simples négligences d'écriture. Une affirmation fréquente : « une quantité bornée admet une limite » ! La non existence d'une limite ne semble pas imaginable et cependant les candidates en avaient un exemple.

Les règles de d'Alembert et de Cauchy sont, dans l'esprit d'une majorité, des

(*) Voir les énoncés dans le Bulletin 216, p. 530.

conditions nécessaires de convergence. La phrase un peu ambiguë : « la série converge si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite inférieure à 1 », pourrait peut-être être remplacée par : « $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite inférieure à 1 $\Rightarrow$ la série est convergente », ce qui permettrait moins d'erreurs d'interprétation, le sens de la flèche étant non équivoque.

Le 1 c) a donné lieu à toutes les erreurs possibles. En particulier, le calcul de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a été rarement exact ; il ne présentait cependant aucune difficulté. Si, par erreur, la limite trouvée était 0, la conclusion était : « la réciproque, vraie dans le cas particulier, est vraie dans le cas général », faute de logique fréquente, mais non excusable. Un calcul exact a amené fréquemment la conclusion encore plus ahurissante : « la série converge pour n pair et diverge pour n impair », ou bien : « la réciproque n'est vraie que pour n pair ». Enfin, une candidate étudie la limite du rapport pour n infini et $n = 0!!!$

2° partie : La question a), qui ne demandait qu'un peu de calcul, a conduit assez souvent à des résultats exacts. Mais le raisonnement par récurrence a été rarement correct. On calcule trop de termes (le nombre privilégié semble être 7) ou pas assez (on ne calcule que u_3 et on conclut : « on voit immédiatement que » suivi d'un résultat inexact). Ou bien on utilisait un procédé de descente ici très facile, ou bien on calculait u_3 et u_4 , etc... Les élèves devraient être habitués à ce raisonnement délicat mais essentiel.

Une erreur de lecture du texte : au lieu de comparer u_n à $a^{n/2}$, certaines le comparent à $\frac{n}{a^2}$. Dans la mesure du possible et si les conclusions qui suivent sont déduites avec logique, il n'est pas tenu compte de cette erreur.

Pour étudier la convergence de la série, la règle de d'Alembert a eu toutes les faveurs, mais alors il fallait envisager le cas $a = 1$. Quand les candidates sauront-elles que, pour étudier une série, la règle essentielle est de la comparer à une autre série connue qui était ici celle de terme général $a^{n/2}$. Ici, la règle de d'Alembert a eu ceci de bénéfique que, même avec les calculs précédents faux, les candidates ont pu trouver un résultat exact, ce qui leur permettait de continuer.

La difficulté commençait ensuite. Une vingtaine seulement ont compris la suite de cette partie. L'hypothèse du texte était : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sqrt[n]{u_n}$ admet une limite quand n

tend vers l'infini. Les candidates ont commencé leur raisonnement par : « si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite... ». Le cas où la limite n'existe pas n'est pas abordé. Le problème n'avait donc plus sa raison d'être et les paragraphes *b*, *c*, *d*, *e* ont donné lieu à des discours oiseux et très pénibles à lire. Parmi celles qui ont entrevu le lien entre *a*) et la suite et en ont été largement récompensés, peu ont fait un raisonnement correct. Pour la question *d*), dans quelques copies seulement, on retrouve des séries analogues à celles du 1 : $\frac{b^n}{u_n}$ et $\frac{u_n}{c^n}$ avec $b < \sqrt{L} < c$. Enfin, dans *e*), il était inutile de discourir pour ne pas tirer de conclusions exactes. Il suffisait d'écrire :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \sqrt[n]{u_n} \rightarrow L > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \rightarrow \sqrt{L} > 0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ admet une limite } = \sqrt{L},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow L' \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \rightarrow L' \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \sqrt[n]{u_n} \rightarrow L'^2 = L \Rightarrow L' = \sqrt{L}.$$

Quelques candidates ont fait ceci correctement en admettant les résultats précédents, ce qui était parfaitement normal.

En conclusion pour cette partie, l'erreur fondamentale a résulté encore d'une mauvaise compréhension de la notion de limite. Plus ou moins explicitement, elles ont écrit : « Pour qu'un produit de facteurs admette une limite, il est nécessaire que chacun des facteurs ait une limite. » En outre, le signe $\rightarrow$ pour « tend vers » est souvent employé abusivement. On lit fréquemment : $u_n \rightarrow a^{n/2}$ ou plus généralement : $u_n \rightarrow f(n)$, ce qui n'a pas de sens puisque n figure encore dans le 2^e membre.

3^e partie : Le début, par un calcul simple, permettait aux candidates de gagner quelques points qui ont été généreusement attribués. L'étude de $\log P_n$ les a de nouveau arrêtées. Il est bien évident qu'il est inutile de connaître la théorie des produits infinis pour traiter cette question. Alors qu'il est très simple de comparer la série de

terme général $\log \left(1 - \frac{r}{n}\right)$ à celle en $\left(-\frac{r}{n}\right)$, la règle de d'Alembert si chère aux élèves ne donne aucun résultat, et pourtant certaines s'en sont contentées. D'autres n'ont pas reconnu dans $\log P_n$ la somme des n premiers termes d'une série et ont conclu qu'une somme de termes en nombre infini est nécessairement infinie !!! Le calcul de c était très simple quand on prenait les logarithmes des deux membres, car on retrouvait la relation de récurrence (1). La suite était analogue à la 2^e partie, ce qui fait que celles qui avaient traité correctement la 2^e partie ont pu achever rapidement celle-ci.

En conclusion, l'énumération de ces erreurs, choisies parmi les plus graves et les plus fréquentes, montre qu'il est nécessaire avant tout de comprendre les notions fondamentales : limite, convergence. Les candidates retrouveront toujours alors les règles qui leur sont nécessaires. Les règles de d'Alembert et de Cauchy, dont on ne nie pas l'utilité, sont presque toujours utilisées à tort et à travers. Peut-être, en définitive, serait-il plus sage de se borner à la simple règle fondamentale de comparaison des séries et de développer plus la logique que la mémoire. En tout cas, pour appliquer correctement une règle, il faut l'avoir comprise, il est évident que ce n'était pas encore le cas cette année.

EPREUVES ORALES

Option Mathématiques

42 candidates ont été interrogées. Leurs notes s'échelonnent de 4 à 18 de la façon suivante : deux 18, deux 17, un 16, cinq 15, cinq 14, trois 13, cinq 12, quatre 11, cinq 10, trois 9, deux 8, un 7, deux 6, un 5 et un 4.

Les très bonnes notes ne correspondent pas nécessairement aux bonnes copies d'écrit ; en particulier, un 18 a été attribué à une candidate qui n'avait pas la moyenne au problème sur les séries.

Même remarque qu'en 1960, les candidates ignorent presque toujours les démonstrations des théorèmes ou formules qu'elles utilisent, elles n'en connaissent même pas l'idée directrice. Il n'est pas question de savoir par cœur une question de cours. Mais il est impossible d'appliquer correctement un résultat si l'on ignore l'importance des hypothèses faites et, en outre, essayer de comprendre une démonstration est un excellent exercice de raisonnement. Les candidates ne doivent pas se contenter d'être de bonnes techniciennes, elles doivent pouvoir faire preuve d'initiative.

En analyse, la formule des accroissements finis et celle de Taylor semblent complètement délaissées, et si par hasard elles sont connues, il est inutile d'essayer d'obtenir même l'idée directrice de la démonstration.

Les incursions dans la partie nouvelle du programme ont rarement été couronnées de succès. Là encore, plus que le détail, il est nécessaire d'insister sur les idées essentielles ; le programme de géométrie et surtout celui d'analyse permettent de varier les exemples de structure. Les candidates sont d'excellentes machines à

calculer les valeurs propres, à condition cependant que l'on n'ait pas l'idée diabolique de multiplier, par exemple, la matrice par un scalaire. Mais il est très pénible de leur faire expliquer d'où provient ce déterminant caractéristique sur lequel elles se précipitent. Enfin une dernière remarque : pourquoi les déterminants d'ordre 3 ont-ils droit à un traitement particulier (la règle de Sarrus) qu'il sera impossible de généraliser et qui est utilisé même quand il existe une ligne possédant deux zéros ! S'il est plus facile de raisonner sur l'ordre 3, qu'au moins la généralisation à l'ordre n soit préparée.

Option Sciences Naturelles

28 candidates ont été notées de 8 à 18 : un 18, deux 17, deux 16, six 15, cinq 14, cinq 13, quatre 12, un 11, un 9 et un 8.

Pour ces candidates, par contre, on ne demande, en Mathématiques, que d'être de bonnes techniciennes. En général c'est le cas. La maladresse et la lenteur sont certainement un handicap pour l'écrit où elles sont livrées à elles-mêmes. A l'oral, un peu guidées et encouragées, elles s'en tirent très honnêtement. L'utilisation des différentielles semble cependant assez difficile ; en particulier, les candidates interrogées sur ce point ont été incapables de faire un changement de variables dans une équation différentielle.

RAPPORT SUR LE PROBLEME N° 2 DE L'OPTION MATHÉMATIQUES

(Correcteur : M. PERRICHET)

Répartition des notes des 138 copies corrigées et cotées de 0 à 60.

Avec un barème de correction très large (n'englobant pas une des parties du problème, non traitée par la presque totalité des candidates), les notes correspondant à la valeur intrinsèque des compositions se répartissent ainsi : un 47, un 40, puis des notes s'échelonnant assez régulièrement de 36 à 1, avec quinze notes inférieures ou égales à 5.

Après avoir relevé ces notes dans leur ensemble, voici la répartition des notes définitives : une note 53, une note 45, une note 41, huit notes de 38 à 34, seize notes de 33 à 29, trente-quatre notes de 28 à 20, cinquante et une notes de 18 à 9, dix-sept notes de 8 à 5, neuf notes de 4 à 0,5.

Il y a 22 notes au-dessus de la moyenne et 8 très proches.

Observations générales : Si cette épreuve portant sur la géométrie analytique et la géométrie est un peu moins mauvaise que l'an passé, on ne peut en conclure que le niveau des candidates soit meilleur. Cela tient à la facilité d'un certain nombre de questions du problème et, malheureusement, tous les défauts signalés l'an passé se retrouvent et souvent accentués.

A lire les copies, on est amené à se demander si les Mathématiques modernes, dont le but est de simplifier le classement des connaissances en dégagant les structures fondamentales, d'obtenir une plus grande efficacité dans l'étude des problèmes en mettant en évidence certaines analogies, n'aboutissent pas pour beaucoup de nos élèves à un résultat tout à fait opposé : à savoir, de rendre compliqué tout ce qui est simple.

Que de raisonnements inconsistants, que de phrases nébuleuses où le vocabulaire nouveau est mal utilisé, trahissant en définitive une grande ignorance !

Bientôt les élèves ne sauront plus regarder une figure, ni même la faire (la mise en place de résultats sur une figure ne les intéresse pas). Elles ne sauront plus observer une expression algébrique, l'interpréter, en dégager les propriétés.

Par exemple une courbe du second ordre perd toute existence réelle ; dans l'esprit des candidates, elle est associée à un symbole algébrique, une matrice, ce qui

conduit certaines d'entre elles à une page de calculs, d'ailleurs corrects, pour obtenir l'équation d'un cercle, alors que la connaissance de la signification géométrique des coefficients leur permet d'obtenir en deux lignes cette même équation. La relation de conjugaison de deux points est aussi maniée très lourdement, elle est même ignorée par certaines candidates qui, pour écrire que deux points M et M' sont conjugués par rapport à un cercle, écrivent l'orthogonalité du cercle et du cercle de diamètre MM' .

On applique finalement sans réflexion des mécanismes de calcul qu'une observation de la figure permettrait d'éviter : recherche analytique du centre d'une conique à partir de son équation, alors qu'il est connu d'après les données ; calcul d'une excentricité dans le § 2 ; établissement pénible de la relation $\overline{Mq} = -\overline{M\omega}$ dans le § 6 qui résulte immédiatement du fait que O, M, Q sont trois sommets d'un rectangle.

La maladresse, la longueur des calculs et l'inutilité de la plupart d'entre eux restent les plus graves défauts. En voici des exemples :

1° Au début du § 2, la relation $e = \frac{1}{\sin \varphi}$ est une évidence géométrique puisque

$\frac{\pi}{2} - \varphi$ est le demi-angle des asymptotes de l'hyperbole (H). On préfère, sans regarder la figure, calculer les éléments a et c de (H), ce qui représente plus de deux pages de calcul sur certaines copies, avec, le plus souvent, une conclusion inexacte.

2° Pour trouver l'équation de (H) dont on donne le foyer en O et le cercle principal, on n'utilise pas la directrice associée à O , mais le deuxième foyer O' , alors que la définition bipolaire conduit à une mise en équation pénible.

3° On ignore, ou on ne pense pas à utiliser l'équation d'une droite sous forme normale : $x \cos t + y \sin t - p(t) = 0$. Cela donne pourtant immédiatement l'équation de la directrice de (H), ainsi que l'équation de son axe non transverse.

4° On a toujours la manie de développer et d'ordonner toutes les équations implicites ; ce qui conduit, par exemple, à des calculs affreux pour trouver les points de (H) situés sur Ox , alors qu'il suffit de faire $\theta = 0$ dans l'équation en coordonnées polaires ou d'observer l'équation implicite sous sa forme initiale :

$$(x^2 + y^2) \sin^2 \varphi = [(x - a) \cos \varphi + (y - a) \sin \varphi]^2.$$

La solution $x = ay = 0$ est facile à dégager.

5° Pour trouver l'axe de la parabole $y = \frac{x^2}{a} - x$ (étudiée depuis la classe de Seconde), une candidate propose de chercher la polaire du point à l'infini de Oy !!!, calcul qui lui demande une demi-douzaine de lignes.

6° Les notions des candidates sur les coordonnées polaires sont très insuffisantes ou incertaines ; très peu ont été capables de trouver l'équation polaire de (H), alors que le foyer était au pôle et que la directrice et l'excentricité étaient connues. Au § 6, la recherche des coordonnées de Q ne demande aucun calcul, il suffit de savoir la signification géométrique des coefficients de l'équation normale d'une droite ou d'utiliser une méthode vectorielle ; or, on trouve dans les copies plus d'une page de calculs avec manipulation bien inutile de formules de changement d'axes de coordonnées. Définissant l'angle V du rayon vecteur et de la tangente, par sa tangente, les candidates ne peuvent obtenir rigoureusement la formule algébrique $\overline{Mq} = -\overline{M\omega}$; la plupart trichent, les plus honnêtes se contentent d'affirmer qu'en regardant la figure, on voit bien (?) que $\overline{Mq}$ et $\overline{M\omega}$ sont de sens contraires.

7° La recherche des enveloppes se fait toujours aussi maladroitement ; on dérive par rapport au paramètre, même si ce dernier figure algébriquement au second degré ; ou bien on garde deux paramètres, alors que la relation qui les lie est du premier degré par rapport à l'un d'eux.

8° Dans la représentation paramétrique d'une courbe où le paramètre φ ne figure que par $\operatorname{tg} \varphi$, non seulement on ne pense pas à poser $\operatorname{tg} \varphi = t$, mais, dans le calcul des dérivées de x et de y , on laisse dans chaque terme $(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)$ sans même le mettre en facteur.

Remarques particulières concernant le problème.

§ 1. — Il a été traité plus ou moins convenablement par la presque totalité des candidates, mais certaines ne reconnaissent pas une parabole (P) dans le lieu des centres C des cercles ; la mise en place de (P) est faite sans soin ; on ne signale pas la tangente en O, on ne précise pas le foyer qui est sur Ox.

Pour l'enveloppe des cercles (C), on oublie que Ox en fait partie et on donne comme résultat une cubique circulaire, souvent inexacte (ce qui empêche d'apercevoir sa décomposition).

On parle beaucoup de « déférente », mais le mot seul est resté dans les esprits ; il vaudrait mieux reconnaître que la famille des cercles (C) est extraite d'un réseau linéaire dont le centre est le milieu de OA et utiliser l'inversion laissant le réseau invariant.

§ 2. — C'est dans ce paragraphe que les maladroites s'accumulent : calcul de e , recherche des équations cartésienne et polaire de (H). Bien qu'une des directions asymptotiques de (H) soit toujours Oy d'après sa définition géométrique, on perd son temps à retrouver par le calcul ce point fixe à l'infini. Quant au point fixe où (H) coupe Ox à distance finie, il n'est pas trouvé dans beaucoup de copies.

La recherche des coniques (H) particulières est encore plus faible. Pour avoir le point C sur Ox, on se contente de faire $\varphi = 0$, ce qui donne bien le point d'abscisse a , mais ne donne pas l'origine O correspondant à $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Pour les hyperboles

équilatères, on se contente de dire qu'elles correspondent à $|\varphi| = \frac{\pi}{4}$, sans se soucier

de les mettre en place ; or, pour $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, elle dégénère en les deux axes Ox Oy et,

pour $\varphi = +\frac{\pi}{4}$, elle a pour centre B(2a, 2a) et pour équation :

$$(x - 2a)(y - 2a) - 2a^2 = 0.$$

Quant aux polaires de A par rapport aux (H), on se contente de dire qu'elles passent par O ; seules, trois ou quatre candidates voient qu'elles sont confondues suivant $x + y = 0$.

§ 3. — Une seule candidate est arrivée à trouver les coordonnées des deux points fixes. Quelques autres ont amorcé des calculs, mais à part trois ou quatre, ont vite renoncé. Le plus grand nombre n'ont rien rédigé sur cette question, mais peut-être beaucoup d'entre elles ont-elles perdu beaucoup de temps sur leurs brouillons.

Les coordonnées des points de (H) situés sur $y = x \operatorname{tg} \theta$ s'obtiennent facilement à l'aide de l'équation polaire de (H). L'équation des tangentes (on peut utiliser l'équation cartésienne) s'écrit :

$$\varepsilon x \cos \theta + (\varepsilon \sin \theta - 1)y + a - (x - a) \cotg \varphi = 0 \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Elle dépend bien d'un paramètre au premier degré : $\cotg \varphi$. Les deux points fixes forment sur la droite $x = a$ une division harmonique avec le point A et le point d'ordonnée : $-a \cotg \theta$.

Géométriquement, on peut, par une transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle de centre F et de rayon a , transformer les hyperboles (H) en cercles homothétiques tangents à $y = 0$ et $x = a$. La droite $y = x \operatorname{tg} \theta$ se transforme en un point à l'infini d'où l'on mène les tangentes aux cercles homothétiques ;

le lieu des points de contact comprend deux droites passant par le point $(a, 0)$. En revenant à la première figure, ces droites donnent deux points sur $x = a$.

On peut aussi remarquer que deux hyperboles (H) quelconques se correspondent dans une homologie de centre O, d'axe d'homologie $x = a$. La droite $y = x \operatorname{tg} \theta$ coupe deux (H) quelconques en deux points homologues et les tangentes en ces points se coupent bien sur l'axe d'homologie en des points fixes.

§ 4. — Les candidates non arrêtées par leurs erreurs antérieures et ayant su trouver l'équation de l'axe non transverse de (H) ont obtenu facilement la représentation paramétrique de l'enveloppe (E). Mais, par suite de la faiblesse en trigonométrie, très souvent dans les expressions de x et de y , on garde un mélange de fonctions trigonométriques de φ et 2φ sans voir que les formules sont homogènes en $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$ et permettent de prendre pour paramètre : $t = \operatorname{tg} \varphi$.

Pour la construction de la courbe, on oublie que c'est une enveloppe de droites et que, par suite, les tangentes sont connues ; en particulier le coefficient angulaire de la tangente : $\frac{y'}{x'} = -\cotg \varphi$ varie toujours dans le même sens et ceci permet

d'affirmer que le rebroussement est de première espèce ; dans la grande majorité des copies, on ne trouve aucune explication ou justification pour ce point stationnaire.

Les candidates ont été arrêtées par la mise en place de (E) par rapport aux données et à la parabole (P). En dehors du point de rebroussement $\left(t = -\frac{1}{3}\right)$ et du

point A ($t = 0$) où la tangente est parallèle à Oy, il fallait déterminer les points communs à (E) et (P) ; une seule candidate a pu se débrouiller de l'équation en t et montrer qu'elle n'avait pas d'autres racines que $t = -1$ correspondant au point B ($2a, 2a$) où la tangente passe en O et $t = +1$ correspondant au point B₁ ($-2a, 6a$), BB₁ étant en même temps la normale en B et la tangente en B₁ à (E).

§ 5. — Il était facile, mais ne pouvait être traité que par le petit nombre de candidates ayant obtenu des résultats exacts au § 4.

Le point C₀ $\left(\frac{2a}{3}, -\frac{2a}{9}\right)$ de (P), où la tangente a pour pente $\frac{1}{3}$, a été déterminé, mais aucune candidate n'a pu montrer que le cercle osculateur (Ω_0) en C₀ à (P) passe par O. (Ω_0) recoupe (P) en un seul point C, en dehors de C₀. En utilisant une propriété des cordes communes à un cercle et une conique, on peut même éviter la recherche de (Ω_0) ou de son centre. C₀C₁ est en effet symétrique en direction de la tangente en C₀ à (P) par rapport à l'axe de (P) ; elle a donc pour pente $-\frac{1}{3}$ et par suite C₁ est en O.

§ 6. — Il a pour but de généraliser pour une courbe quelconque (K) le résultat obtenu au § 5 pour (P).

Étant indépendante de ce qui précède, cette étude a été abordée par presque toutes les candidates. Les résultats demandés ont été obtenus plus ou moins partiellement, mais au prix de calculs vraiment extravagants. On ne sait pas utiliser le repère mobile OX, OY de vecteurs unitaires $\vec{I}, \vec{J}$, proposé dans l'énoncé.

Pourtant, une fois établi que $\vec{OQ} = r\vec{I} + r'\vec{J}$, on a immédiatement :

$$\frac{d\vec{OQ}}{d\theta} = (r + r'')\vec{J}$$

et le point Q₀ est stationnaire si $r_0 + r''_0 = 0$.

Si μ_0 est le centre de courbure de (K) en M₀, un calcul rapide montre que :

$$M_0\mu_0 = \frac{(r_0^2 + r_0'^2)^{1/2}}{2} = \frac{M_0N_0}{2}$$

si N₀ est le quatrième sommet du rectangle de sommet O, M₀, Q₀.

Le 22 juin 1961.

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES DE L'OPTION SCIENCES NATURELLES

(Correcteur : M. PERRICHET)

Répartition des notes des 58 copies corrigées, cotées de 0 à 40.

Les notes correspondant à la valeur intrinsèque des compositions s'échelonnaient assez régulièrement de 1 à 27 avec, de plus, une copie notée 32.

Elles n'ont été que légèrement augmentées. Voici la répartition des notes définitives : une note 36, 3 notes : 30, 29, 28, 8 notes de 21 à 25, 23 notes de 12 à 19, 23 notes de 1 à 8. A noter une coupure très nette (aucune note entre 8 et 12) entre le lot des copies médiocres et celui des copies tout à fait insuffisantes.

Observations générales : Le problème posé a sans doute plus gêné les candidates que celui de l'an passé, ce qui explique le plus grand nombre de notes comprises entre 1 et 10. Ceci n'est pas dû à des difficultés particulières glissées dans le problème, mais au fait qu'il exigeait une bonne connaissance de la trigonométrie, du calcul des dérivées et du calcul des primitives ; conditions non réalisées pour la plupart des candidates :

1° En trigonométrie, on ne s'aperçoit pas que $\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} = \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}$; on fait de longs calculs pour étudier le signe de $\cos^{2n} x - \sin^{2n} x$, alors que x varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$; où l'on trouve des formules surprenantes comme $\cos^{2n} x - \sin^{2n} x = (\cos 2x)^n$; à noter qu'une candidate désirant trouver la valeur de $\cos^{2n} x$ pour $x = 0$ préfère l'écrire $e^{2n \operatorname{Log} \cos x}$!

Dans un grand nombre de copies, on est arrêté par l'étude du signe de $(\sin x - \sin a)$ et, *a fortiori*, du signe de $z = \sin a - 2 \sin^3 x$. Les unes calculent z' et font le tableau des variations de z pour trouver les racines ; d'autres proposent des solutions graphiques en construisant $y_1 = \frac{\sin a}{\sin^2 x}$ et $y_2 = 2 \sin a$.

2° Les règles élémentaires du calcul des dérivées sont ignorées ; les dérivées de fonctions simples comme $\operatorname{tg} x$ ou $\operatorname{cotg} x$ pourraient être sues par cœur.

Trop de candidates sont incapables de calculer la dérivée de $\sin^n x$ pour laquelle elles proposent $n \cos^{n-1} x$ ou $n \sin^{n-1} x \cos^{n-1} x \dots$

3° Le calcul des primitives n'est pas plus heureux. Si l'inattention ou l'étourderie expliquent les erreurs dans les primitives de $\sin x$ ou $\cos x$, on est plus inquiet en voyant proposer $\cos x - \cos a$ comme primitive de $\sin a - \sin x$, alors que a est une constante.

L'ignorance du tableau des dérivées a fait perdre beaucoup de temps aux candidates, s'évertuant à trouver la primitive de $\frac{1}{\sin^2 t}$; elles posent en général $\operatorname{tg} t = u$,

mais quelques-unes ont préféré faire le changement de variable $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = u$, ce qui les conduit après beaucoup de calculs à $-\frac{1}{2} \left(\operatorname{cotg} \frac{t}{2} - \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)$ où elles sont bien incapables, vu leur faiblesse en trigonométrie, de reconnaître $-\operatorname{cotg} t$.

Remarques particulières concernant le problème.

I. § 1. — Dans l'étude de la fonction proposée, ou bien on ne signale pas la symétrie par rapport à $x = \frac{\pi}{2}$, ou bien on la trouve maladroitement [pour justifier

une symétrie par rapport à $x = h$, il vaut mieux en général substituer x et $2h - x$ que $(h - \alpha)$ et $(h + \alpha)$.

Beaucoup de candidates ont été incapables de calculer le minimum et de s'apercevoir qu'il était nul.

Très peu de copies signalent le cas $n = 0$, où la fonction est constamment nulle.

§ 2. — Beaucoup n'ont pas su utiliser l'étude du § 1 en formant $\sin^2 y + \cos^2 y$.

D'autres, ayant trouvé que x était nécessairement égal à $\frac{\pi}{4}$, sont incapables d'en

déduire la valeur de y ; elles tirent $y = \text{Arc sin} \left(2^n \sin^{n+1} \frac{\pi}{4} \right)$ de l'une des équations pour porter dans l'autre ! et n'arrivent pas à conclure.

Une ou deux candidates seulement ont aperçu la singularité du cas $n = 0$ où le système, au lieu d'une solution unique, admet une infinité de solutions : $x = y$.

§ 3. — Très peu de candidates ont vu que $2^{\frac{n}{2}} \cos^{n+1} x \geq \cos y$ s'écrit :

$$2^n \cos^{(2n+2)} x \geq 1 - \sin^2 y,$$

puis $2^n (\cos^{2n+2} x + \sin^{2n+2} x) \geq 1$ qui se trouve vérifiée d'après le § 1.

Il aurait fallu préciser que le signe $=$ avait lieu pour $n = 0$.

II. L'étude des fonctions a été correctement traitée dans quelques copies.

§ 1. — La fonction $\psi(x)$ était : $\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin a + \cos x$.

Beaucoup de candidates oublient la constante d'intégration ou se trompent dans sa détermination.

Le tracé de l'arc de courbe AB pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ n'est pas assez soigné; les pentes des tangentes en A et B ne sont pas calculées; $y'' = -\cos x$ fixait la concavité toujours tournée vers les y négatifs, ce qui éliminait toute inflexion dans le tracé.

La déduction de la courbe complète à partir de l'arc AB n'a pas en général été vue, ou bien a été mal justifiée. Si la symétrie est mise en évidence par le changement de x en $\pi - x$, la translation définie par le vecteur $(2\pi, 2\pi \sin a)$ n'a pas été dégagée du changement de x en $2\pi + x$.

§ 2. — L'expression de la fonction : $2 \cos x - \sin a \cotg x$ est en général exacte; mais les candidates oublient qu'elles l'ont obtenue par une intégrale définie et que, par suite, la dérivée est connue; elles calculent à nouveau cette dernière et quelques-unes se trompent.

Une ou deux candidates seulement ont su utiliser les résultats du 1° pour montrer que le maximum M vérifie : $M \geq \cos a$. L'égalité a lieu pour $a = \frac{\pi}{4}$ et l'abscisse

du maximum est alors $\frac{\pi}{4}$.

III. Un très grand nombre de candidates n'ont pas su établir la formule de récurrence du § 1, faute de penser à remplacer $\cos^2 t$ par $1 - \sin^2 t$ dans l'intégrale

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos^2 t \, dt}{\sin^n t}.$$

Pour les § 2 et 3, quelques candidates seulement ont essayé d'établir les formules demandées, mais la démonstration n'est jamais correcte, le raisonnement par récurrence n'étant pas compris.

Le 23 juin 1961.

RAPPORT SUR L'ORAL DE L'OPTION MATHÉMATIQUES

Interrogation de Mathématiques

(Interrogateur : M. PERRICHET)

42 candidates ont été interrogées. Les notes se répartissent ainsi : un 18, un 17, deux 16, trois 15, huit 14, six 13, six 12, quatre 11, cinq 10, quatre 9, deux 8.

La cotation a été indulgente pour tenir compte des modifications apportées cette année au programme, mais, malgré tout, le tassement des notes autour de 13 fait ressortir l'honnête médiocrité du concours, déjà sensible à l'écrit.

Volontairement, les problèmes posés à l'écrit ne concernaient pas les parties nouvelles du programme ; mais à l'oral presque toutes les candidates ont été interrogées à la fois sur les nouveaux et sur les anciens paragraphes du programme. Si, pour certaines, la solidité des connaissances était suffisante dans les deux cas, un trop grand nombre, comme on pouvait s'y attendre, n'avaient pas bien appris ou assimilé les nouvelles théories.

Ceci peut s'expliquer, d'ailleurs, par la parution tardive des nouveaux programmes et la décision également tardive des suppressions effectuées exceptionnellement cette année. Il faut espérer que nous ne serons plus l'an prochain dans cette période de rodage.

Le 30 juin 1961.

ENSEIGNEMENT DE L'ASTRONOMIE DANS LES CLASSES DE MATHÉMATIQUES ET DE MATHÉMATIQUES-TECHNIQUE

(Arrêté du 28 mars 1962)

Article premier. — A titre provisoire pendant l'année scolaire 1962-1963, un enseignement de l'astronomie sera donné dans les classes de Mathématiques et de Mathématiques-technique des lycées, lycées techniques et écoles normales, au cours de dix séances d'une heure.

Art. 2. — L'annexe du présent arrêté définit les modalités d'organisation et le programme de cet enseignement.

Art. 3. — Le directeur général de l'organisation et des programmes scolaires est chargé de l'exécution du présent arrêté.

Le Ministre de l'Education Nationale,
L. PAYE.

ANNEXE

I. — Modalités d'organisation

Pendant l'année scolaire 1962-1963, l'enseignement de l'astronomie dans les classes de Mathématiques « élémentaires » et de Mathématiques-technique sera donné par le professeur de Mathématiques et par le professeur de Sciences Physiques. La répartition des dix séances entre ces deux professeurs, les dates de ces séances seront fixées, au début de l'année scolaire, par le chef d'établissement, avec l'accord des professeurs intéressés.

Les heures correspondant à ces séances ne sont pas comprises dans l'horaire actuellement attribué aux différentes disciplines.

Ces mesures ne sont valables que pour l'année 1962-1963.

II. — *Programme provisoire* (année scolaire 1962-1963)

1° Description générale de l'Univers.

2° Sphère locale — Sphère des fixes — Mouvement diurne — Coordonnées célestes — Coordonnées géographiques terrestres.

3° Le Soleil. Mouvement propre apparent ; écliptique. Mouvement diurne du Soleil. Inégalité des jours et des nuits. Année tropique : les calendriers.

4° Le temps. Du temps solaire vrai au temps universel.

5° La Lune. Description physique. Phases. Rotation. Eclipses de Lune et de Soleil.

6° Le système solaire. Les planètes. Lois de Kepler et de Newton.

7° Les étoiles. Leurs distances à la Terre. Magnitudes. Renseignements tirés des spectres. Notre Galaxie ; les galaxies.

Inscription des élèves dans les classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Circulaire du 20 avril 1962

Une circulaire du 14 avril 1961 a réglementé l'inscription des élèves dans les classes de première année préparatoires aux Grandes Ecoles.

Les prescriptions de ce texte sont reconduites pour la prochaine rentrée scolaire, sauf celles qui concernent le calendrier des inscriptions, afin de permettre aux candidats de joindre à leur dossier le bulletin scolaire du troisième trimestre de la classe terminale suivie.

Aux dates indiquées dans la circulaire du 14 avril 1961 se substituent donc celles indiquées dans le tableau ci-dessous :

Calendrier des inscriptions dans les classes de première année préparatoires aux Grandes Ecoles en 1962

<i>Nature de l'opération</i>	<i>Période</i>
Constitution du dossier d'inscription par le candidat.	Dernière quinzaine de mai et première quinzaine de juin.
Dépôt du dossier auprès du chef de l'établissement choisi.	Première quinzaine de juin. Date limite : 15 juin au soir.
Examen des dossiers d'inscription.	Deuxième quinzaine de juin.
Notification de la décision prise.	30 juin au plus tard.
Confirmation par le candidat de son succès au baccalauréat :	
à la session normale ;	5 juillet au plus tard.
après l'oral de contrôle.	20 juillet au plus tard.

En conséquence, les bulletins scolaires du troisième trimestre des élèves des classes terminales des lycées devront être adressés aux familles pour le 9 juin au plus tard.

Si, faute de place, un proviseur est dans l'obligation de ne pas accepter le candidat, il lui délivrera une attestation qui lui permettra de demander son inscrip-

tion auprès du chef d'un autre établissement, sans que celui-ci puisse lui opposer la date de forclusion du 15 juin.

Afin d'éviter les candidatures multiples, MM. les chefs d'établissement voudront bien veiller particulièrement à ce que le dossier qui leur est remis avant le 16 juin soit constitué uniquement de pièces authentiques, à l'exclusion de toute photocopie ou copie certifiée conforme.

L'inscription dans les classes préparatoires de deuxième année, ainsi que les changements d'établissement à l'issue de la première année et le choix des concours demeurent réglementés par la circulaire du 16 mars 1960.

Durée de la scolarité dans les classes préparatoires

Je tiens à rappeler que pour les préparations étalées sur deux ans, aucun doublement de la classe de première année et aucun triplement de la classe de deuxième année ne seront autorisés, excepté en cas de maladie ou d'accidents graves dûment attestés par un certificat médical.

Ces mesures, qui ne s'appliquent pas aux préparations étalées sur une seule année scolaire, ont donc pour effet de limiter strictement à trois ans après le baccalauréat la durée de la scolarité dans les classes préparatoires, *ce qui interdit expressément le passage d'élèves ayant doublé une classe de deuxième année dans une autre classe préparatoire suivant un programme différent.*

Concours d'entrée aux Ecoles nationales d'ingénieurs Arts et Métiers

Le programme du concours d'entrée dans les Ecoles nationales d'ingénieurs Arts et Métiers, qui correspondait sensiblement jusqu'alors à celui du baccalauréat mathématiques et technique, a été profondément remanié par l'arrêté du 23 août 1961. Des instructions particulières viendront ultérieurement donner les précisions relatives aux conditions de recrutement des classes préparatoires aux Ecoles nationales d'ingénieurs Arts et Métiers.

Les parents d'élèves désireux de se documenter sur les diverses préparations organisées dans nos établissements devront être invités à se procurer la brochure intitulée « Documentation à l'usage des familles sur les classes préparatoires aux écoles scientifiques » (deuxième édition de la brochure n° 147 EP/Sd de l'Institut pédagogique national).

Je vous serais obligé de bien vouloir assurer la plus large diffusion à cette circulaire, notamment auprès des élèves intéressés et de leurs familles.

Le Ministre de l'Education Nationale,
Pour le ministre et par délégation,

Le directeur général de l'Organisation et des programmes scolaires,
J. CAPELLE.

COURS de MATHÉMATIQUES

J. MARVILLET

ALGÈBRE

GÉOMÉTRIE

CLASSE DE SECONDE

R. GIRARD, Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Janson-de-Sailly

P. LOUQUET, Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée de Biarritz

DEUX VOLUMES CONFORMES AUX PROGRAMMES

ALGÈBRE

1 vol. 17 × 23, 272 pages, plus 8 pages de lexique
et table des symboles S.P.

GÉOMÉTRIE

1 vol. 17 × 23, 204 pages, plus 8 pages de lexique
et table des symboles S.P.

ASTRONOMIE

**Nouvelles séries de diapositives couleurs
pour l'enseignement groupant 70 vues**

**Sous la direction de G. WALUSINSKI
en co-édition Armand Colin — Véronèse**

CATALOGUE SUR DEMANDE

ARMAND COLIN - 103, Bd St-Michel, PARIS-6^e

GAUTHIER - VILLARS

55, Quai des Gds-Augustins
PARIS VI^e — DANton 05-10

Nouveauté :

MATHÉMATIQUES

Classe de Première A', C, M, M'

ALGÈBRE - GÉOMÉTRIE

par H. POCHARD

Professeur agrégé au lycée du Parc Impérial, Nice

Conforme au programme officiel de 1961

15 X 21 cm, 310 pages, 194 figures 12 NF

Rappel :

L'ESSENTIEL DES MATHÉMATIQUES

par Charles VIATTE

L'ouvrage présente, en 300 pages, l'essentiel de ce qu'un élève du niveau de la classe de Sciences Expérimentales doit connaître en arithmétique, algèbre et géométrie. Il n'est pas pour autant un ouvrage scolaire, au sens strict du terme, car il a été écrit avec le souci de rendre service à diverses catégories de personnes :

- élèves travaillant seuls, ou par correspondance,
- élèves de Seconde, Première, ou de classes terminales de nos établissements scolaires, à qui une présentation nouvelle de certaines notions peut être utile,
- adolescents ou adultes désireux d'acquérir une formation scientifique de base, clef d'une promotion sociale rapide.

In-8, 322 pages, 101 figures 9,50 NF

L'ASSEMBLEE GENERALE DU 13 AVRIL 1962

La séance est ouverte à 9 heures, sous la présidence de A. Revuz.

1° *Dépouillement des votes* : Le nombre élevé des participants ne permet pas un dépouillement immédiat. L'assemblée décide de confier le travail à une Commission qui se réunira le 29 avril chez A. Revuz.

2° *Rapport d'activité et modification des statuts* : A. Revuz voit une preuve de la vitalité de l'A.P.M. dans le succès de ces journées angevines, grâce en particulier à la diligence de la Régionale d'Angers et de son Président Le Ménager. De même l'accroissement très sensible du nombre des votants (433 en 1961, plus du double en 1962) montre l'intérêt que prennent les Collègues à la vie de l'Association.

La plus grande activité des Régionales est une des principales causes de l'accroissement des effectifs de l'A.P.M. M. Thovet, de la Régionale de Lyon, rend compte de ce qui a été fait (cf. *Bulletin* 221, p. 123) : il est très remarquable que les nouveaux inscrits enseignent, en majorité, dans les Collèges d'Enseignement général.

Mlle Vervaecke, de la Régionale de Lille, espère une reprise d'activité de ce groupe. A ce propos, il est rappelé que, grâce à l'adressographe de l'I.P.N., le Bureau de l'A.P.M. peut fournir aux organisateurs des Régionales des jeux d'enveloppes adressés aux membres de l'A.P.M. résidant dans un département quelconque.

Les modifications aux statuts et au règlement intérieur ont pour but de faciliter le travail des Régionales et leur liaison avec le Comité. Il n'est pas présenté d'objections en séance. Voir plus loin le résultat du vote.

Le travail des Commissions justifie les remarques suivantes :

1) La plus grande publicité pour les travaux de la Commission des programmes est souhaitée. Il est rappelé que c'est sur la demande de l'Inspection générale que les nouveaux programmes de Mathématiques Élémentaires n'ont pu être publiés dans le *Bulletin* 221. A l'avenir, l'Assemblée recommande à la Commission de publier périodiquement une analyse de ses travaux.

2) La lenteur des travaux du dictionnaire est unanimement regrettée ; les efforts du Comité devront être multipliés pour que soit fourni aux professeurs cet outil indispensable ; « il est urgent que nous parlions tous la même langue », écrit un correspondant.

3) Deux nouvelles Commissions devront être constituées : l'une pour les problèmes de formation et de recrutement des maîtres, l'autre, comme le propose Mlle Vervaecke, pour s'inquiéter de l'enseignement préparatoire aux Mathématiques tel qu'il est effectivement donné dans l'enseignement du Premier Degré.

3° *Rapport financier* : De la part de M. Nicolas, absent, M. Walusinski donne les précisions suivantes. A la date du 8 avril 1962, 3 585 cotisations avaient été perçues ; parmi elles, il faut compter environ 700 adhésions nouvelles. Un certain nombre de Collègues sont d'ailleurs en retard dans le renouvellement de leurs cotisations ; une circulaire leur sera adressée en mai ; ils sont au nombre de 700 environ. L'expérience montre que la plupart des retardataires le sont seulement par négligence ou étourderie ; quoi qu'il en soit, les circulaires de rappel représentent une dépense de 175 NF et surtout un travail supplémentaire qui vient alourdir les charges de notre petite administration.

Celle-ci se trouve un peu simplifiée par le travail du trésorier administratif, M. Ferracci. La rétribution de ses services explique la légère augmentation des frais

de gestion. En raison de l'accroissement de nos effectifs, il n'était plus possible au Trésorier d'assurer seul cette tâche essentielle et ingrate.

La souscription pour le cours de l'A.P.M., par M. Revuz, s'élève, au 8 avril 1962, à 13 625 NF représentant près de 1 200 souscriptions (certaines augmentées de contributions volontaires). Compte tenu de ces résultats acquis et des ventes escomptées, un tirage de 5 000 exemplaires peut être envisagé.

M. Walusinski donne, à ce propos, quelques détails sur l'organisation du travail d'édition. Des éditeurs professionnels auraient volontiers accepté d'assurer cette édition ; les prix de vente, pour les adhérents, auraient été tout différents. Le Comité et le Bureau ont préféré conserver à l'entreprise son caractère propre : une nouvelle manifestation de la vitalité de l'A.P.M. L'Assemblée approuve cette décision.

Peut-être a-t-elle un revers : le travail de composition, d'édition, est lent. On peut espérer que toute la composition sera terminée avant juillet. On ne peut promettre la livraison des ouvrages souscrits avant les vacances, mais on doit l'espérer pour les mois suivants. Le Bureau compte sur la compréhension des souscripteurs ; il est le premier à regretter les retards du *Bulletin* et du livre qu'il fera tout son possible pour réduire.

4° *Les cinq heures en Seconde et Première* : Lors de sa session de printemps, le Conseil Supérieur (qui a adopté alors les nouveaux programmes de la Classe de Mathématiques) a adopté le texte d'un arrêté fixant à cinq heures en Seconde et Première A', C, M et M' l'horaire hebdomadaire de Mathématiques à partir de septembre 1962. Mais le texte n'a pas encore reçu la signature du Ministre*.

Le prochain Bureau de l'A.P.M. aura donc besoin, très vraisemblablement, d'utiliser l'appui massif des Collègues qui s'est manifesté à ce sujet. Rappelons que le vote portait sur la question simple : « Approuvez-vous l'action du Comité pour la mise en vigueur à la rentrée 1962 de l'horaire de 5 heures en Seconde et Première A', C, M, M' ? » Les résultats du vote sont les suivants : suffrages exprimés 1 070 ; 1 054 oui, 4 non, 9 abstentions.

L'Assemblée générale confirme que le Comité doit considérer qu'il a la confiance de l'ensemble de l'Association pour réclamer et obtenir la réalisation de cette réforme jugée indispensable par tous.

5° *La formation continue* : Walusinski rappelle que le Comité de l'A.P.M. a été dans les premiers, en 1956, à organiser, avec le précieux concours de la Société Mathématique de France, des conférences spécialement destinées aux professeurs en exercice. Depuis, ces cycles de conférences sont devenus presque traditionnels et, depuis deux ans, notre Président A. Revuz assure un véritable cours. En même temps, à Lille, à Angers, à Strasbourg, à Lyon, à Bordeaux, à Nancy, des réunions semblables sont organisées par les Régionales de l'A.P.M. en étroite liaison avec les professeurs de l'Enseignement Supérieur.

La conférence générale sur la formation et le recrutement des maîtres des disciplines scientifiques, réunie les 3 et 4 décembre 1960, sur l'initiative conjointe de l'A.P.M., de l'Union des Physiciens et de l'Union des Naturalistes, adopta, entre autres, un vœu sur la *formation continue des maîtres* (cf. *Bulletin* 214 bis, p. 232). On sait que les conclusions de cette conférence ont été présentées à notre administration et on peut regretter qu'elle n'en ait pas tenu compte. Ce n'est pas une raison suffisante pour ne pas réitérer nos demandes.

Les circonstances peuvent être plus favorables. Lors d'un colloque organisé par l'Association pour l'expansion scientifique, le Ministre de l'époque, M. Paye, a reconnu la nécessité du « recyclage » de tous les professeurs.

Un vœu a été rédigé en reprenant les suggestions présentées page 132 dans le *Bulletin* 221. La discussion s'engage et est particulièrement animée. M. Durand (Angers), faisant remarquer que ces séances de « recyclage » font ou devraient faire partie du service normal d'un professeur, ne peuvent être placées en dehors de ces

* Et cela ne s'est pas encore produit à la date du 6 mai 1962.

heures de service et s'ajoutant à ces heures. Il est nécessaire, pense-t-il, de réagir contre la facilité avec laquelle l'administration considère que nos initiatives bénévoles suppléent à sa carence.

Walusinski reconnaît les abus auxquels donne lieu la situation présente ; le cours complet assuré depuis deux ans par M. Revuz, la rédaction de ce cours au fur et à mesure par Mme Revuz, le travail collectif bénévole de l'édition et de la distribution, tout cela représente un service qui devrait être, au moins pour une part, pris en charge par l'administration. Il faut reconnaître que si toute l'entreprise était placée dans le cadre administratif, nous risquerions d'y perdre plusieurs degrés de liberté : quant à l'organisation des conférences, quant à la participation en tant qu'auditeurs. Une formule souple paraît préférable.

L'unanimité se fait sur la rédaction définitive suivante (le membre de phrase en italique a été ajouté pour répondre aux justes observations de M. Durand et faire savoir que les congés statutaires ne doivent pas être considérés par l'administration comme la mine aux solutions de facilité) :

Vœu sur la formation continue.

L'Assemblée générale de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, réunie à Angers le 13 avril 1962, considérant :

— que toutes les tentatives de réforme de l'enseignement se heurtent à l'obstacle majeur de la pénurie de maîtres qualifiés ;

— que la défense et le progrès de l'enseignement public en général et de l'enseignement des Mathématiques en particulier dépendent largement de la haute qualification scientifique et pédagogique de ses maîtres ;

— que l'aménagement des voies de recrutement sera facilité par l'amélioration simultanée des conditions économiques faites aux maîtres et des meilleures conditions de travail ;

considérant d'autre part :

— que la formation des maîtres des enseignements du Second Degré classique, moderne ou technique, court ou long, et de l'Enseignement Supérieur est une des tâches fondamentales de l'Enseignement Supérieur ;

— que la rénovation nécessaire des programmes et des méthodes de l'enseignement des Mathématiques oblige tous les maîtres en exercice à renouveler leurs connaissances de façon permanente ;

— que les initiatives prises à ce sujet par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, en liaison et avec l'aide de nombreux professeurs des diverses Facultés et l'aide de la Société Mathématique de France, ont ouvert la voie à une coopération fructueuse entre maîtres des divers ordres d'enseignement, mais que celle-ci ne pourra être étendue, dans le temps et dans l'espace, faute de moyens financiers suffisants,

émet le vœu :

— que le principe de la formation continue des maîtres soit officiellement reconnu par l'Administration de l'Education Nationale ;

— que cette reconnaissance comporte :

a) la création d'une *Commission Nationale de l'Enseignement Mathématique*, COMPOSÉE de quatre professeurs de l'Enseignement Supérieur, de quatre représentants de l'Administration de l'Education Nationale et de quatre représentants des professeurs de Mathématiques (dont les noms seront proposés par le Bureau de l'A.P.M.E.P.), PRÉSIDÉE par un professeur de l'Enseignement Supérieur, et CHARGÉE de créer, dans chaque Académie, un ou plusieurs *groupes de travail* réalisant la même coopération tripartite

et organisant effectivement, selon les possibilités locales, cours, conférences ou colloques ouverts à tous les professeurs titulaires ou stagiaires ainsi qu'aux étudiants des I.P.E.S., le nombre des réunions étant au moins égal à deux par trimestre ;

b) le dégageant des crédits suffisants pour le fonctionnement de la C.N.E.M. et de ses groupes de travail : indemnités décentes aux conférenciers, frais de déplacement et *indemnités décentes aux participants dans le cas où ces séances seraient organisées en dehors des heures normales de service* ;

c) le financement et l'organisation par la C.N.E.M. de un ou plusieurs stages d'automne permettant à des professeurs volontaires de suivre, pendant une période de 10 à 15 jours, une série de conférences spécialement conçue à leur intention.

6° *Questions diverses* : Un échange de vues a lieu sur les programmes des classes terminales. Pour Sciences Expérimentales, le renforcement de l'horaire et du niveau mathématique est généralement souhaité. En Philosophie, un enseignement mathématique sérieux et nouveau serait utile à certains élèves, sans doute pas à tous ; le système des options est préconisé.

Un Collègue pose la question des passages d'une classe à une autre en fin d'année. Dans les discussions des Conseils de classe, une pondération des diverses disciplines paraîtrait souhaitable. Les avis sont partagés : certains craignent une réglementation excessive.

Avant de clore la séance, le Président exprime la satisfaction de tous pour la manière dont l'Assemblée a été organisée par les Collègues angevins, sous la présidence active de M. Le Ménager. Le succès de ce deuxième Congrès provincial (après Aix 1960) suggère que, les années prochaines, on se réunisse dans d'autres régions : en Alsace (en 1963), à Grenoble (en 1964) ? Le Comité sera invité à poser tout de suite la question.

Séance levée à 12 heures.

Résultats des votes.

Pour les votes sur les questions à l'ordre du jour, voir plus loin le compte rendu de la réunion du Comité.

Elections au Comité : Le dépouillement a eu lieu le 29 avril sous la présidence de A. Revuz.

Suffrages exprimés : 834. Ont obtenu : CROZES 703, RAMIS 652, SIROS 607, SAMUEL 604, LE MÉNAGER 585, Mlle VERVAECKE 569, Mme AUDIN 559, Mlle BIARD 546, MUGNIER et VISSIO 496, CASSE 436, CHASTENET DE GÉRY 428, GASNAULT 412, Mme FORGEAUD 260. Ont obtenu une voix : Caquet, Fabry, Vibes, Villier, Sellier, Aunis, Galmard, Adler, Paul Lévy, Riche, Mme Brailly, Pochard, Demont, Zettwog, Walusinski, Durix, Abdelaziz, Maze, Braconier, Glaeser et Revuz (2 voix).

La Commission de dépouillement, tenant compte de l'adoption de la modification aux statuts, déclare élus les neuf premiers de la liste. Comme il y a deux neuvièmes *ex-aequo*, se référant à un exemple semblable, elle déclare qu'ils sont tous deux élus.

LES JOURNEES ANGEVINES

Le seul compte rendu technique de l'Assemblée générale 1962 serait tout à fait incomplet sans un récit et une description au moins partiels des journées angevines au cours desquelles cette Assemblée eut lieu.

Il faut d'abord rappeler que c'est seulement le Comité du 21 janvier qui choisit de tenir à Angers notre Assemblée 1962. Nos Collègues d'Angers, et spécialement M. Le Ménager, se mirent aussitôt à la tâche, et, grâce à leur diligence et à leur dévouement, les quelque soixante à soixante-dix participants purent, du jeudi 12 au samedi 14 avril, goûter tous les avantages de l'hospitalité angevine.

En arrivant à Angers, nous étions d'abord reçus par M. Le Ménager et ses Collègues qui avaient retenu nos places à l'hôtel. Pour les dames, il y avait même des fleurs !

A 14 h. 30, le jeudi, s'ouvrait la première séance des journées d'études. En l'absence du président, retenu par ses cours, M. HUISMAN, ancien président, donnait la parole à M. MALINVAUD, Directeur de l'Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique. Le conférencier présenta en raccourci les domaines recouverts par le *calcul économique* : évaluation des ressources rares (et d'abord comptabilité des ressources existantes) ; préparer une décision de choix dans les entreprises possibles (autrement dit, fixer un programme économique). M. Malinvaud note, en passant, que l'emploi des Mathématiques dans les sciences économiques abstraites est déjà ancien, mais que la révolution mathématique des dernières décades a profité au développement des sciences économiques théoriques.

L'exposé est suivi avec d'autant plus d'attention que les professeurs ont largement besoin d'information sur ces nouveaux domaines d'application des Mathématiques. Le conférencier doit ensuite répondre à plusieurs questions.

Avant la seconde conférence, M. le Proviseur du Lycée David d'Angers, qui nous offre l'hospitalité, nous offre également le verre de l'amitié. Bonne occasion de le remercier et aussi de le féliciter, ainsi que M. l'Intendant, et tous les Collègues angevins, pour la belle installation de cette nouvelle annexe du Lycée où nous sommes réunis. En passant, les Collègues admirent les travaux du club astronomique du Lycée David d'Angers (qui possède un observatoire), ceux du Lycée Poincaré de Nancy (professeur : M. Mougenot), du Lycée de Sèvres (professeur : Mlle Clavier) et du Lycée de St-Cloud.

La seconde conférence, par M. KRÉWÉRAS, Directeur d'Etudes à la Faculté de Droit et des Sciences Economiques de Paris, traite de l'enseignement des Mathématiques pour les économistes. Il en rappelle d'abord l'organisation : enseignement étalé sur trois années, aux programmes encore assez libres pour la 3^e année. Il s'agit de sortir certains étudiants d'une ignorance abusive du calcul, puis de les faire participer à ce que cet enseignement a de culturel. La principale difficulté est due à l'inégalité de niveaux des étudiants ; les meilleurs s'impatientent devant ce qui est, pour eux, trop élémentaire. L'assistant est présent au cours du professeur, qui dure 1 h. 30 ; il dirige ensuite des séances de travaux pratiques par petits groupes de 10 à 20 étudiants (1 h. 30).

L'expérience montrera comment cet enseignement doit être peu à peu amélioré. Dès maintenant, on peut regretter l'ignorance presque complète dans laquelle sont laissés les bacheliers sur les questions les plus simples du calcul des probabilités.

Après cette première après-midi bien remplie, et la matinée suivante occupée par l'Assemblée générale, les Collègues se retrouvent, le vendredi après-midi, pour suivre deux exposés plus techniques. Le premier est de M. THONET, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Poitiers, sur « L'algèbre linéaire en comptabilité nationale ». Le second, qui marquera la conclusion et le couronnement de ces travaux sérieux, par M. BOUZITAT, Directeur d'Etudes à la Faculté de Droit et des Sciences Economiques de Paris, est intitulé : « Modèles mathématiques des problèmes de décision » ; M. Bouzitat expose les principes et la méthode des programmes

linéaires. Les Collègues, dont certains avaient déjà eu l'occasion de l'entendre, ont suivi avec un intérêt passionné son exposé clair et précis que nous nous efforcerons de rédiger pour le publier ici.

Le Président, au nom de toute l'A.P.M., et des participants en particulier, remercie les conférenciers pour leur précieux concours à nos journées. Ce faisant, ils ont bien servi la cause de notre enseignement, contribuant à nous faire mieux saisir dans quelle voie nous devons orienter notre enseignement élémentaire pour les futurs étudiants des sciences économiques. C'est aussi la place de remercier M. Barbut qui a sollicité les conférenciers au nom de l'A.P.M.

Les Collègues ne se quittent pas après ces heures sérieuses. On excusera, dans ce compte rendu, une énumération un peu vague des divers crus d'Anjou dégustés entre deux conférences ; l'ensemble, certainement dénombrable, prend, avec le recul, la puissance du continu. Mentionnons, en tout cas, le vin d'honneur offert par M. le Maire d'Angers, dans le grand salon de l'Hôtel de Ville. Et n'oublions pas la photo du congrès dans la presse locale, ni, pour les amateurs, une démonstration de « boule de fort », cette spécialité angevine.

Les familles des congressistes avaient d'ailleurs déserté la salle de conférences pour suivre la visite de la ville organisée avec autant d'obligeance que de compétence par M. le Délégué départemental au tourisme. Les professeurs assidus aux conférences eurent ainsi écho des merveilles de la Tapisserie de l'Apocalypse, l'une des richesses du château du Roi René.

Enfin, le samedi 14, par un temps presque printanier, mais frais, départ pour l'excursion. A la Centrale thermique nucléaire E.D.F. 1 de Avoine, l'A.P.M. fut reçue par un Technicien qui voulut bien, dans un exposé remarquable, nous décrire l'installation et les projets que, du Belvédère, nous pûmes ensuite admirer. Une fraîcheur toute printanière (!) nous faisait déjà rêver au bon feu que la Dame de Montsoreau avait préparé à notre intention. Dans la grande salle de son château, il fallut pourtant la chaleur de l'amitié et des vins d'Anjou pour éviter à ce banquet de rester, dans nos mémoires, comme un souvenir d'hiver. Les architectes de Montsoreau n'avaient pas prévu le chauffage central, ni les frimas d'un printemps en retard. On en fut quitte pour garder ses manteaux et rire ou discuter plus fort. A la table d'honneur, à côté de notre Président, on pouvait voir M. le Recteur de l'Académie de Nantes, qui salua l'assistance dans une charmante allocution, M. l'Inspecteur d'Académie du Maine-et-Loire, M. le Maire d'Angers et M. le Délégué au Tourisme, qui nous raconta la triste ou plutôt sinistre histoire de la Dame de Montsoreau.

Au retour, visite des caves et réception à Beaulieu-sur-Layon.

Les journées angevines, réussies de bout en bout, étaient terminées. Remerciement à Le Ménager et à ses Collègues. A noter également la question la plus souvent posée en se quittant : où auront lieu les journées A.P.M. 1963 ?

Le *Bulletin* se fera un plaisir de faire écho aux judicieuses propositions qui lui seront faites à ce sujet.

G. W.

Réunion du Comité

(Dimanche 13 mai 1962)

Présents (membres élus) : Mlle AÏTOFF, Mme AUDIN, M. BARBUT, Mlle BIARD, MM. CHAZAL, CHEVALLIER, CLUZEL, Mlle DEROO, Mme DUBOIS-VIOLETTE, MM. DUMONT, GÉNESTINE, GILBERT, GIRARD, LE MÉNAGER, Mlle LONJARET, MM. MUGNIER, POITOU, RAMIS, SAMUEL, SIROS, Mlle VERVAECKE, MM. VISSIO, WALUSINSKI.

Membres du Bureau sortant : Mlles CLAVIER, MASSON, MM. NICOLAS, REVUZ et M. FERRACCI (Trésorier administratif).

Représentants des Régionales : DELPLA (Nancy) ; ROSSAT-MIGNOD (Paris).

Excusés : M. CROZES, Mlle FÉLIX, MM. FOUCHÉ, LEGRAND, Mlle MINOIS.

La séance est ouverte à 9 h. 30, salle P.-Langevin (Institut Pédagogique National), sous la présidence de A. REVUZ.

1° Le Président salue les nouveaux membres du Comité et exprime la satisfaction de tous les participants aux journées d'Angers pour leur parfaite réussite. Le Bureau et le Comité sont certains d'exprimer l'avis général en remerciant notre Collègue LE MÉNAGER pour la part déterminante qu'il a prise à cette organisation. Au nom de l'A.P.M., le Président REVUZ lui remet, en souvenir, les volumes de *l'Histoire générale des Sciences*.

A. REVUZ signale aussi l'importance des votes acquis par l'Assemblée générale. Il faut se féliciter du grand nombre des votants, tant pour le référendum que pour tous les autres votes.

Les résultats des votes sur les diverses questions posées s'établissent ainsi, pour 842 votants :

I. Rapport d'activité	pour 832, contre 2, abstentions 8
II. Rapport financier	pour 815, contre 0, abstentions 17
III. Commission des Programmes ..	pour 813, contre 3, abstentions 22
IV. Réforme des statuts	pour 703, contre 7, abstentions 100
V. Règlement intérieur :	
a) Régionales	pour 721, contre 3, abstentions 92
b) Election du Comité	pour 641, contre 13, abstentions 136
c) Frais de déplacement	pour 663, contre 13, abstentions 117

2° **Election du Président.** — M. WALUSINSKI rappelle qu'après avoir été occupé par des professeurs de lycée, le poste de président l'a été depuis deux ans par notre Collègue REVUZ, de l'Enseignement Supérieur. Il présente, pour le remplacer, la candidature de notre Collègue GILBERT qui suit de près, depuis un an, le travail du Bureau et qui serait le premier président de l'A.P.M. à exercer dans un lycée technique.

Aucune autre candidature n'est présentée.

Le scrutin a lieu à bulletins secrets comme de coutume ; quatre excusés, M. CROZES, Mlle FÉLIX, MM. FOUCHÉ et LEGRAND, ont adressé des délégations de vote qui sont acceptées. Il y a ainsi 27 votants.

Obtiennent : M. GILBERT (26 voix), WALUSINSKI (1 voix).

A. REVUZ félicite notre Collègue GILBERT, se réjouissant de voir ainsi affirmer un caractère essentiel de l'A.P.M. : grouper les professeurs de Mathématiques de tous les ordres d'enseignement. Il lui cède le « fauteuil ».

M. GILBERT remercie les membres du Comité de la confiance qu'ils lui ont témoignée. Il tient à rendre hommage au travail du Président sortant et il est chaleureusement applaudi.

3° **L'élection du Bureau** se fait ensuite à l'unanimité. On en trouvera la liste au dos de la couverture du présent *Bulletin*.

A propos des tâches de la Commission sur la formation des maîtres, un échange de vues a lieu, auquel participent MM. SAMUEL et POITOU, sur les raisons qui écartent les jeunes gens de l'enseignement. A propos des mesures partielles d'urgence pour récupérer des professeurs, il est certain qu'aucune mesure envisagée ne mène bien loin, mais la réunion de toutes les ressources doit permettre de surmonter la crise actuelle moins malaisément.

Reprenant une suggestion de Mlle VERVAECKE lors de l'Assemblée générale, une Commission de liaison avec l'enseignement du Premier Degré est constituée. Son premier but sera d'information réciproque.

4° **La question des cinq heures.** — M. WALUSINSKI fait part d'informations qu'il a pu recueillir dans les services du Ministère ; l'ancien Ministre aurait refusé de signer l'arrêté des 5 heures en Seconde et Première A', CM, M' à la suite des attaques dont il a été l'objet de la part de la Société des Agrégés qui lui reprochait d'accroître les horaires de Mathématiques alors qu'il y a pénurie de professeurs. Que cet argument ait été employé de façon inopportune, on peut en discuter. Mais le fait est là : l'arrêté n'a pas été signé alors que, budgétairement, par exemple, rien ne s'oppose à sa signature. Il faut espérer, de la part du nouveau Ministre, plus de détermination et de lucidité. En conclusion, M. WALUSINSKI propose un texte de motion qui invite le Bureau à faire une démarche pressante pour obtenir les 5 heures en liant cette réforme à la mise en route sérieuse de moyens pour alléger la tâche des professeurs en exercice.

La discussion s'engage sur ce texte. Les paragraphes 4, 5 et 6 (fin des attendus) sont modifiés sur la suggestion de Mlle MASSON et de M. REVUZ ; ainsi exprimerons-nous sans ambiguïté la lassitude de nos Collègues appelés toujours à multiplier leurs efforts sans que, du côté de l'Administration, aucune mesure ne vienne nous dédommager ou nous aider.

M. LE MÉNAGER suggère que la question soit posée de l'abrogation ou de la modification des instructions sur les cahiers de textes et les devoirs (circulaires du 3 mai 1961) ; mais la majorité du Bureau incline à penser que ces instructions seront plus sûrement ensevelies sous l'oubli qu'elles méritent en n'en parlant plus.

Après correction, le texte suivant est adopté à l'unanimité :

Le Comité de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (A.P.M.E.P.), réuni le 13 mai 1962 à l'Institut Pédagogique National,

constate qu'à cette date, aucun texte officiel n'est venu sanctionner le vote du Conseil Supérieur de l'Education Nationale de mars dernier qui fixait à cinq heures l'horaire hebdomadaire de Mathématiques dans les classes de Seconde et Première A', C, M et M' ;

rappelle que le référendum organisé parmi les 3 800 membres de l'Association a montré l'accord unanime sur la nécessité de cet horaire ;

signale le mécontentement et la fatigue des professeurs devant l'absence de toute mesure susceptible de les aider dans leur tâche, celle-ci étant d'autant plus pénible que les effectifs des classes sont excessifs et les horaires étiés en égard aux programmes ;

rappelle encore que, dans le souci exclusif des élèves, les professeurs de Mathématiques assurent depuis des années de lourds services supplémentaires malgré le taux insuffisant des rémunérations ;

met en garde l'Administration de l'Education Nationale contre les difficultés supplémentaires qu'elle s'attirerait, et dont elle serait seule responsable, si, faute de mesures concrètes pour les aider dans leur tâche à la rentrée de 1962, les professeurs de Mathématiques refusaient tout service supplémentaire au-delà des heures réglementairement dues ;

mandate en conséquence son Bureau pour qu'il fasse connaître au Ministre de l'Education Nationale l'urgence des réformes suivantes :

1) publication avant le 1^{er} juin 1962 de l'arrêté fixant à cinq heures l'horaire de Mathématiques dans les classes de Seconde et Première A', C, M et M' ;

2) étude d'urgence de tous les moyens à mettre en œuvre pour utiliser l'ensemble des diplômés qualifiés pour l'enseignement et, en particulier : a) pendant la durée du service militaire obligatoire de ces diplômés ; b) possibilité de faire assurer dans des conditions humainement et économiquement satisfaisantes des demi-services par des retraités, des femmes ayant des charges de famille, etc... ;

3) création d'une Commission Nationale de l'Enseignement Mathématique (C.N.E.M.) ayant pour objet d'organiser, avec des moyens matériels suffisants, la formation continue des maîtres en exercice et d'étudier toutes les mesures à mettre en œuvre pour favoriser le recrutement de nouveaux maîtres et améliorer leur formation, ceci, en particulier, grâce à une augmentation massive des effectifs des Ecoles Normales Primaires et, plus généralement, en reprenant et en développant les conclusions de la « Conférence générale sur la formation et le recrutement des maîtres des disciplines scientifiques » (Paris, 3 et 4 décembre 1960).

Le Comité invite son Bureau à attirer l'attention du Ministre de l'Education Nationale sur l'urgence de ces réformes et sur leurs caractères complémentaires :

Réformes urgentes, car à n'en rien faire on risque de compromettre gravement et durablement la formation scientifique de milliers de jeunes gens dont la qualification future est la seule chance de voir un jour diminuer les difficultés présentes ;

Réformes complémentaires, car les professeurs ne pourront continuer à consentir des efforts supplémentaires épuisants si des mesures ne sont pas immédiatement prises pour leur en donner un juste dédommagement et, au moins, améliorer les conditions dans lesquelles, par amour de leur métier et par sens bien compris de l'intérêt général, ils souhaitent se perfectionner.

A l'occasion des démarches que le Bureau devra faire, Mlle AÏTOFF suggère qu'il soit proposé une translation de quelques questions du programme de Seconde A', C, M, M' en Première, cette classe étant relativement moins chargée que l'autre (on y est amené, en pratique ; il vaudrait mieux que tout le monde fasse la même translation).

WALUSINSKI propose également de demander des précisions sur le taux de la rémunération des professeurs qui assureront les dix heures d'astronomie en Mathématiques Élémentaires ou Technique.

5° Questions diverses. — Le Trésorier administratif donne quelques précisions sur l'état de nos finances. Plus de 3 600 cotisations sont payées ; les derniers retardataires vont être sollicités et l'effectif dépassera certainement les 4 000.

Les publications à venir sont les suivantes : la brochure Balibar en mai, le Bulletin 223 au début de juin. En raison du travail à effectuer pour la publication du cours de M. REVUZ, il n'est pas possible de prévoir un autre Bulletin avant la fin de l'année scolaire (voir plus loin la note sur la rédaction).

La prochaine réunion du Comité est fixée en principe au dimanche 14 octobre.

La séance est levée à 12 h. 30.

Le secrétaire : G. W.

Coups d'œil sur un scrutin

Usant, ou abusant, du privilège qui consistait à participer au dépouillement des votes à notre Assemblée 1962, je voudrais citer quelques remarques présentées par des Collègues. Je me réserve la possibilité d'ajouter éventuellement quelques commentaires.

Auparavant, je voudrais cependant exprimer la satisfaction du Bureau devant une participation d'un plus grand nombre d'adhérents aux votes essentiels. Pour les responsables de l'A.P.M., la lecture des remarques très diverses ajoutées aux bulletins de vote est fort instructive : suggestions pour les programmes, pour la rédaction du *Bulletin*, etc... Rappelons un nombre qui est éloquent : plus de 250 bulletins sont accompagnés de commentaires allant de trois lignes à trois pages. Il est malheureusement difficile de donner une analyse complète de cette documentation. Ce qui suit est un choix (arbitraire par conséquent, comme le dira notre Collègue P. cité à la fin de cette note).

Le référendum sur les 5 heures : Des quatre votes « non », deux ne donnent aucune justification ; les deux autres précisent : « quatre heures sont largement suffisantes pour traiter le programme de Première » (B., Paris *) ; « La pénurie actuelle de professeurs est telle que beaucoup de nos élèves arrivent dans le second cycle après une, deux, trois et même quatre années d'études sans véritable professeur de Mathématiques. Les 5 heures en Seconde et Première ne feront qu'aggraver cette situation. Compte tenu de ces faits, n'aurait-il pas été plus sain de travailler pour obtenir un programme de 4 heures ? » (L., Lille).

Est-il utile de préciser que je mentionne des avis pour ne pas être soupçonné de partialité. Je n'approuve ni l'une ni l'autre de ces opinions contradictoires.

Quant aux votes « oui », au nombre de 1 054, les suggestions qu'ils ajoutent pour obtenir la réalisation effective des 5 heures sont : a) démarches du Bureau au Ministère (on fait confiance au Bureau pour expliquer aux autorités ce que celles-ci sont les seules à ne pas comprendre) ; b) des Collègues menacent de ne plus assumer les lourds services supplémentaires qu'ils ont acceptés jusqu'ici si leur tâche, en Seconde et Première, reste aussi démesurée ; c) enfin, on souhaite associer les parents d'élèves et des Collègues nous transmettent des motions adoptées. Voici par exemple le texte des parents du Lycée Pothier, à Orléans (tel qu'il a paru dans *La République du Centre* du 9 avril 1962) :

L'Association des parents d'élèves du Lycée Pothier,

Apprend que malgré l'alourdissement du programme de Mathématiques des classes de Première et de Seconde, l'horaire normal de cinq heures d'enseignement de cette matière ne peut être appliqué dans ces classes, en raison d'instructions de l'Administration Supérieure ;

S'associe aux protestations émises par l'Association des professeurs de Mathématiques et demande que les mesures nécessaires soient prises pour que les programmes de Mathématiques puissent être normalement traités dans les classes de Première et de Seconde.

Sur les programmes : Les suggestions sur les programmes sont si variées que je ne peux tenter de les résumer. En passant, je note beaucoup de critiques au petit programme de géométrie dans l'espace en classe de Troisième : une enquête à ce sujet, avec présentation des divers points de vue, serait certainement intéressante dans le *Bulletin*.

Voici une « remarque sur les instructions relatives aux programmes du 2 mai 1961 (classe de Première). Ces instructions disent : *On remarquera que le programme*

* L'initiale de l'auteur de la remarque est suivie du nom de l'Académie où il enseigne.

ne comporte aucune rubrique relative à la géométrie descriptive ou à la géométrie cotée. Le professeur n'a donc pas à présenter un exposé méthodique des premiers éléments de cette partie de la géométrie qui a trait à la représentation plane des figures de l'espace. Toutefois... il est conseillé en Première... d'expliquer les idées extrêmement simples qui sont à la base de quelques modes usuels de la géométrie représentative (emploi d'une double projection sur des plans convenablement choisis ; emploi d'une projection cotée), et d'en montrer l'intérêt, etc... Peut-on souhaiter qu'il ne soit plus conseillé vivement de traiter une question non au programme ? » (D., Paris).

Plusieurs Collègues ont relevé la proposition de notre Collègue J. Martin (cf. *Bulletin* 221, p. 137) en faveur d'un formulaire officiel autorisé dans les examens. L'un souligne l'effroi des élèves devant l'ensemble des formules à retenir.

« Lorsque nous faisons des raisonnements qui n'utilisent aucune formule, on les voit revivre. » Un autre ajoute : « J'ai l'expérience d'une méthode voisine ; j'ai passé Calcul Différentiel et Intégral avec recours à des documents ; j'ai l'impression que mes camarades et moi-même avons préparé cet examen plus intelligemment qu'un autre. » Un autre enfin souhaite ainsi : « décharger les élèves d'un travail de pure mémoire en leur donnant un formulaire aux examens ; les élèves consacreront plus de temps au travail de réflexion (même idée pour les dates et les faits en Histoire. » (F., Paris).

Il me paraîtrait imprudent de conclure le débat sur l'usage du formulaire et le meilleur exercice de la mémoire doit être poursuivi. Je pose des questions : L'enseignement des Mathématiques n'est-il pas un de ceux qui font le moins appel à la mémoire (ou bien : faut-il proscrire tout recours à la mémoire) ? N'est-ce pas la formule de nos examens qu'il faut modifier plutôt que d'introduire les formulaires dans les examens ?

Sur la formation continue : Pour un Collègue (B., Paris) qui écrit : « inutile ! », de très nombreux bulletins (près de 50) entrent dans les détails de l'organisation, du niveau et de la forme des cours et conférences.

Les stages d'été (ou d'automne) de 10 à 15 jours dans une résidence agréable avec indemnisation pour les participants (et pour les conférenciers, bien entendu) a une grande faveur. On propose aussi de grouper, au cours de l'année, plusieurs séances un samedi et un dimanche : c'est la formule du week-end mathématique.

Quant au fond du problème, voici un argument en faveur de cette formation continue : « Un très souhaitable effort dans le domaine des cours pour les professeurs est à encourager car, actuellement, *peu* de professeurs (même s'il est probable que la proportion est inverse parmi les participants à l'Assemblée générale) sont partisans de moderniser leur enseignement. Et cela pose un cas de conscience pour ceux qui essaient de le faire. » (S., Lyon).

Au sujet des cours et conférences organisés par les Régionales de l'A.P.M., satisfaction sans nuage. C'est normal, car s'il y a des Collègues à qui cela ne convient pas, ils sont tout à fait libres de ne pas y participer. Personnellement, je crois que cette grande liberté n'a pas de prix.

Mais la formule peut être améliorée, surtout diversifiée : « Il me semble indispensable que les participants puissent se réunir en petits groupes homogènes ; il pourrait y avoir des groupes de niveaux divers, et qui travailleraient à des rythmes différents sur un même sujet, de telle sorte qu'un participant se sentant dépassé dans un groupe pourrait essayer de travailler dans un groupe plus faible. » (T., Paris).

Une seule objection grave : le manque le temps pour beaucoup de professeurs assurant un horaire très important dans des classes aux effectifs excessifs. Aussi, M. (Paris) fait-il justement remarquer qu'augmenter la fréquence des conférences est impossible. Il ajoute : « Les conférenciers, en général, devraient restreindre l'étendue du sujet traité et préparer la partie déductive par une suite d'exemples opérant chez l'auditeur par intuition préalable. »

De même que l'institution de la formation continue vise à la création d'un « service après-diplôme » dans les Facultés, il faut en effet penser à une pédagogie de l'enseignement pour les professeurs. Cela ne signifie pas que la moindre critique aille à nos conférenciers ; si Mme et M. Revuz avaient lu tous ces *Bulletins*, ils en auraient rougi de confusion, ils peuvent être assurés de la reconnaissance de leurs nombreux élèves.

Sur le « Bulletin » : Pour un Collègue B. (Paris), déjà cité, qui écrit tout net : « Le *Bulletin* manque d'intérêt », beaucoup d'autres avis sont plus nuancés. On regrette surtout, et nous également, « que les classes du premier cycle restent trop en dehors du champ d'activité de l'A.P.M. » (P., Paris). Une suggestion précise : présentation détaillée d'exposés conçus par des professeurs enseignant dans telle classe sur tel chapitre du programme (en particulier pour les innovations).

Deux souhaits : que les conférences de l'A.P.M. soient toutes plus rapidement publiées ; que les rapports d'agrégation et de concours général soient publiés plus tôt (cela ne dépend pas que de nous et il y a un délai incompressible pour la composition et la correction du *Bulletin*).

Voir plus loin une note spéciale sur la rédaction du *Bulletin*.

Sur le règlement intérieur : On a déjà lu (*Bulletins* n°s 217 et 221) la présentation des arguments en faveur de ces modifications. Le dépouillement des derniers votes n'a pas fait changer d'avis le signataire de ces lignes qui avait préconisé, au moins pour un certain nombre de candidats, la recommandation du Comité aux suffrages des adhérents. Ce n'est pas l'avis de P. (Paris) qui écrit : « La phrase proposée (vote V b) et considérée comme votée à l'avance (cf. *Bulletin* 221, p. 115) a soulevé, selon les tempéraments, indignation ou rigolade. Il est certain que *nos institutions* pourraient être revues ou appliquées de façon plus démocratique. Mais l'idée de prendre exemple sur Napoléon III était inattendue. Pourquoi pas le système suivant, qui a fait ses preuves : faire désigner par le président les membres du Comité. A la mort du président, ceux-ci en choisissent un nouveau et, pendant leur choix, on les enfermerait à clef ? — Le Bureau a-t-il fait un appel de candidatures pour l'élection de 1962 ? »

Il n'a pu le faire par le *Bulletin*, par suite des retards de celui-ci. Il a fait de son mieux pour trouver des candidats qui, lorsqu'ils seront élus, voudront bien assurer des tâches dans le Bureau. Notre Collègue P. doit savoir qu'aucune candidature n'a jamais été repoussée. Je ne regrette pas en tout cas sa plaisante allusion à Napoléon III et à la Sixtine. Malheureusement, je ne connais pas de candidat à la présidence à vie.

Je rapproche l'opinion de P. de celle d'un anonyme qui, au lieu de la liste des noms des Collègues à élire, écrit : « Je ne sais absolument pas quelles sont les opinions des candidats sur les questions qui m'intéressent. Dès lors, à quoi bon voter ? »

Sur la collaboration avec l'Administration : Le Collègue P. (Paris), déjà cité, écrit : « 1) On peut penser qu'il est naturel que l'Administration (I.G.) fasse appel à la collaboration de certains Collègues choisis « *ès-qualités* ». Etre membre du Bureau de l'A.P.M. n'est pas une qualité suffisante à mes yeux. Mais est-il concevable que le Bureau collabore, *en s'engageant au secret*, avec l'Administration, pour l'élaboration de nouveaux programmes, par exemple ? Cette pratique a choqué certains d'entre nous. 2) L'A.P.M. a-t-elle mandaté le Bureau et celui-ci les Collègues qui ont présenté le rapport sur l'enseignement de l'Astronomie pour donner aux conclusions de la Commission la caution de l'A.P.M. ? »

Notre Collègue P. se fait, dit-il, l'interprète de « certains d'entre nous » ; on pourrait trouver cette formule plus vague que démocratique. Mais le problème n'est pas là ; il est dans l'expression « collaboration avec l'Administration ». Lorsque l'Inspection générale demande son avis à la Commission des programmes et au Bureau de l'A.P.M., ces derniers donnent leur avis ; l'Administration reste seule maîtresse des décisions. On peut le regretter, non le nier. Quant à la non-publication des programmes avant leur adoption par le Conseil Supérieur, la Commission des

Programmes a été la première à la regretter. Cela n'a aucun rapport avec une sorte de travail secret, clandestin, que notre Collègue P. imagine à tort. De même, la Commission sur la réforme de l'enseignement de l'astronomie a été constituée par M. Danjon, Directeur de l'Observatoire de Paris ; les membres de l'A.P.M. qui y ont travaillé en ont avisé la Commission des programmes ; le rapport a été publié dans le *Bulletin*. La rédaction du *Bulletin* est persuadée qu'elle ne pouvait faire plus, en ce domaine, pour associer tous les membres de l'A.P.M. à ces travaux préparatoires. La réforme n'est que partiellement engagée. Là encore, la décision appartient à l'Administration.

Notre Collègue P. a bien fait d'exprimer ses critiques. Les responsables de l'A.P.M. en tiendront compte, y compris les rédacteurs de la Commission du dictionnaire, s'il leur prend l'idée de collaborer avec Littré ou l'Académie. Qu'ils sachent qu'une opposition vigilante les surveille.

G. W.

CHRONIQUE DES REGIONALES

● **N. B.** — Les responsables des Régionales ne manqueront pas de noter que désormais toutes les communications relatives aux Régionales doivent être adressées à notre Collègue ROSSAT-MIGNOD, membre du Bureau (voir son adresse page 2 de la couverture).

● **Lyon** : Dans sa réunion du début d'avril, préparatoire à l'Assemblée générale d'Angers, la Régionale de Lyon a constitué définitivement son Bureau :

Secrétaire : René REDON (assistant, Fac. des Sc.) ; *secrétaire adjoint* : René PUIPIER (Lycée des Minimes, Lyon) ; *trésorier* : G. VALETTE (C.E.G. à Saint-Fons) ; *trésorier adjoint* : SARGENT (Lycée « Champonnay », Lyon) ; *membres* : J. BRACONNIER (professeur, Fac. des Sc.), J. AUFRAND (C.E.G. Lyon), G. THOVERT (Lycée Ampère, Lyon), P. JANDOT (Lycée des Minimes), F. SALIES (maître de conférences, I.N.S.A.).

La Régionale a émis le vœu suivant : « En cas de non-modification de l'horaire en Seconde et Première, nous refuserions de couvrir la totalité du programme, le Comité de l'A.P.M. coordonnant le mouvement pour toute la France. »

● **Strasbourg** : Voici les titres des derniers exposés du séminaire du Second Degré : IV. Espaces projectifs. V. Complétion projective d'un espace affine. VI et VII. Espaces vectoriels euclidiens. VIII. Automorphismes des espaces vectoriels euclidiens.

● **Paris** : Le jeudi 10 mai, intéressant échange de vues sur les Mathématiques en classe de Philosophie, sous la direction de M. BARBUT et avec le concours de notre Collègue MORFAUX, Président de l'Association des Professeurs de Philosophie de l'Enseignement Public.

Le jeudi 17 mai, notre « ancien » Président REVUZ faisait sa dernière conférence de l'année. Le *Cours de l'A.P.M.* 2 a porté, en 1961-62, sur les espaces vectoriels. Une rédaction du cours et des solutions des exercices a été assurée, comme l'année précédente, par Mme REVUZ. L'édition ronéotypée a été corrigée par M. MUGNIER. M. ROSSAT-MIGNOD a assuré la tâche ingrate de la distribution.

Au moment de clore cette deuxième année d'enseignement pour les collègues de l'A.P.M., au nom des présents et de tous les membres de l'Association, M. ROSSAT-MIGNOD a exprimé la reconnaissance et la sympathie qu'ils éprouvent tous pour leur professeur et sa collaboratrice. Un petit souvenir a été remis à M. et à Mme REVUZ. Pour les auditeurs, le souvenir qu'ils garderont de ces cours est sans prix.

Un vœu très simple fait l'unanimité des présents : à l'année prochaine et vive la topologie ! Qu'en penses-tu, REVUZ ?

LE COURRIER DE LA REDACTION

Le dépouillement des bulletins de vote pour l'Assemblée générale montre l'intérêt que beaucoup de collègues portent au *Bulletin*. Pour la Rédaction, cela implique qu'elle doit s'efforcer d'améliorer nos publications, en qualité et en quantité. Ce devoir a deux aspects. L'un comporte la critique du passé : critiquer pour améliorer ce qui a été publié, pour compléter ou prolonger. Le mieux sera de reproduire ici, aussi souvent que ce sera possible, des lettres de nos correspondants. L'autre devoir est de préparer les bulletins futurs : ouvrir des enquêtes ou des rubriques nouvelles, solliciter des auteurs pour qu'ils écrivent ; c'est la rubrique des *projets de la Rédaction* que chacun devrait avoir à cœur d'alimenter.

Correspondance.

● *Erratum.* — Dans le *Bulletin* 222, dans l'article de M. Balibar, page 158, remplacer l'avant-dernière ligne par :

$u \in A, v \in A, \langle uv \rangle \in S, \langle u_1 u \rangle \in R$ et $\langle v_1 v \rangle \in R$,
page 160, ligne 9, remplacer le symbole d'inclusion stricte $\subset$ par le symbole d'inclusion large $\subseteq$.

● *Sur le tétraèdre.* — L'article de notre Collègue Estève (*Bulletin* 222) posait, en haut de la page 170, une question que notre Collègue Vissio reprend et traite de la façon suivante :

Etant donné un tétraèdre ABCD, on désigne par a, b, c, d les projections orthogonales respectives d'un point I quelconque sur les « facettes » BCD, CDA, DAB, ABC. En posant $x \cdot \vec{IA} + y \cdot \vec{IB} + z \cdot \vec{IC} + t \cdot \vec{ID} = \vec{0}$ (1) *et*

$\alpha \cdot \vec{IA} + \beta \cdot \vec{IB} + \gamma \cdot \vec{IC} + \delta \cdot \vec{ID} = \vec{0}$ (2), *quelles relations existe-t-il entre x, y, z, t, α , β , γ , δ ?*

En multipliant scalairement les deux membres de (2) par $\vec{CD}$ (orthogonal à $\vec{IA}$ et $\vec{IB}$), on obtient :

$$\gamma \cdot (\vec{IC} \cdot \vec{CD}) + \delta \cdot (\vec{ID} \cdot \vec{CD}) = 0. \quad (3)$$

Or, $\vec{IC}$ étant orthogonal à $\vec{AD}$ et $\vec{AB}$, nous pouvons poser :

$$\vec{IC} = \lambda \cdot \vec{AD} \wedge \vec{AB}.$$

De même, posons $\vec{ID} = \mu \cdot \vec{AC} \wedge \vec{AB}$.

D'autre part, en écrivant $\vec{CD} = \vec{AD} - \vec{AC}$, la relation (3) devient :

$$-\gamma \lambda (\vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AC}) + \delta \mu (\vec{AC}, \vec{AB}, \vec{AD}) = 0,$$

ou (A, B, C, D n'étant pas coplanaires)

$$\boxed{\gamma \lambda + \delta \mu = 0.} \quad (4)$$

Or, si l'on désigne (notation de l'article considéré) par $s(C)$ l'aire de la facette ABD, il vient :

$$\begin{aligned} |(\vec{IA}, \vec{IB}, \vec{ID})| &= 2 |\vec{IC}| \cdot s(C) \\ &= 2 |\lambda| \cdot |\vec{AD} \wedge \vec{AB}| \cdot s(C) \\ &= 4 |\lambda| \cdot [s(C)]^2. \end{aligned}$$

De même,

$$|(\vec{IA}, \vec{IB}, \vec{IC})| = 4 |\mu| \cdot [s(D)]^2.$$

Or, z et t sont respectivement proportionnels à $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{ID})$ et $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC})$. La relation (4) s'écrit alors :

$$\frac{\gamma z}{[s(C)]^2} - \varepsilon \frac{\delta t}{[s(D)]^2} = 0 \quad (\text{avec } \varepsilon = \pm 1),$$

ou

$$\frac{z}{\frac{1}{\gamma}[s(C)]^2} - \varepsilon \frac{t}{\frac{1}{\delta}[s(D)]^2} = 0.$$

Donc, en se limitant d'abord au cas où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont positifs, on trouve que x, y, z, t sont respectivement proportionnels à :

$$\frac{1}{\alpha} [s(A)]^2, \quad \frac{1}{\beta} [s(B)]^2, \quad \frac{1}{\gamma} [s(C)]^2, \quad \frac{1}{\delta} [s(D)]^2.$$

De l'aimable commentaire de M. Estève, je détache ce qui suit : « La solution en question est certainement plus rapide que la mienne qui semble, dès lors, avoir été cueillie chez un antiquaire. Pourtant, les méthodes vectorielles ont toujours eu et ont toujours ma préférence. Comment ai-je pu passer à côté de la solution vectorielle ? Si j'avais posé le problème en question aussi explicitement que notre Collègue, la solution ne m'aurait certainement pas échappé. Comme quoi l'explicite est préférable à l'implicite et le « cela va sans dire » moins bon que « cela va tout de même mieux en le disant ».

● *Professeurs aveugles.* — Lettre de M. Le Floch (Lycée de Blois), le 30-4-1962 : « C'est avec émotion que j'ai lu l'article de M. Antoine, professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Rennes, paru dans le *Bulletin* n° 222 (p. 266).

J'ai été en effet élève de M. Antoine, en 1945-46 et en 1947-48, pour les cours de Calcul Différentiel et Intégral et de Géométrie Supérieure, et je puis témoigner de la qualité de l'enseignement dispensé par M. Antoine, et de l'ascendant dont il bénéficiait auprès de ses étudiants.

Son exemple ne prouve pas seulement qu'un aveugle peut faire carrière dans l'enseignement ; il montre qu'il peut y réussir remarquablement. »

Notre Collègue Antoine, malgré la gêne que lui procurent ces éloges, consent à la publication de cette lettre qui vient à l'appui de la thèse qu'il a présentée. Il nous signale qu'il a reçu également le témoignage de notre Collègue Machicot (Lycée de Montauban) qui fut son élève, il y a trente ans.

Les projets de la Rédaction.

Il y a deux manières (au moins) de concevoir notre *Bulletin*. Ou bien nous y publions ce que les Collègues nous envoient sans rien solliciter de précis ; c'est forcément ainsi que cela se passe souvent et les sommaires sont alors le reflet de ce que la Rédaction reçoit ; telle la plus belle fille... Ou bien, il est possible de « planifier », c'est-à-dire de solliciter des articles de tel ou tel et de répondre mieux, peut-être, à certains objectifs fixés *a priori*.

Si la seconde méthode paraît plus séduisante, il faut pourtant reconnaître que dans l'établissement du programme il y aura une grande part d'arbitraire. Aussi a-t-on, jusqu'à présent, préféré la première. Mais n'est-il pas possible de tenter une conciliation : à côté des apports libres dont la valeur restera toujours marquée par cette liberté de conception, ne peut-on faire une place à des travaux plus convenus ? En fait, cela revient à faire un inventaire des défauts ou des lacunes de nos sommaires et à rechercher des Collègues de bonne volonté pour nous aider à les éviter.

Du côté des « Etudes », nous sommes assez bien pourvus, ne serait-ce que par les conférences organisées ici ou là, et que nous ne pouvons malheureusement

pas toutes publier. C'est plutôt sur « les problèmes pédagogiques » qu'il y a à dire. M. Siros nous fait la suggestion suivante : il y a de nouveaux programmes (en M.E. par exemple) ; ne serait-il pas utile de présenter sur les sujets nouveaux, non des leçons toutes faites, bien sûr, mais des idées de plans possibles ou d'exercices ? L'idée me paraît excellente et je vais l'exploiter en donnant une liste (incomplète) de sujets sur lesquels de telles notes seraient les bienvenues :

— Pour la classe de *Matélem* : 1) Extensions diverses de la notion de nombre ; nombres complexes ; 2) Que dire des nombres réels ? ; 3) les fonctions logarithmique et exponentielle ; 4) les différentielles et les dérivées (les premières ne sont pas au programme) ; 5) les équations différentielles.

— De telles notes, schémas ou plans d'exposés ne doivent pas être réservés à cette classe. Bien d'autres sujets peuvent être abordés, pour toutes les classes. Voici des échantillons : la numération en Cinquième, les nombres négatifs en Quatrième, les fonctions en Troisième, les vecteurs en Seconde, le produit scalaire en Première. Il y a aussi des sujets qui survolent plusieurs classes : M. Crozes, il y a quelques années, avait donné un schéma sur la notion de vecteur « à travers les âges ».

— Une rubrique de problèmes ou exercices devrait être facile à alimenter ; non pour reprendre ce qui se trouve partout, mais justement pour aider chacun de nous à renouveler son stock. C'est un devoir de fraternité : qui a imaginé un bon énoncé, ou quelque problème curieux ou délectable, doit le faire connaître à ses Collègues. Nous sommes heureux de publier une série d'exposés de M. Huisman qui présentent de très nombreux exercices.

— Des correspondants ont bien voulu nous dire leur satisfaction d'une étude préparatoire à l'éclipse du 15 février 1962. Il faudrait publier des articles sur de *grandes questions scientifiques d'actualité*, en concevant ces articles pour les professeurs de Mathématiques (qui ne sont pas *enfermés* dans leur spécialité mais qui souhaitent, à propos de grands problèmes aux événements scientifiques, en tirer leçon pour leur enseignement ou leur culture).

— La réalisation progressive de la réforme de l'enseignement de l'*astronomie* serait plus facile si le *Bulletin* pouvait donner de brèves mais régulières informations sur les faits et les découvertes. Nous essaierons de le faire à partir du *Bulletin* 224.

— La *bibliographie* du *Bulletin*, loin d'être complète, est souvent fort insuffisante. Les collègues doivent savoir qu'une note de quelques lignes précisant le contenu d'un ouvrage, et donnant sur lui des références précises, constitue un apport fort utile à la Rédaction qui ne peut, elle non plus, *tout* lire. Il n'est pas obligatoire de ne parler que des nouveautés ; il y a de bons ouvrages à signaler plusieurs fois.

Ajoutons pour finir deux recommandations pratiques : 1° Sachez qu'un article envoyé durant le mois m ne pourra généralement pas paraître avant le mois $m + 3$ (délais de composition, etc...). 2° Facilitez la tâche du secrétariat de Rédaction en écrivant très lisiblement, sur un seul côté des feuilles ; limitez au strict minimum formules et schémas.

Les informations de la Rédaction.

● En même temps que ce *Bulletin* paraît la brochure 7 de l'A.P.M. : « *Lecture commentée d'une méta-démonstration de Gödel* » par Jean Balibar. C'est d'abord la réunion de l'étude publiée dans les *Bulletins* 217 et 222. Ce n'est pas que cela. Notre Collègue a revu, relu, corrigé, recorrecté les épreuves ; il a complété par une bibliographie commentée qui fait de ce petit ouvrage le bréviaire du professeur de Mathématiques logicien. Relisez Balibar dans sa brochure et vous aurez envie, ensuite, de lire Tarski ou Fraenkel (40 pages, 2 NF, franco 2,50 NF).

● *Les Unités de mesure* : Il nous a paru intéressant de tirer à part la notice de M. F. Brachet sur le Système International des Unités de Mesure. Sous un volume réduit (8 pages), vous y trouvez l'essentiel de ce que nos élèves ont à savoir. En tirage à part, c'est un document utile pour la classe. Prix 1 NF (franco 1,25 NF).

● Tous deux Revuz, nous espérons bien passer juin et juillet dans la relecture du *Cours de l'A.P.M.* 1. Parmi les souscripteurs, certains seront déçus de ne pouvoir emporter le livre en vacances. Avec eux, nous le regrettons. Mais il a été impossible, pour nous, d'aller plus vite.

● Le *Bulletin* 224 sera le premier de la 42^e année. Suivant une proposition faite par de nombreux collègues, nous le préparons dès maintenant pour qu'il paraisse au voisinage du 1^{er} octobre. Ce sera un *Bulletin* normal quant à son contenu. Nous nous efforcerons de marquer par lui l'étendue de nos préoccupations, pour *tous* les degrés de l'enseignement. Le *Bulletin* 225 suivra, en novembre, avec les énoncés des concours.

Nous souhaitons publier le 226 en décembre, reprenant le rythme d'un *Bulletin* normal tous les deux mois que nous n'avons malheureusement pas pu tenir cette année.

Considérant ce qui a été fait, cette année, 41^e du *Bulletin*, le secrétaire de Rédaction plaide coupable : un *Bulletin* 217 daté octobre-novembre mais livré à l'extrême fin du trimestre, un *Bulletin* 221 réduit à la préparation de l'Assemblée générale, les *Bulletins* 222 et 223 en fin d'année ; ce n'est pas le volume normal. Il sollicite cependant les circonstances atténuantes pour deux motifs : 1^o un *Bulletin* spécial de propagande 217 *bis* a été publié en janvier, avec profit pour l'A.P.M. ; les brochures 4, 5, 7 ont été publiées et notre collection figurera dignement au Congrès International de Stockholm ; enfin, la publication du livre de Revuz (brochure 6) aura été, sinon achevée, tout au moins fort avancée. 2^o Il s'efforcera de mieux faire durant la 42^e année ; les projets formulés ci-dessus grâce aux suggestions des collègues donnent bon espoir quant à la réalité à venir.

Mais le secrétaire de Rédaction n'est qu'un agent d'exécution. Tous les membres de l'A.P.M. ont libre accès à la Rédaction. Si le *Bulletin* a eu quelque valeur, c'est parce qu'il était œuvre de tous ; en conservant, en accentuant ce caractère, il augmentera sa valeur.

G. W.

Vient de paraître.

Présentation du nouveau

**SYSTEME INTERNATIONAL DES UNITES DE MESURE
par F. BRACHET.**

**Prix : 1 NF — Franco : 1,50 NF
(par virement au C.C.P. de l'A.P.M.).**

CHRONIQUE DES REFORMES A VENIR

L'enseignement de l'histoire des sciences.

Le Comité national d'Histoire et de Philosophie des Sciences, réuni le 26 février 1962 sous la présidence de M. Louis de Broglie, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, a adopté le vœu suivant :

1° *Que pour l'inscription au concours d'Agrégation de Philosophie les candidats non titulaires du baccalauréat de Mathématiques élémentaires soient autorisés à faire valoir, aux lieu et place d'un tiers des épreuves du P.C.B. (d'ailleurs en voie de disparition), le Certificat d'Histoire et de Philosophie des Sciences de la Faculté des Lettres de Paris (Option A : Sciences exactes et Cosmologie ou option B : Sciences biologiques et anthropologiques) ou tout autre certificat analogue, quant à la nature des épreuves et à la composition du programme, qui pourrait être éventuellement créé dans les Universités de province.*

2° *Que ce même Certificat (ainsi que tout autre analogue qui pourrait être éventuellement créé en province, cf. ci-dessus) puisse être substitué par les candidats à la licence d'enseignement ès Sciences à l'un des certificats exigés d'eux par les Facultés des Sciences.*

En formant ce vœu, le Comité national a tenu compte des données suivantes :

1° La réforme de la structure et du programme du Certificat parisien en question, la participation de professeurs de la Faculté des Sciences, aux côtés des professeurs et chargés de cours de la Faculté des Lettres, à la préparation et à l'examen final de ce certificat, permettent — l'expérience de quelques années en fait foi — d'en maintenir l'information proprement scientifique à un niveau décent.

2° Ce sont des professeurs de la Faculté des Sciences de Paris qui ont, les premiers, souhaité de voir substituer aux épreuves du P.C.B., à l'usage des philosophes, des épreuves peut-être moins scientifiques dans leur appellation universitaire, mais sans doute plus sérieusement préparées et contrôlées dans le présent, et plus fructueuses pour le développement ultérieur d'une culture philosophique.

3° Si un enseignement d'Histoire et Philosophie des Sciences n'existe pas encore, sous forme généralisée, dans les Facultés de province, il est d'ores et déjà possible de prévoir, sans forfanterie, et en raison du nombre et de la qualité de travaux en cours en histoire et philosophie des Sciences, qu'un tel enseignement pourrait être créé, à bref délai, dans cinq ou six Universités qui en éprouveraient le besoin. Ce pourrait être là l'amorce d'un processus de déblocage des études d'Histoire des Sciences en France (l'absence de postes d'enseignement freinant le développement des études et des recherches, et réciproquement).

4° La situation actuelle des publications d'Histoire des Sciences en France met désormais cette discipline au même rang que les autres matières d'enseignement que des étudiants peuvent cultiver, même si leurs obligations leur interdisent de suivre un enseignement continu dans une Faculté. La bibliographie à laquelle il est fait allusion est susceptible de s'améliorer rapidement en fonction d'un public plus nombreux et par suite d'une plus vive émulation dans la recherche.

5° Enfin, si le vœu du Comité national était adopté en ce qui concerne les candidats à l'agrégation de Philosophie, il serait souhaitable d'introduire une modification à la nature des épreuves du Certificat d'Histoire et de Philosophie des Sciences de Paris. Dans l'état actuel, les candidats à ce certificat sont dispensés de l'épreuve écrite de Philosophie des Sciences s'ils sont déjà titulaires du *Certificat de Philosophie Générale et Logique*. Or, c'est le cas de tous les licenciés d'enseignement, donc des candidats à l'agrégation. Pour éviter qu'éventuellement le Certificat paraisse obtenu au rabais par ceux auxquels il convient au contraire d'imposer une épreuve de haute tenue, l'énoncé des dispositions concernant la nature des épreuves serait modifié

ainsi : « Lorsque le candidat, déjà titulaire du Certificat de Philosophie et Logique, est dispensé de l'épreuve écrite de Philosophie scientifique, les épreuves orales comportent, en sus des deux interrogations d'histoire des Sciences (générale, et selon l'option), l'explication d'un texte extrait d'une œuvre scientifique en rapport avec l'option choisie par le candidat. »

6° Les professeurs de Sciences (Mathématiques, Physique et Chimie, Sciences Naturelles) de l'Enseignement du Second Degré ont de plus en plus de difficultés à assumer la révolution scientifique dont les conséquences atteignent les programmes mêmes de cet enseignement et les méthodes. Or, la valeur pédagogique d'une connaissance de l'histoire est particulièrement importante par la réflexion qu'elle exige en ce qui concerne le vocabulaire, les symboles opératoires et leurs rapports avec les concepts fondamentaux. L'actualité du passé de la Science se manifeste par la permanence de quelques grands thèmes philosophiques dont l'ignorance par les futurs maîtres de la jeunesse est préjudiciable à leur intelligibilité même, comme à la rectitude et à la valeur de leur enseignement dans leurs disciplines spécialisées. Le vœu d'introduire le Certificat d'Histoire et de Philosophie des Sciences parmi ceux qui permettent d'achever une licence d'enseignement ès sciences correspond au souci de remédier aux risques considérables que le développement rapide des techniques de divers ordres et le cloisonnement des spécialités font courir à la Science de demain.

Sur les 38 membres du Comité, aucun n'a exprimé un avis défavorable et 25 ont exprimé (oralement ou par correspondance) un avis favorable : MM. Louis de Broglie et Robert Courier, Secrétaires perpétuels de l'Académie des Sciences ; M. Jean Rostand de l'Académie Française ; MM. Fréchet, Gueroult, Piveteau, Poirier, Souèges, membres de l'Institut ; MM. Bedel, Bouligand, Canguilhem, R.P. Costabel, Daumas, Destouches, Mme Février, MM. Itard, Huard, Klein, Koyré, R. Martin, R.-M. May, Taton, Théodoridès, Mme M.-A. Tonnelat, M. Ernest Wickersheimer.

Le bloc-notes de l'A.P.M.

● **La stabilité ministérielle et la rédaction.** — Des collègues ont regretté que le *Bulletin* 222 contienne certaines remarques ou critiques à l'égard d'un Ministre de l'Education Nationale qui, au moment où le *Bulletin* paraissait, n'occupait plus le poste. Ces collègues ont tout à fait raison ; il y a eu, dans ces circonstances imprévues, une malencontreuse coïncidence. Pour sa défense, la Rédaction doit avouer qu'elle n'est pas dans les secrets du pouvoir et qu'il est tout de même plus long et laborieux de rédiger et d'imprimer un *Bulletin* que de changer de Ministre de l'Education Nationale.

La statistique révèle un fait intéressant et qui surprendra certains : depuis 1948, il y a eu moins de réformes du baccalauréat que de changements de ministre.

● **Le Prix Gaston Julia.** — La Chambre Syndicale de la Sidérurgie Française nous communique : « Le Prix Gaston Julia, fondé il y a quelques mois par de grandes industries françaises pour récompenser un professeur de Mathématiques, dont l'œuvre écrite orale aura paru particulièrement méritante, a été décernée pour 1962 à M. Jean Favard, Professeur à la Sorbonne et à l'Ecole Polytechnique, pour ses deux ouvrages : " Cours de Géométrie différentielle locale " et " Cours d'Analyse professé à l'Ecole Polytechnique ".

« Ces ouvrages, a déclaré le jury du Prix Julia, représente un effort considérable et efficace pour moderniser l'enseignement mathématique des 2^e et 3^e cycles supérieurs, en tenant compte des acquisitions des 50 premières années du siècle.

« Le jury a en outre décerné une mention spéciale à la mémoire de M. René Bastien, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée St-Louis, récemment décédé, pour ses hautes qualités intellectuelles, pédagogiques et morales et pour son dévouement total à ses élèves. »

● **Les vraies réformes.** — La Rédaction du *Bulletin* est bien coupable d'avoir laissé échapper une vraie, une grande réforme : le Conseil Supérieur de mars dernier, en adoptant les nouveaux programmes publiés dans le *Bulletin* 222 (p. 245), a déclaré que la classe de Mathématiques (ainsi que la nomme l'arrêté du 6 mars 1962) serait désormais appelée *classe de Mathématiques Élémentaires*, ainsi que le précise le titre.

Nous comprenons maintenant pourquoi l'arrêté sur les cinq heures en Seconde et Première A' C M M' n'a pas été signé. On ne peut tout faire en même temps ; il y a des degrés dans l'urgence.

● **Justice et sens des mesures.** — Du journal *Le Monde* du 22 mai 1962, à propos d'un procès : « Le dossier de ce scandale financier rassemble près de quinze mille pages en mille six cents cotes, et occupe, avec les pièces à conviction, un volume de deux mètres carrés. C'est dire son extrême complexité... »

A L'ATTENTION DE TOUS LES MEMBRES DE L'A.P.M.

● **Correspondance** : Pour simplifier la tâche des membres du Bureau, veuillez adresser vos lettres au Collègue ou aux Collègues du Bureau, qui sont chargés de suivre la question correspondante.

Exemples : S'il y a une erreur dans la livraison du *Bulletin*, signalez-la à Mlle AÏTOFF. Mais si vous avez une proposition à faire sur les programmes, écrivez à Mlle CLAVIER ou à M. CHAZAL. Pour le dictionnaire, CHASTENET DE GÉRY centralise les envois.

Le plus simple, mais il faut y penser, est de se reporter à la page 2 de la couverture.

● **Cotisations** : Les derniers retardataires vont recevoir ou ont déjà reçu une lettre de rappel. Nous espérons qu'ils n'ont pas tardé ou qu'ils ne tarderont plus à faire le virement demandé. L'A.P.M. a des finances saines parce que ses membres payent régulièrement leur écot.

Une source d'erreurs provient de l'oubli, parfois, de l'objet des versements au dos du mandat. Soyez toujours explicite et n'oubliez pas qu'enseigner, c'est, souvent, répéter.

● **Bulletins et brochures** : Le *Bulletin* 223 est le dernier à paraître avant les vacances d'été.

Au cours de celles-ci, la Rédaction espère terminer les lectures et corrections du *Cours de l'A.P.M.* de notre « ancien » Président REVUZ. Que les souscripteurs excusent ce long délai. Nous pouvons leur assurer que leur patience sera récompensée ; en tout cas, nous faisons de notre mieux pour qu'ils soient satisfaits.

Nous n'osons plus faire de prévisions trop précises. Au moins espérons-nous que l'ouvrage leur parviendra en octobre.

D'ici là, nous aurons publié le *Bulletin* 224, qui sera le premier de la 42^e année : nous nous efforcerons de le publier pour le 1^{er} octobre et de lui donner un contenu susceptible d'intéresser tous les membres de l'A.P.M. Le *Bulletin des énoncés de concours* paraîtra ensuite.

Mais publier le *Bulletin* et les brochures, est une chose. Y écrire, en est une autre. Voyez à ce sujet, plus haut, le *Courrier de la Rédaction*.

Les brochures de l'A.P.M.

1. *Le langage simple et précis des Mathématiques modernes*, par André REVUZ et L. LESIEUR.

Cette brochure, qui fut tirée à 3 500 exemplaires, est épuisée.
Elle sera rééditée en février prochain.

2. *Congruences paratactiques de cycles*, par P. ROBERT (64 pages, 3 NF, franco 3,50 NF).
3. *Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire*, par G. CHOQUET (40 pages, 2 NF, franco 2,50 NF).
4. *Le calcul des probabilités et l'enseignement*, par A. HUISMAN, R. FORTET, E. MOURIER, A. FUCHS, D. DUGUÉ, G.-T. GUILBAUD, J. BOUZITAT, J. VILLE, F. GENUYS, (144 pages, 7 NF, franco 8 NF).
5. *L'enseignement de la mécanique*, par P. GERMAIN, R. MAZET, J. KAMPÉ DE FÉRIET (40 pages, 2 NF, franco 2,50 NF).

Vient de paraître :

7. *Etude commentée d'une méta-démonstration de Gödel*, par Jean BALIBAR (40 pages, 2 NF, franco 2,5 NF).

Un tirage à part de la notice sur « Le système international des unités de mesure », par M.-F. BRACHET, a été réalisé (8 pages, l'exemplaire, 1 NF, franco 1,25 NF).

Pour se procurer les brochures :

Employer de préférence à tout autre le moyen suivant : adresser un virement postal au compte de l'A.P.M.E.P. (Paris 5 708-21). Préciser au dos du virement les brochures commandées. Le Trésorier de l'A.P.M. se charge des expéditions.

Recommandation aux responsables d'établissement : centralisez les commandes de brochures, vous simplifierez le travail du Trésorier.

ARISTO - TRILOG 0908

Pour l'Enseignement Technique Supérieur



La règle à calcul double face ARISTO-TriLog est un perfectionnement de la série ARISTO-Scholar, réunissant pour la première fois sur une règle à calcul scolaire des échelles décalées et exponentielles. Également livrable comme grand modèle de démonstrations pour le tableau noir.

Agence générale pour la France:

LA DIFFUSION GÉNÉRALE FRANCAISE

17, rue du Colisée · PARIS 8ème · ELYsées 95—31

DENNERT & PAPE · ARISTO-WERKE · HAMBURG

MASSON et C^{ie}, Éditeurs à PARIS

COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES

G. CAGNAC

L. THIBERGE

Inspecteurs généraux de l'Instruction publique

NOUVEAUTE :

ALGÈBRE

2^e

A', C, M et M'

E. GILET

Censeur des Etudes du Lycée J.-B.-Say

Y. CROZES

Professeur agrégé au Lycée Henri-IV

Programmes 1960

Un volume, avec figures et exercices ; cartonné **19 NF**

EN PREPARATION :

GÉOMÉTRIE

2^e

A', C, M et M'

E. GILET

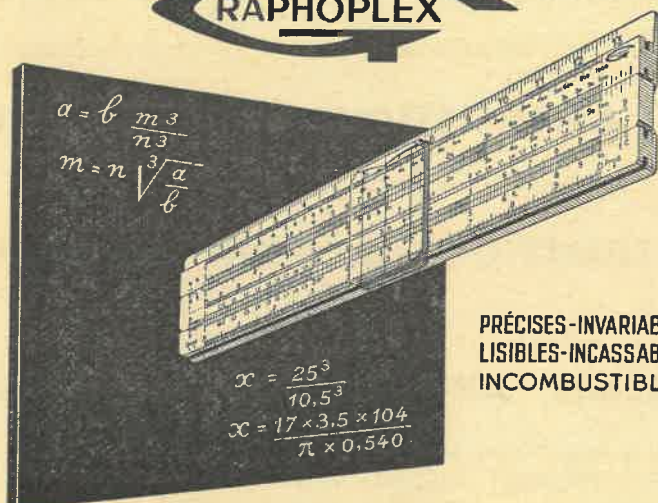
Censeur des Etudes du Lycée J.-B.-Say

Y. CROZES

Professeur agrégé au Lycée Henri-IV

Programmes 1960

Un volume, avec figures et exercices ; cartonné **Fin 62**



PRÉCISES-INVARIABLES
LISIBLES-INCASSABLES
INCOMBUSTIBLES

Règles à Calculs

INSTRUMENTS DE DESSIN

Pochettes de compas. Qualité supérieure

Equerres et Règles en plexiglas transparent

☆☆☆

Tarifs spéciaux pour commandes groupées

Catalogue sur demande

SEREB

148, rue de Noisy-le-Sec, Bagnolet

AVRon 11-83 - 18-65

cours de mathématiques

LEBOSSÉ ET HÉMERY

ARITHMÉTIQUE et TRAVAUX PRATIQUES

CLASSE DE SIXIEME

Le livre de l'élève, couverture jaune	6,40
Le livre du professeur	3,90

ARITHMÉTIQUE et GÉOMÉTRIE

CLASSE DE CINQUIEME

Le livre de l'élève, couverture jaune	6,60
Le livre du professeur	3,90

ARITHMÉTIQUE, ALGÈBRE et GÉOMÉTRIE

CLASSE DE QUATRIEME

Le livre de l'élève, couverture jaune	6,20
Le livre du professeur	3,90

ALGÈBRE, ARITHMÉTIQUE et GÉOMÉTRIE

CLASSE DE TROISIEME

Le livre de l'élève, couverture jaune	6,70
Le livre du professeur	3,90

ALGÈBRE

CLASSE DE SECONDE A', C, M et M'

Le livre de l'élève, couverture jaune	7,40
---	------

GÉOMÉTRIE

CLASSE DE SECONDE A', C, M et M'

Le livre de l'élève, couverture jaune	8,20
---	------

NOUVEAUTÉ : ALGÈBRE et GÉOMÉTRIE

CLASSE DE SECONDE A ET B

Un volume, couverture verte	»
-----------------------------------	---

NOUVEAUTÉ : ALGÈBRE et GÉOMÉTRIE

CLASSE DE PREMIERE A ET B

Un volume, couverture verte	»
-----------------------------------	---

NOUVEAUTÉ :

ALGÈBRE, NOTIONS D'ANALYSE et TRIGONOMÉTRIE

CLASSE DE PREMIERE A', C, M et M'

Un volume, couverture jaune	»
-----------------------------------	---

NOUVEAUTÉ :

GÉOMÉTRIE

CLASSE DE PREMIERE A' C, M ET M'

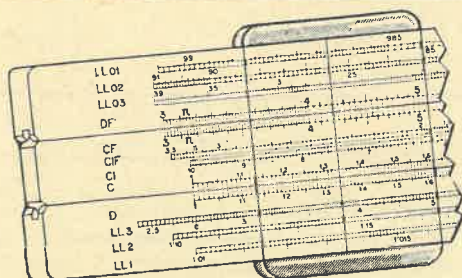
Un volume, couverture jaune	8,40
-----------------------------------	------

GÉOMÉTRIE CLASSE DE MATHÉMATIQUES

Un volume, couverture grise	12,00
-----------------------------------	-------

FERNAND NATHAN

Salle d'exposition : 18, rue Monsieur-le-Prince,
PARIS, VI^e
Correspondance : 9, rue Méchain, PARIS, XIV^e



NEPERLOG

(Double-face)

Correspondances entre les échelles de chaque face assurée par un curseur double-face.

Echelles Log-Log e^x et e^{-x} permettant les calculs des puissances et racines positives ou négatives des nombres compris entre : 1,01 à 10^5 et de 0,991 à $2 \cdot 10^{-5}$.

Echelles πx et $\frac{1}{\pi x}$ évitant les cas hors règle.

Possibilités de calculs étendues avec un minimum de manipulations.



BREVETÉ S. G. D. G.

21, Rue de Montsouris - PARIS (XIV^e)

Tél. : **POR 38-10**

CHEZ VOTRE FOURNISSEUR

MATHÉMATIQUES - COLLECTION COMPLÈTE

NOUVEAUTES : En préparation - Programme du 6 mars 1962

Classe de Mathématiques Élémentaires

Lespinard et Pernet. — Géométrie et Géométrie Descriptive,	}	Parution septembre 1962
» — Trigonométrie,		
» — Algèbre,	}	Parution 4 ^e trimestre 1962
» — Arithmétique,		
» — Cinématique.		

NOUVEAUX PROGRAMMES - Edition Verte

Lespinard et Pernet. — ALGÈBRE, classe de Première C.M.	Br. : 7,05 NF cart. : 9,00 NF
» — GEOMETRIE, classe de Première C.M.	Br. : 8,00 NF cart. : 9,95 NF
» — MATHEMATIQUES, classe de Première A.B.	Br. : 000 NF cart. : 000 NF
Lespinard et Pernet. — ALGÈBRE, classe de Seconde C.M.	Br. : 5,80 NF cart. : 7,65 NF
» — GEOMETRIE, classe de Seconde C.M.	Br. : 8,00 NF cart. : 9,95 NF
» — MATHEMATIQUES, classe de Seconde A.B.	Br. : 11,10 NF cart. : 13,25 NF
Lespinard et Pernet. — MATHEMATIQUES. TRAVAUX PRATIQUES, NOTIONS D'ASTRONOMIE (illustrations en couleurs)	
Cl. de SIXIEME,	Br. : 5,20 NF cart. : 6,95 NF
Lespinard et Pernet. — MATHEMATIQUES, NOTIONS D'ASTRONOMIE (illustrations en couleurs)	
Cl. de CINQUIEME,	Br. : 7,30 NF cart. : 9,30 NF
Lespinard et Pernet. — MATHEMATIQUES, Cl. de QUATRIEME, Lycées	Br. : 5,80 NF cart. : 7,65 NF
Lespinard et Pernet. — MATHEMATIQUES, Cl. de TROISIEME, Lycées	Br. : 5,90 NF cart. : 7,75 NF

Classe de SCIENCES EXPERIMENTALES :

Lespinard, Pernet et Gauzit. — MATHÉMATIQUES (Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie, Mécanique et Cosmographie)	Br. : 9,40 NF cart. : 11,70 NF
--	--------------------------------

Classe de PHILOSOPHIE :

Lespinard, Pernet, et Gauzit. — ALGÈBRE ET COSMOGRAPHIE	Br. : 4,60 NF cart. : 6,45 NF
--	-------------------------------

Classe de MATHÉMATIQUES (anciens programmes) :

Lespinard et Pernet. — GEOMETRIE	Br. : 9,90 NF cart. : 12,10 NF
» — GEOMETRIE DESCRIPTIVE	Br. : 3,95 NF cart. : 5,40 NF
» — ARITHMETIQUE	Br. : 4,00 NF cart. : 5,65 NF
» — MECANIQUE	Br. : 2,90 NF cart. : 4,70 NF
Lespinard, Pernet et Gauzit. — COSMOGRAPHIE	Br. : 3,65 NF cart. : 5,40 NF
Lespinard et Pernet. — ALGÈBRE	Br. : 8,55 NF cart. : 8,45 NF
» — TRIGONOMETRIE	Br. : 4,55 NF cart. : 6,30 NF
» — SOLUTIONS DE PROBLEMES DE MATHÉMATIQUES, Bac. 2 partie, cl. de Mathématiques	5,65 NF
» — SOLUTIONS DE PROBLEMES DE MATHÉMATIQUES, Bac, 1 ^{re} partie, séries C. et M.	3,60 NF

Prix taxe locale incluse

mathématiques

collection Bréard

Après avoir acquis dans les classes du premier cycle des techniques de calcul arithmétique, algébrique, vectoriel ; après avoir utilisé les symétries, l'élève doit mettre au point ses connaissances mathématiques et envisager une construction solide des Mathématiques.

classe de 2^e A' C M M' 576 p. 17,50 NF

A partir de notions élémentaires sur les ensembles et les correspondances, on construit l'anneau $\mathbb{Z}$ des **entiers relatifs**, le corps $\mathbb{Q}$ des **rationnels**, et on aborde le corps $\mathbb{R}$ des **réels**.

Les **fonctions** polynômes et les fonctions rationnelles, les **équations** et les **inéquations** trouvent alors leur place.

Mais, surtout, il est possible d'exposer les **débuts de la géométrie** de façon satisfaisante. La métrique euclidienne se déduit du **produit scalaire** ; les **isométries** sont présentées sans utilisation de la notion fautive de superposition.

classe de 2^e A B 430 p. 11 NF

Les **nombre**s ne sont pas « construits » comme en 2^e A', C, M, M', mais leurs propriétés sont étudiées dans une optique moderne.

La **géométrie** est largement développée, tant dans le plan que dans l'espace ; la superposition des figures n'est pas utilisée.

classe de 1^{re} A' C M M' 18 NF

Un certain nombre de notions envisagées en Seconde A', C, M, M', sont révisées et complétées : équations, inéquations, fonctions élémentaires et surtout débuts de la géométrie de l'espace réel $\mathbb{R}$.

La **géométrie affine** et la **géométrie métrique** euclidienne sont bien séparées ; les propriétés affines et les propriétés métriques des figures sont nettement mises en évidence ; la **trigonométrie** est largement traitée.

Les idées de continuité de limite, introduites par la **notion de « voisinage »**, permettent l'étude de la dérivation et des variations des fonctions. Les **aires** des surfaces, planes et gauches, les volumes des solides sont présentés simplement. Les polygones réguliers mènent au périmètre du cercle, c'est-à-dire ramènent à la notion de limite.

De **nombreux problèmes**, judicieusement choisis, sont traités complètement et constituent deux leçons très importantes.

classe de 1^{er} A B

Octobre

classe de Mathématiques Élémentaires

En préparation

l'école

11, rue de Sèvres, Paris (6^e)

WESMAËL-CHARLIER

30 rue de Gramont Paris 2^e

Tél, Ric. 54-45 et Ric. 80-80

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

VIENT DE PARAÎTRE :

Problèmes de Géométrie vectorielle, par P. MALVAUX, 2^e et 1^{re} A'CMM'

- | | |
|--------------------------------|------|
| 1) Énoncés des exercices | 3,50 |
| 2) Solutions | 5,50 |

A. HUISMAN

Professeur agrégé
au Lycée Montaigne
Chargé d'inspection

J. ITARD

Professeur agrégé
au Lycée Henri-IV

COURS de Mathématiques

Classe de Sixième

210 pp., 225 figures, 9 illustrations h. t. 6,90

Classe de Cinquième

256 pp., 157 figures, 10 illustrations h. t. 8,70

Classe de Quatrième

A paraître.

A. HUISMAN

Professeur au Lycée Montaigne, Chargé d'Inspection

Le Fil d'Ariane

VARIATION SUR DEUX THEMES :

LA FONCTION LINEAIRE — LA FONCTION EXPONENTIELLE

PRIX DE MATHÉMATIQUES, CONCOURS ANDRÉ VERA

DEUXIÈME ÉDITION

212 pages, 88 figures, 7 illustrations 19,50 NF