

CERTIFICATS DE PROPEDEUTIQUE SCIENTIFIQUE

N.D.L.R. — *De nombreux Collègues ont émis le vœu que le Bulletin publie des énoncés proposés aux examens de Mathématiques Générales et Physique (M.G.P.) ou de Mathématiques, Physique et Chimie (M.P.C.). En attendant de pouvoir fournir à tous nos Collègues de véritables Annales de Propédeutique, nous publierons quelques énoncés. Merci aux Collègues qui nous les ont fait parvenir.*

FACULTE DES SCIENCES DE STRASBOURG

(Session de juin 1962)

M.G.P. — 1^{re} épreuve de Mathématiques (durée : 4 heures).

N. B. — Dans tout le problème, n désigne un nombre entier, x un nombre réel et z un nombre complexe. On peut traiter n'importe quelle question, à condition d'admettre les résultats suggérés par l'énoncé des questions précédentes.

1) Donner avec précision les définitions des trois expressions soulignées dans le texte ci-dessous (cotation : 5/40).

2) On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n} - \log \frac{n}{n-1}$ ($n \geq 2$).

Etudier sa convergence, et en déduire que la suite de terme général :

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \quad (n \geq 1)$$

a une limite s .

3) Déterminer la limite de $\frac{\log(x+1)}{\log x}$ lorsque x tend vers l'infini.

4) On pose $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + \frac{1}{2}$, ..., $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$;

Calculer la limite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ (on pourra par exemple la déduire de 1) et 3)), et le rayon de convergence de la série de terme général $a_n z^n$. On désignera par f la fonction que définit cette série sur la portion de l'axe réel intérieure au cercle de convergence.

5) Énoncer avec soin (sans démonstration) les théorèmes impliquant que f est continue, et dérivable ; montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad (1-x)y' - y = \frac{1}{1-x}.$$

6) Intégrer l'équation (E) et en déduire $f(x)$.

7) Soit $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ la somme d'une série entière convergente pour $|z| < 1$. Développer la fonction $\frac{1}{1-z} g(z)$ en série entière ; en déduire à nouveau $f(x)$.

En déduire aussi la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) z^n$; quel est son rayon de convergence ?

2° épreuve de Mathématiques (durée : 3 heures).

Soit R^4 l'espace à quatre dimensions formé des vecteurs (a, b, c, d) à composantes réelles ; on notera $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ et $\vec{e}_4$ les vecteurs de la base canonique de R^4 . On note par ailleurs M_4 l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 4 à coefficients réels.

1) On définit une application f de R^4 dans M_4 par la formule :

$$f(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a & c & b & d \\ c & a & d & b \\ d & b & a & c \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une application linéaire ; on déterminera son noyau et les matrices $U_i = f(\vec{e}_i)$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. Soit V l'image de f ; déterminer une base de V et sa dimension.

2) Montrer que l'on a $U_1 = I$ (matrice unité), et que U_i est la puissance $(i-1)^\circ$ de $A = U_2$ pour $i = 2, 3, 4$. Calculer A^4 . En déduire que le produit de deux matrices appartenant à V est une matrice appartenant à V .

3) Soit t un nombre complexe. On résoudra l'équation :

$$(1) \quad A \cdot \vec{x} = t \cdot \vec{x}$$

où $\vec{x}$ est un vecteur inconnu à quatre composantes complexes ; discuter suivant les valeurs de t . En déduire l'existence d'une matrice S inversible et d'une matrice diagonale D (que l'on déterminera) telles que $A = S \cdot D \cdot S^{-1}$.

4) Déduire de 2) et 3) la formule :

$$(2) \quad f(a, b, c, d) = S \cdot (a \cdot I + b \cdot D + c \cdot D^2 + d \cdot D^3) \cdot S^{-1}.$$

Utiliser cette formule pour calculer les valeurs propres et le déterminant de la matrice $f(a, b, c, d)$.

M.P.C. — Epreuve théorique (durée : 3 heures).

- 1) Calculer les intégrales :

$$f_n(t) = \int_0^1 \cos \pi x \cos n\pi(x+t) dx \quad n \geq 0.$$

(on distinguera le cas n pair du cas n impair).

- 2) Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = f_n\left(\frac{1}{4}\right)$.

- 3) Développer en série entière $\frac{1}{x^4 + 1}$ et $\frac{x^2}{x^4 + 1}$ en déduire que pour

$-1 < x \leq 0$, on a :

$$\sum_0^{+\infty} \left(\frac{x^p}{4p+1} + \frac{x^p}{4p+3} \right) = \frac{1}{y} \int_0^y \frac{dt}{t^4 + 1} + \frac{1}{y^3} \int_0^y \frac{t^2 dt}{t^4 + 1}$$

où $y = \sqrt[4]{-x}$.

- 4) Montrer que la fraction rationnelle $\frac{t^2 + i}{t^4 + 1}$ où i est le symbole des imaginaires peut se mettre sous la forme :

$$\frac{at + b}{P(t)} + \frac{ct + d}{Q(t)}$$

où a, b, c, d sont des nombres complexes, P et Q étant des polynômes du second degré à coefficients réels, sans racines réelles.

- 5) En déduire la valeur des intégrales :

$$I = \int_0^y \frac{t^2 dt}{t^4 + 1} \text{ et } J = \int_0^y \frac{dt}{t^4 + 1} \text{ (on calculera pour cela } I + iJ).$$

- 6) En admettant que la formule de la 3^e question soit encore valable pour $x = -1$, que peut-on en conclure ?

Epreuve pratique (durée : 2 heures).

- 1) Intégrer l'équation différentielle :

$$xy' - y = x^3 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x.$$

- 2) On désigne par $f(x)$ la solution de l'équation précédente telle que $f(0) = 0$. Ecrire le développement en série entière de $f(x)$ et préciser son intervalle de convergence.

- 3) En utilisant le développement en série trouvé dans la question précédente calculer l'intégrale :

$$\int_0^{1/2} f(x) dx$$

avec cinq décimales exactes.

N. B. — On attachera une grande importance à la façon dont seront conduits les calculs et à leur justification théorique.