

PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DES SECTIONS PRÉPARATOIRES AUX ÉCOLES NATIONALES D'INGÉNIEURS DES ARTS ET MÉTIERS

I et II. — NOMBRES REELS

I. — Nombres arithmétiques.

1. Rappel de la définition des nombres rationnels et des opérations sur ces nombres. Propriétés de ces opérations.

Rappel des propriétés des segments de droite. Axiome d'Archimède. Image d'un nombre rationnel sur une demi-droite.

2. Abscisse d'un point d'une demi-droite. Existence de points d'une droite autres que les affixes des nombres rationnels. Définition des nombres irrationnels.

3. Opérations sur les nombres irrationnels. Propriétés de ces opérations.

4. Définition de l'ensemble des nombres arithmétiques. Opération sur ces nombres. Propriétés.

Correspondance biunivoque entre les points d'une demi-droite et les nombres arithmétiques.

5. Ensemble dénombrable, ensemble continu.

Définition d'une grandeur. L'ensemble des valeurs d'une grandeur est ordonné. Grandeurs mesurables.

Grandeur discrète. Grandeur continue.

6. Valeur approchée d'une grandeur. Valeur approchée à 10^{-n} près. Intervalle d'incertitude. Incertitude absolue. Incertitude relative. Combinaison des incertitudes dans les opérations d'addition, soustraction, multiplication, division.

II. — Nombres relatifs.

1. Orientation d'une droite. Rappel de la définition des nombres relatifs. Opérations sur ces nombres.

2. Grandeurs orientées : mesure algébrique. Comparaison de deux grandeurs par différence. Comparaison de deux grandeurs par leur rapport ; grandeurs proportionnelles.

3. Ensemble des nombres réels.

III. — VECTEURS

1. Définition : segment de droite orienté. Equipollence ; vecteur libre, vecteur lié. Somme, différence, produit par un scalaire ; propriétés de ces opérations.

Décomposition suivant trois vecteurs. Repères composés de trois vecteurs. Changement de repère. Opérations sur les composantes scalaires. Condition de parallélisme. Barycentre.

2. Produit scalaire. Produit vectoriel. Produit mixte. Expression des produits scalaire et mixte, composantes du produit vectoriel dans un repère orthonormé.

3. Vecteurs glissants. Moments. Réduction.

4. Grandeurs vectorielles.

IV. — FONCTIONS ET EQUATIONS

1. Fonction d'une variable. Graphique ; échelles. Variation. Lissage.

2. Fonctions de deux variables. Surface représentative ; courbes de niveau. Fonctions de plusieurs variables. Fonction de point ; champ de scalaires ; champ de vecteurs. Champ de moments ; équiprojectivité.

3. Equations. Variables et constantes. Résolution. Fonctions implicites.

V. — NOMBRES COMPLEXES

1. Définition. Opérations. Propriétés de ces opérations.

2. Représentation d'un vecteur du plan par un nombre complexe. Le nombre i opérateur d'une rotation de $\pi/2$. Image d'un nombre complexe dans un plan. Interprétation géométrique des opérations sur les nombres complexes.

3. Formule de Moivre. Multiplication des arcs.

4. Représentation vectorielle et imaginaire des fonctions sinusoïdales. Amplitude, pulsation, phase. Impédance et transmittance d'un circuit.

VI. — GEOMETRIE

1. Déplacements. Translation. Rotation. Transposition.

2. Symétrie par rapport à un point. Symétrie par rapport à un plan. Produit de deux symétries.

3. Produit de deux transpositions.

4. Transformation reliant deux figures égales, deux figures symétriques. Caractères morphologiques des figures : périodicité ; centre de répétition, axe de répétition ; axe de symétrie, plan de symétrie ; centre de symétrie ; combinaisons de plusieurs des caractères précédents.

5. Homothétie. Similitude.

VII. — STRUCTURES

Structures de groupe, anneau, corps.

Groupes de transformations géométriques, algébriques.

Anneau des entiers, des polynômes entiers.

Corps des rationnels, des réels, des complexes.

VIII. — ANALYSE COMBINATOIRE. Formule du binôme

IX. — ALGÈBRE LINÉAIRE

1. Définition des matrices rectangulaires. Matrice d'une seule ligne, d'une seule colonne. Produit à gauche par une ligne, à droite par une colonne. Multiplication des matrices.

2. Vecteurs à n coordonnées (réelles ou complexes). Espace vectoriel à n dimensions. Bases. Sous-espaces : tout sous-espace peut être défini par des vecteurs indépendants ; en le complétant par d'autres vecteurs indépendants on peut obtenir une base de l'espace.

3. Matrice carrée régulière. Indépendance des lignes ; indépendance des colonnes. Déterminant d'une matrice carrée. Produit de matrices carrées, produit de deux déterminants.

4. Rang d'une matrice rectangulaire.

5. Formes linéaires. Opérations sur les formes linéaires. Représentation de ces opérations par des opérations du calcul matriciel.

Résolution formelle d'un système d'équations linéaires. Discussion.

6. Pratique du calcul matriciel.

Résolution numérique d'un système d'équations linéaires. Méthode de Gauss, Chio, Couffignal ; précision des résultats.

Méthode de relaxation de Southwell.

Lissage d'un relevé de mesures par la méthode de G. Coulmy.

Opérations sur les formes linéaires.

X. — GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. Coordonnées cartésiennes rectangulaires et obliques. Coordonnées polaires, cylindriques, sphériques.

2. Dans un repère orthonormé : distance de deux points ; paramètres directeurs d'une direction de droite ; cosinus directeurs d'une direction d'axe ; changement de repère ; angles.

3. Correspondance entre une courbe et son équation cartésienne. Représentation paramétrique.

4. Equations d'une droite dans le plan, d'une droite et d'un plan dans l'espace. Problèmes d'angles et de distances. Aire d'un triangle. Volume d'un tétraèdre.

5. Lieux géométriques dans le plan.

6. Equations d'un cercle dans le plan, d'une sphère, d'un cercle dans l'espace.

XI. — POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

1. Polynômes ordonnés (variables et coefficients réels ou complexes). Addition et multiplication.

Division des polynômes. Divisibilité par $x - a$. Identité de Taylor. Multiplicité d'un zéro.

Plus grand commun diviseur de deux polynômes.

2. Théorème de d'Alembert (admis sans démonstration). Relations entre les coefficients et les zéros d'un polynôme. Fonctions symétriques des racines (uniquement sur des exemples).

Polynômes à coefficients réels ; zéros imaginaires conjugués ; décomposition en facteurs réels du premier et du second degré.

3. Fractions rationnelles. Opérations.

Division des polynômes ordonnés suivant les puissances croissantes de la variable.

Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

4. Calcul numérique des zéros d'un polynôme. Séparation des racines (Méthode de Graeffe-Peltier, de Parodi). Vecteur propre d'une matrice carrée.

XII. — LIMITES

1. Définition. Somme. Produit. Quotient.
2. Limite d'une suite infinie de nombres réels.
3. Infiniment petits. Infiniment grands. Opérations.

XIII. — CONTINUE

1. Continuité d'une fonction d'une variable en un point, sur un segment.
2. Fonction inverse. Fonctions inverses des fonctions circulaires, de x^m pour m rationnel.
3. Fonction de fonction.

XIV. — DERIVEE D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE

1. Définition. Calcul de la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction de fonction, d'une fonction inverse.
2. Formules des accroissements finis, de Taylor, de Mac Laurin. Développements limités. Formes indéterminées.
3. Variations de fonctions. Tangente à la représentation graphique. Pente (dans un repère orthonormé). Gradient scalaire (dans un repère orthogonal).
4. Calcul numérique des zéros d'une fonction par approximations successives : méthode de Newton, méthode de la corde, méthode d'itération.

XV. — FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

1. Continuité. Dérivées partielles.
2. Fonction composée et sa dérivée.
3. Formules de Taylor et de Mac Laurin.
4. Fonctions homogènes.
5. Fonction implicite d'une variable (on admet l'existence de la fonction implicite et celle de sa dérivée). Calcul de la dérivée.

XVI. — DIFFERENTIELLES

1. Définitions : différentielle, différentielle totale.
2. Changement de variable. Invariance de l'expression formelle de la différentielle.

XVII. — INTEGRALE DEFINIE

1. Définition (de Darboux).
2. Propriétés : linéarité, majorantes, formule de la moyenne. Permutation de l'intervalle d'intégration.
Dérivation : par rapport à la limite supérieure de l'intervalle d'intégration, par rapport à la limite inférieure, par rapport à un paramètre figurant dans l'intégrand.
Cas où une limite de l'intervalle d'intégration croît indéfiniment, où l'intégrand croît indéfiniment.
3. Fonction logarithmique (intégrale de $1/x$). Fonction exponentielle. Fonctions hyperboliques. Fonctions hyperboliques inverses.

XVIII. — QUADRATURES

1. Fonctions primitives.
2. Changement de variable.
3. Intégration par parties.

4. Calcul numérique d'une intégrale définie par une formule de Newton (trapèzes, Simpson, cotes), par une formule de Gauss.

XIX. — INTEGRALES CURVILIGNES

1. Définition. Réduction à une intégrale définie.
2. Intégrale de différentielle totale.

XX. — GEOMETRIE DIFFERENTIELLE ET CINEMATIQUE

1. Tangente à une courbe plane. Forme de la courbe au voisinage d'un point. Courbure.
 2. Dérivées d'un vecteur fonction d'un scalaire.
 3. Construction des courbes planes dont les équations sont de la forme $y = f(x)$; $x = x(t)$, $y = y(t)$; $r = f(\theta)$.
 - Construction des courbes d'équation $f(x, y) = 0$ (uniquement sur des exemples numériques de coniques et de cubiques).
 4. Enveloppes. Développées. Développantes.
 5. Courbes gauches : plan osculateur, courbure, torsion. Hélice circulaire.
 6. Définition des vecteurs position d'un point dans un repère, vitesse, accélération.
 7. Mouvements d'un solide. Champ des vecteurs vitesse. Etude de l'accélération dans le mouvement de translation et le mouvement de rotation.
 8. Mouvement relatif. Composition des vitesses, des accélérations. Mouvement plan sur plan.
 9. Réalisation matérielle des mouvements d'un solide : courbes (surfaces) pouvant glisser sur elles-mêmes ; réalisation des mouvements de translation, de rotation, de pivotement, hélicoïdal.
 10. Nomographie. Echelles. Abaques à entrecroisement. Coordonnées parallèles, abaqués à points alignés. Exemples d'abaques à déplacements.
- Tracé de familles de courbes orthogonales.

XXI. — EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1. Définition. Interprétation géométrique. Interprétations physiques.
 2. Enoncé du problème de Cauchy. Théorème de Cauchy (sans démonstration).
 3. Intégration formelle des équations du premier ordre : à variables séparables, homogènes, linéaires.
 4. Intégration des équations du second ordre linéaires à coefficient constant.
 5. Enoncé du problème de Picard pour les équations du deuxième ordre.
- Exemples.

XXII. — SERIES

1. Définition des séries à termes positifs. Convergence. Règles de convergence : de l'ordre d'infinitude, de d'Alembert, de Cauchy.
2. Comparaison d'une série à une intégrale définie.
3. Séries à termes quelconques. Séries alternées. Séries à termes complexes.
4. Somme de deux séries. Produit de deux séries.
5. Calcul approché de la somme d'une série.
6. Séries entières. Séries à variables réelles ; intervalle de convergence. Séries à variables complexes ; cercle de convergence.
- Exponentielle complexe. Interprétation physique.
7. Somme de deux séries entières. Produit de deux séries entières.
8. Dérivation. Intégration. (Sans démonstration).
9. Calcul approché de la valeur d'une intégrale définie et d'une solution d'une équation différentielle.

XXIII. — GEOMETRIE DESCRIPTIVE

Généralités sur les surfaces : plan tangent et normale. Surfaces circonscrites. Contour apparent d'une surface. Tangente à l'intersection de deux surfaces, à une section plane.

Cônes et cylindres. Représentation en se bornant au cas d'une directrice horizontale sans branche infinie. Intersection avec une droite. Section plane. Détermination d'une directrice horizontale. Développement.

Intersection de surfaces coniques et cylindriques, les surfaces étant définies par deux directrices horizontales. Méthode générale de recherche de l'intersection. Tangentes remarquables.

Exemples d'intersections de prismes, cylindres, pyramides, cônes. On se bornera au cas où les intersections n'ont pas de branches infinies.

Examiner des cas de pénétration et d'arrachement. Donner un exemple de développement.

Intersection de cônes et de cylindres du second degré dans le cas où l'intersection se décompose. On admettra qu'il en est ainsi quand les surfaces ont une section plane commune ou sont bitangentes. Exemples simples.

Sphère. Représentation. Section plane.

Intersection d'une surface cylindrique ou conique et d'une sphère.
