

LA NOTATION DES QUANTIFICATEURS

Le premier à faire explicitement usage de quantificateurs fut Frege, professeur de Mathématiques à l'Université de Iéna, en 1879, dans *Begriffsschrift* (traduction libre : notation des concepts).

Mais l'école polonaise a montré que déjà Aristote en avait une idée claire (1).

La notation de Frege était très lourde. En 1894, dans ses *Notations de logique mathématique*, Peano introduisit les symboles (...) et ($\exists$...), repris par Russel dans les *Principia mathematica* en 1910.

L'introduction de $\forall$ (...) pour le quantificateur universel semble due à Hilbert.

Notations actuelles.

La notation de Russel est implantée chez les Anglo-saxons.

Mais il s'est introduit et imposé en Allemagne une nouvelle notation :

Λ ou Λx pour le quantificateur universel,

$\mathbf{V}$ ou $\mathbf{V} x$ pour le quantificateur existentiel.

(1) L'école polonaise a montré qu'il ne faut pas réduire à la syllogistique l'œuvre d'Aristote ; l'essentiel dans son œuvre est la découverte que la validité d'un raisonnement doit être établie formellement, sans référence au contenu ; Aristote est le premier à utiliser des variables pour désigner des objets (au sens large de la logistique) ; c'est en cela qu'il a devancé génialement son temps de quelque 20 siècles.

Cette notation a été introduite pour souligner les rapports de la quantification universelle et de la conjonction notée $\wedge$ d'une part, et ceux de la quantification existentielle et de l'alternation notée $\vee$, d'autre part.

Dans un domaine fini d'éléments $a, b, \dots, h$, on a :

$$\wedge x \equiv a \wedge b \wedge \dots \wedge h.$$

Le quantificateur universel est distributif pour la conjonction :

$$\wedge x (f(x) \wedge g(x)) \equiv \wedge x f(x) \wedge \wedge x g(x).$$

Formules, analogues, duales, pour $\forall$ et $\vee$.

Et les quantificateurs suivent les mêmes règles de dualisation que $\wedge$ et $\vee$; on n'en fait pas assez usage ; ni de ce que la dualisation s'opère ou bien par remplacement de $\wedge$ par $\vee$ et de $\vee$ par $\wedge$, ou bien par négation de l'expression à dualiser et de toutes ses composantes élémentaires. En tenant compte de ce que $D[D(A)] \equiv A$, on obtient par dualisations successives les formules classiques :

$$\begin{array}{l|l} p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) & p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \\ \wedge x f(x) \equiv \neg \vee x \neg f(x) & \vee x f(x) \equiv \neg \wedge x \neg f(x). \end{array}$$

Les deux colonnes sont duales. On voit vraiment ici combien la notation fait apparaître les analogies de structure. C'est encore plus utile dans des formules plus complexes.

Tout ce qui précède suppose évidemment la notation $\wedge$ pour la conjonction. La notation anglo-saxonne ne s'est pas unifiée : c'est le $\&$ des typographes ou un point, le plus souvent omis. Mais le couplage $\wedge, \vee$ a des avantages certains du point de vue logique pur. Il s'y ajoute, ce qui nous paraît important, que l'analogie avec les symboles $\cap$ et $\cup$ de l'algèbre des ensembles présente l'intérêt de rappeler l'isomorphie de la logique propositionnelle et des treillis distributifs. (Un cours de logique pour mathématiciens peut débiter par l'étude de cette isomorphie).

Le système de notation $\wedge \vee \wedge \vee$ a plus d'unité et beaucoup d'avantages. Il suffit de s'y habituer pour le préférer aux autres systèmes. Et, parmi les avantages, il y a des avantages didactiques évidents.

Aussi, au moment où les quantificateurs sont officiellement introduits dans l'enseignement secondaire par le nouveau programme de Mathématiques, nous nous demandons si le moment n'est pas venu d'adopter $\wedge$ et $\vee$ au lieu de $\forall(\dots)$ et $\exists(\dots)$.

De plus, il serait opportun de se détacher des attaches linguistiques particulières de $\forall$ (Allsatz) et $\exists$ (existence). $\wedge$ et $\vee$ deviendront à coup sûr d'usage international.

Le changement de symbolisme sera beaucoup plus difficile dans quelques années lorsqu'un nombre important d'ouvrages auront été composés.

G. LECONTOUR.