

« Les Mathématiques sont une adaptation volontaire et intelligente de la pensée aux choses. »

Emile BOUTROUX.

LE FREINAGE DES SATELLITES

Le problème du freinage des satellites, en vue de leur récupération, semble avoir été l'un des plus délicats de la balistique de l'espace.

Ce problème avait une première solution rudimentaire dont on a parfois tiré parti, encore qu'assez difficilement. Elle consistait en un ralentissement assez faible mais raccourcissant suffisamment la trajectoire pour qu'elle rencontre la surface de la Terre. Donnons un exemple : soit un satellite sur une orbite circulaire à 300 km du sol, c'est-à-dire à 6 670 km du centre de la Terre. Sa vitesse est donnée par la

formule $v^2 = \frac{K}{d}$ (la constante $K = 398\,000$ si les unités sont le kilomètre et la

seconde). On trouve $v = 7,726$ km/s. Supposons qu'on obtienne, par un procédé adéquat, un ralentissement assez brusque de 0,5 km/s. Le satellite se trouve alors en A (fig. 1) avec une vitesse horizontale de 7,226 km/s. Une formule de la mécanique classique relie la vitesse v à l'apogée (en A), la distance d de cet apogée et le demi grand axe a de l'orbite elliptique :

$$a = \frac{K}{\frac{2K}{d} - v^2}$$

Soit ici $a = 5\,920$ km. On en déduit le périégée fictif $OB = 2a - OA = 5\,170$ km, puis l'angle $AOM = \theta$ (en utilisant l'équation polaire de l'ellipse) :

$$\frac{2}{r} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right) \cos \theta$$

$p = OA = 6\,670$ $p' = OB = 5\,170$ $r = 6\,370$; on trouve $\theta = 48^\circ$. Cela correspond, sur la Terre, à un arc HM de 5 200 km. Mais on devine la difficulté

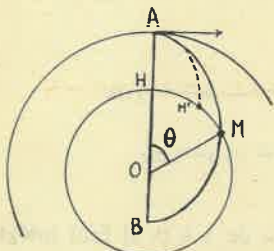


FIG. 1

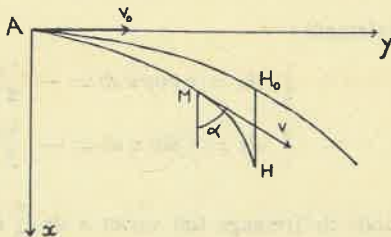


FIG. 2

de prévoir le point de chute à une telle distance. D'autant que s'ajoutent les effets du freinage atmosphérique, du parachutagé final. Nous avons, d'autre part, supposé le freinage initial exactement opposé au mouvement ; si la force a une composante perpendiculaire à la vitesse en A, la chute devient problématique et, en tout cas,

plus difficile encore à bien prévoir. Or il s'est avéré plus difficile de bien diriger le freinage que l'accélération initiale (sans doute en raison de la difficulté de fixer l'orientation du satellite par rapport à sa trajectoire) ; cette difficulté a entraîné les seuls échecs avoués par les Russes.

Depuis ils ont résolu le problème en obtenant un freinage total, ce que nous allons maintenant étudier de façon approchée.

Supposons le satellite lancé horizontalement en un point A où l'accélération de la pesanteur est γ ($\gamma < g$). Supposons la force de freinage exactement opposée à la vitesse et se traduisant par une décélération égale à $n\gamma$ (n ne peut dépasser quelques unités pour les satellites habités). Assimilons enfin le champ de pesanteur au voisinage de A à un champ uniforme (l'axe Ax étant la verticale descendante) ; le champ de pesanteur a pour composantes γ et 0. A l'instant t , le satellite est venu en M ; sa vitesse v fait l'angle α avec la verticale. Les composantes de la vitesse sont :

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \alpha \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \alpha.$$

Les composantes de l'accélération sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -n\gamma \cos \alpha + \gamma \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -n\gamma \sin \alpha.$$

Les équations du mouvement sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} \cos \alpha - v \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = -n\gamma \cos \alpha + \gamma \\ \frac{dv}{dt} \sin \alpha + v \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} = -n\gamma \sin \alpha. \end{array} \right.$$

On en déduit : $\frac{dv}{dt} = -n\gamma + \gamma \cos \alpha \quad v \frac{d\alpha}{dt} = -\gamma \sin \alpha$ (1)

et par conséquent : $\frac{dv}{v} = \frac{n - \cos \alpha}{\sin \alpha} d\alpha,$

soit enfin : $v = v_0 \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^n \frac{1}{\sin \alpha}.$

En posant $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = u$: $v = \frac{v_0}{2} (u^{n-1} + u^{n+1}).$

La formule (1) permet d'exprimer : $dt = -\frac{v_0}{2\gamma} (u^{n-2} + u^n) du.$

Soit finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} dx = v \cos \alpha dt = -\frac{v_0^2}{4\gamma} (u^{2n-3} - u^{2n+1}) du \\ dy = v \sin \alpha dt = -\frac{v_0^2}{2\gamma} (u^{2n-2} + u^{2n}) du. \end{array} \right.$$

La période de freinage fait varier α de $\frac{\pi}{2}$ à 0, soit u de 1 à 0. Il faut intégrer entre ces bornes pour calculer t , x et y . On trouve :

$$t = \frac{v_0}{\gamma} \frac{n}{n^2 - 1} ; \quad x = \frac{v_0^2}{4\gamma} \frac{1}{n^2 - 1} ; \quad y = \frac{v_0^2}{\gamma} \frac{2n}{4n^2 - 1}.$$

Toutefois le calcul de x ne répond pas au vrai problème pratique. Ce qu'il est intéressant de connaître, c'est la hauteur de chute H_0H (voir fig. 2) par rapport à la

trajectoire sans freinage. Celle-ci serait une parabole, au lieu de la trajectoire (circulaire ou elliptique) du vrai mouvement newtonien ; mais l'erreur qui résulte de cette approximation (due à l'hypothèse du champ constant) est de l'ordre du kilomètre. On trouve alors pour abscisse de H_0 :

$$x_0 = y^2 \times \frac{\gamma}{2v_0^2} = \frac{v_0^2}{\gamma} \times \frac{2n^2}{(4n^2 - 1)^2} ,$$

ce qui donne pour hauteur de chute :

$$x - x_0 = \frac{v_0^2}{4 \gamma} \left[\frac{1}{n^2 - 1} - \frac{8n^2}{(4n^2 - 1)^2} \right] .$$

Prenons comme exemple celui du satellite sur orbite circulaire à 300 km du sol ; alors $v_0 = 7\,726$ m/s $\gamma \neq 9$. Voici, suivant les valeurs de n , un tableau de quelques valeurs :

n	2	3	4	5
temps de freinage	9 mn 30 s	5 mn 22 s	3 mn 49 s	3 mn
distance horizontale parcourue (km) ..	1 770	1 140	840	670
hauteur de chute (km)	314	110	57	35

On voit que la distance de freinage reste assez importante, mais il n'y a aucun moyen de la réduire. Par contre, la hauteur de chute est faible et on peut, selon la force utilisée, amener le satellite à avoir une vitesse nulle très près du sol ou à une hauteur encore importante. De toutes façons, le freinage par parachute n'aura à intervenir que dans la chute libre verticale alors que les risques de déviation et aussi d'échauffement seront relativement faibles.

Voici pour terminer des formules approchées simples dans l'hypothèse de satellites sur orbite basse et avec freinage important ($n \geq 3$) : temps de freinage (en secondes) $\frac{900}{n}$; distance de freinage (en kilomètres) $\frac{3\,300}{n}$; hauteur de chute

(en km) $\frac{850}{n^2} .$

Ch. TÉNOT.