

Trois « autres » remarques sur les nouveaux programmes

N'ayant jamais eu beaucoup d'aptitude à la stricte observance d'un texte ou de son « esprit », je ne prétends donner aucun conseil dans les notes suivantes. Je ne désire rien tant que des critiques grâce auxquelles je pourrai, peut-être, progresser. Puissent beaucoup de collègues répondre à ces propos, ceux de Siros et les miens ; rien ne peut mieux donner vie à ces programmes, qui seront nouveaux si nous le voulons, à la fois fanés et sclérosés dès leur apparition, si nous ne les nourrissons pas du lait frais de notre imagination.

1. Fonctions, applications, différentielles, dérivées.

Bien que la question soit plutôt à verser à la Commission du Dictionnaire, je souhaiterais, dès les débuts, la distinction suivante entre *fonction* et *application*. Limitons-nous, pour simplifier, au domaine algébrique. La formule :

$$y = f(x) = \sqrt{x-2}$$

définit une *fonction* ; y est fonction de x . Il y a *application* dès que l'on précise l'ensemble E de départ, ici $E = \{x \in \mathbf{R}, x \geq 2\}$, et l'ensemble F dans lequel est inclus l'ensemble d'arrivée, ici $F = \mathbf{R}$; soit $\bar{F}$ l'ensemble d'arrivée, ici $\mathbf{R}^+$. Alors f est l'application de E sur $\bar{F}$, ce qu'on écrira :

$$f: x \in E \longrightarrow y \in \bar{F}.$$

Une place prédominante est faite, bien justement, à l'*application linéaire*. Soit A l'application linéaire de coefficient a :

$$A: x \in \mathbf{R} \longrightarrow y = ax \in \mathbf{R}.$$

Il est remarquable que la notation peut être introduite dès la classe de Sixième ; on y gagne la disparition des « raisonnements de règle de trois », d'autant plus remarquables qu'ils énoncent si souvent des absurdités.

Le graphe de l'application f est la partie Γ de $E \times \bar{F}$, c'est-à-dire l'ensemble des couples $(x, y) \in E \times \bar{F}$ tels que $y = f(x)$. Nos élèves savent, depuis la Troisième (et peut-être avant), que le graphe de l'application linéaire A est une droite Δ passant par l'origine des coordonnées.

En Première, on a vu ou revu la fonction du second degré. N'est-ce pas une bonne occasion d'introduire la notion de différentielle *avant* celle de dérivée ? Soit

la fonction du second degré $g(x) = ax^2 + bx + c$; x_0 étant une valeur arbitraire choisie de x , le changement de variable $x = x_0 + h$ permet d'écrire :

$$g(x) = g(x_0) + h(2ax_0 + b) + ah^2.$$

Il est courant d'appeler accroissement de y la quantité :

$$k = h(2ax_0 + b) + ah^2.$$

C'est une fonction du second degré de h , accroissement de x .

On reconnaît que l'application linéaire :

$$h \longrightarrow (2ax_0 + b)h$$

aura pour graphe une droite Δ_0 telle qu'elle soit *tangente* en M_0 au graphe Γ de g . « Vus à la loupe », les graphes Δ_0 et Γ sont distincts au voisinage de M_0 ; mais Δ_0 peut être considérée comme une approximation de Γ (« l'écart » étant mesuré par ah^2).

De ces considérations banales, on peut tirer les définitions : pour x_0 , il existe une application linéaire tangente à l'application g , notée dg , et appelée différentielle de g pour x_0 ; le coefficient de cette application linéaire est le nombre dérivé de g pour x_0 .

Il est évident que pour toutes les fonctions rationnelles un calcul semblable au précédent est, en principe, possible. Cela suffit à suggérer la définition générale suivante : soit l'application $f : x \in E \longrightarrow y = f(x) \in \bar{F}$; x_0 étant une valeur choisie dans E , on pose $x = x_0 + h$; il existe une application f^* (celle des accroissements) : $f^* : h \in E' \longrightarrow k = f(x_0 + h) - f(x_0)$; s'il est possible de définir une application linéaire (c'est-à-dire un coefficient $a \in \mathbf{R}$, a fini) :

$$(df)_0 : h \in E' \longrightarrow ah$$

telle que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{ah} = 1$$

alors cette application linéaire est la différentielle de f pour x_0 et son coefficient est le nombre dérivé de f pour x_0 .

On notera que h est élément d'un ensemble E' (facilement défini lorsque E l'est), sans autre restriction.

La notation classique :

$$(df)_0 : dx \longrightarrow dy = adx$$

ou encore mieux :

$$(df)_0 : dx \longrightarrow dy = f'(x_0)dx$$

a l'avantage de conduire sans difficulté à la différentielle d'une fonction de fonction.

On objectera peut-être que pour les fonctions circulaires, par exemple, le calcul est quelque peu artificiel :

$$\sin(x + h) - \sin x = \frac{2}{h} \sin \frac{h}{2} \times \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \times h$$

d'où se déduit :

$$d(\sin x) = (\cos x)dx.$$

Mais est-ce plus artificiel que le procédé classique du calcul de la dérivée ?

En revanche, pour les deux applications réciproques :

$$f : x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow y = \sin x \in [-1, +1]$$

$$\varphi : y \in [-1, +1] \longrightarrow x = \text{Arc sin } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

la différentiation permet d'écrire :

$$dx = \varphi'(y)dy = \varphi'(y) f'(x)dx,$$

ce qui permet un calcul facile de $\varphi'(y)$.

2. Les fonctions logarithmiques.

Il y a beaucoup de mathématiciens qui n'aiment pas cette définition de $\text{Log } x$ par la mesure d'une aire mixtiligne indiquée par le programme. Au niveau de matélem, cela me paraît pourtant combler une lacune : pourquoi, jusqu'ici, fallait-il (en principe) exclure le cas $n = -1$ dans le calcul des primitives de x^n ? Autre avantage encore plus important : fournir, en plus des fonctions circulaires, un autre exemple de définition d'une fonction transcendante.

L'étude des propriétés de $\text{Log } x$ à partir de cette définition est déjà classique en classe de Sciences Expérimentales. Je me sens moins à l'aise pour la limite de

$\frac{\text{Log } x}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Que penserez-vous de la présentation suivante : on note : 1) que la tangente au graphe $x \rightarrow \text{Log } x$ pour $x = e$ passe par l'origine ; 2) que ce graphe admet l'axe des x comme direction asymptotique ; 3) que la droite $y = ax$ (avec

$0 < a < \frac{1}{e}$) coupe le graphe logarithmique en deux points $1 < x_1 < \frac{1}{e}$ et

$\frac{1}{e} < x_2$; 4) par conséquent, quel que soit a ($0 < a < \frac{1}{e}$), il est possible de trouver un nombre x_2 tel que, pour $x > x_2$, $\text{Log } x < ax$. Autrement dit, aussi petit que soit a , positif, il est possible de trouver x assez grand pour que $\frac{\text{Log } x}{x} < a$; or

nous savons que $\frac{\text{Log } x}{x}$ est positif et décroissant, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log } x}{x} = 0$.

Cette justification mérite sans doute diverses critiques ; entre autres, on regrettera peut-être le rôle important accordé au graphe de la fonction logarithmique. Quant à moi, il me paraît au contraire que ce support visuel peut aider les élèves (si le texte du programme ne mentionne ce graphe qu'au 5^e alinéa du paragraphe, cela ne signifie pas qu'il faille en retarder si loin la construction).

3. Les nombres.

Nous avons l'expérience, en matélem, de la construction de $\mathbf{Z}$ et de $\mathbf{Q}$ par la méthode axiomatique ; l'obligation de reprendre pour $\mathbf{Q}$ la même méthode que pour $\mathbf{Z}$ a des vertus pédagogiques : « plus ça change et plus c'est la même chose » : $\mathbf{Z}$ est un anneau, $\mathbf{Q}$ est un corps.

C'est ici que les difficultés nouvelles commencent ; par quoi continuer : $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$?

En « normand », je proposerai le problème suivant déjà expérimenté avec les élèves :

Les lettres $a, b, c, d, \dots$ désignent des entiers relatifs. On appelle entier complexe tout couple $u = (a, b) \in \mathbf{Z}^2$ et $\mathbf{CN}$ l'ensemble des entiers complexes qui vérifient les axiomes suivants :

- (I) $(a, b) = (a', b') \iff a = a' \text{ et } b = b'$.
- (II) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
- (III) $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Les nombres $(a, 0)$ sont dits entiers complexes de 1^{re} catégorie ; les nombres $(0, b)$, entiers complexes de 2^e catégorie.

1° (I) définit une relation d'équivalence.

2° Montrer que $\mathbf{CN}$ est un groupe commutatif pour l'addition.

3° Montrer que la multiplication dans $\mathbf{CN}$ est commutative et distributive par rapport à l'addition. Quelle est la structure de $\mathbf{CN}$?

4° Montrer que tout entier complexe u a un conjugué, noté $\bar{u}$ tel que $u + \bar{u}$ et $u \times \bar{u}$ soient deux entiers complexes de 1^{re} catégorie. Vérifier que $u \times \bar{u}$ est égal au carré de la norme de u , c'est-à-dire à la somme des carrés de ses deux termes. $\|u\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

5° Montrer que le sous-ensemble des entiers complexes de 1^{re} catégorie est fermé pour l'addition et la multiplication et qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

6° Calculer les puissances successives $u^2, u^3, \dots$ d'un entier complexe u . Appliquer en particulier le calcul à $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$.

7° Trouver, s'il en existe, tous les entiers complexes vérifiant l'une des équations :

$$\begin{array}{ll} \text{(E1)} & x^2 - 3 = 0; \\ \text{(E2)} & x^2 + 4 = 0; \\ \text{(E3)} & x^2 - (1, 5)x + (-6, 2) = 0; \\ \text{(E4)} & x^2 - 4x + 5 = 0. \end{array}$$

Je ne crois donc pas que la grosse difficulté (pour le professeur) soit d'introduire les nombres complexes ; la variété des exercices possibles doit même en faire un chapitre très attrayant pour les élèves. Je me sens beaucoup plus circonspect pour les « notions sur les nombres réels », n'ayant fait qu'une seule tentative, il y a deux ans, et avec un succès partiel.

Voici quel avait été le plan suivi. La construction de $\mathbb{Q}$ ayant été acquise, l'arithmétique a été étudiée. Vient alors l'étude des rationnels décimaux, y compris les valeurs décimales approchées d'un rationnel quelconque. Un exemple classique montre l'insuffisance de ces rationnels : valeurs approchées de $\sqrt{2}$; il n'y a pas, dans $\mathbb{Q}$, de nombre x tel que $x^2 = 2$.

L'exemple des suites infinies (x_n) convergentes dans $\mathbb{Q}^+$ (ne considérer que les positifs est une simplification sans inconvénient théorique) permet de montrer que pour une telle suite, la limite, pour p et q infinis, de $|x_p - x_q|$ est zéro. Mais la réciproque n'est pas vraie : on a justement vu le cas des approximations décimales de $\sqrt{2}$.

Appelons *suite de Cauchy* toute suite infinie (x_n) de termes appartenant à $\mathbb{Q}$ et telle que :

$$\lim_{p, q = \infty} |x_p - x_q| = 0.$$

Définissons l'équivalence de deux suites de Cauchy par :

$$\lim_{n = \infty} |x_n - x'_n| = 0 ;$$

il est facile de vérifier que c'est bien une relation d'équivalence. Alors, de deux choses l'une : 1° La suite de Cauchy (x_n) converge dans $\mathbb{Q}^+$; soit x sa limite ; x est le plus petit des majorants qui appartiennent à (x_n) et le plus grand des mineurs qui appartiennent à (x_n) . 2° La suite (x_n) ne converge pas dans $\mathbb{Q}^+$; on désignera encore sa limite par x qui sera un nombre réel non rationnel, plus petit que tous ses majorants de (x_n) , plus grand que tous ses mineurs de (x_n) .

L'ensemble $\mathbb{R}$ ainsi défini contient évidemment $\mathbb{Q}$. Il reste à montrer qu'il prolonge les propriétés essentielles de $\mathbb{Q}$, corps commutatif totalement ordonné et partout dense.

Il est immédiatement visible qu'un des inconvénients pédagogiques majeurs de l'exposé est sa longueur. Il ne faut pas lasser l'auditoire qui comporte, à côté de jeunes esprits qui aspirent à la rigueur et à l'abstraction, des élèves surtout soucieux d'utiliser correctement les mathématiques dans les applications. Il serait donc opportun de mener ces considérations théoriques de front avec de nombreux exercices de calcul numérique (par exemple, valeurs approchées de sommes de séries numériques convergentes, la convergence étant affirmée sans démonstration ; calcul de e , de π , ...); l'emploi des machines à calculer, de la règle, des tables de valeurs

numériques, ou la construction de telles tables (par équipes), peut aider certains élèves à mieux comprendre l'intérêt pratique de cette étude.

Mais, comme je l'ai déjà dit, je n'ai qu'une courte et très partielle expérience. Si je la livre ici, c'est dans l'espoir de susciter d'abondantes critiques.

G. W.

Sur la limite de $\frac{\text{Log } x}{x}$.

Voilà plus simple qui m'est communiqué par notre Collègue Itard ; la notion d'aire mixtiligne rend évidente la proposition suivante : si, pour tout x supérieur à a : $f(x) > g(x) > 0$, alors

$$\int_a^x f(t) dt > \int_a^x g(t) dt.$$

Or $\forall x > 1$, $\frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{x} > 0$, donc $\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} > \text{Log } x$; soit $2(\sqrt{x} - 1) > \text{Log } x$

et finalement $\frac{\text{Log } x}{x} < 2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right)$; le second membre a pour limite zéro lorsque x tend vers l'infini.

Remarque : l'application réitérée de la même méthode à $0 < \sin x < 1$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$ donne la suite de relations d'ordre

$$1 - x < \cos x < 1 ; x - \frac{x^2}{2} < \sin x < x ; 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} ; \text{etc...}$$