

NOTES SUR LES NOUVEAUX PROGRAMMES EN MATELEM (*)

Les remarques qui suivent ont surtout pour but d'en provoquer de pareilles — ou plutôt de meilleures. Elles demandent des compléments, mises au point, rectifications, contradictions... que la rédaction du *Bulletin* accueillera avec avidité.

1. Construction des nombres.

Entiers naturels. — Leur construction axiomatique correcte se fait déjà dans certaines classes, mais on peut trouver que c'est long et pénible, alors une axiomatique « tempérée », surabondante, est encore acceptable si l'on dénonce ses défauts.

Par exemple : on se donne la suite des entiers (zéro, un...), c'est une phrase ; on énonce les significations de « ajouter un », « ajouter b à a » ; puis, postulats : $a = a' \iff a + b = a' + b$ (l'addition est « déterminée » et réciproquement les nombres entiers sont des éléments « réguliers » dans l'addition), $a + b = b + a$, $a + (b + c) = (a + b) + c$...et quelques autres peut-être : on a une demi-douzaine d'énoncés précis, choisis, qui sont des comptes rendus d'expériences.

Ceci fait, on peut annoncer avec fermeté que la suite de l'arithmétique se déduira logiquement des résultats de ce premier chapitre. Par exemple, si on définit la multiplication par : $a \times n = a + a + \dots + a$ (ce qui, entre nous, n'est pas fameux) ; les propriétés de celle-ci (commutativité, associativité et distributivité par rapport à l'addition) se déduiront de la propriété de l'addition :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n) + \dots + (l_1 + \dots + l_n) = (a_1 + \dots + l_1) + \dots + (a_n + \dots + l_n)$$

(on n'a pas fait appel à l'expérience des cartes de boutons).

Entiers relatifs. — La méthode axiomatique semble s'imposer : un entier relatif est une classe d'équivalence de couples (a, b) d'entiers naturels. Ceci est maintenant bien classique. L'introduction rapide du couple réduit : $(a, 0)$ ou a^+ ou $(+, a)$, $(0, b)$ ou b^- ou $(-, b)$, rassure les élèves : le jeu est correct.

Enfants, nous nous demandions une fois si la « règle des signes » ($+$ par $+$...) se « démontrait ». Un camarade, d'une autre classe, nous avait affirmé que son maître la démontrait ! — nous vivions en plein mystère !

Pour les *rationnels*, même méthode : un rationnel est une classe de couples appelés fractions, il y a deux couples réduits, mais on en choisit un. Pour ces deux chapitres, l'axiomatique peut être correcte et définitive.

Il est bon de marquer un temps d'arrêt ici dans ce long problème de construction ; on a les premiers exemples de groupe, anneau, corps, il en faut bien d'autres !

Passer à l'arithmétique ; les congruences modulo d fourniront sur $\mathbb{Z}$ un nouvel exemple d'anneau, et, si d est premier, de corps — et en géométrie (qu'avec un bon réglage on peut conduire en même temps), on notera que l'angle $(\vec{U}, \vec{V})$ par exemple se mesure non pas par un nombre algébrique, mais par une classe modulo 2π , avec un groupe additif (là on devra avouer que la définition de la multiplication est vicieuse, car $a + a$ n'est pas $2a$). La relation de Chasles s'appuie sur le fait que l'addition des classes est « déterminée », alors on peut choisir les échantillons des mesures pour trouver zéro (modulo 2π).

(*) Ne reculant devant aucune hardiesse, surtout lorsqu'il s'agit de profondes réformes, la Rédaction forge ce néologisme « matélem », la classe dont il s'agit ayant repris son vieux titre de *mathématiques élémentaires*. Quant aux nouveaux programmes, cf. Bulletin 222, p. 245.

Nombres réels. — C'est difficile. II, 5° y prépare (fractions décimales, quotients) ; 6° (rapports, racines...) et 8° (calculs approchés) engendrent le I, 4° (notions sur les réels). On peut, avec cela, composer une définition correcte des réels.

Que ces réels soient introduits à partir d'une représentation décimale n'est pas grave, car on peut montrer que la périodicité (ou non) d'un développement est *stable* malgré un changement de la base de numération.

L'idée directrice peut être la suivante : on sait ce que sont les *valeurs approchées* par défaut et par excès de $3/7$ (paragr. 5°). Au paragraphe 8°, on définit les *racines carrées approchées* de 2 ; ce ne sont des valeurs approchées de *rien du tout*, mais les deux suites qu'elles constituent ont les mêmes propriétés que plus haut (adjacentes) et avec elles on fait les mêmes opérations (encadrements, erreurs...). Alors ce « rien » devient « quelque chose » (voir Larousse), car c'est l'opération qui crée l'objet (comme : c'est la loi qui fait le citoyen, citation connue).

Nombres complexes. — Ils devront attendre que la géométrie en soit arrivée au 8° Similitude, car, plutôt que de « poser » les règles axiomatiques des opérations, il est préférable d'adopter l'exposé géométrique, avec le point de vue suivant : on ne va rien inventer, mais seulement « noter » des résultats géométriques tous connus et constater qu'on est conduit à une *extension* du corps des réels, avec *concordance* pour les deux opérations fondamentales.

Plan très sommaire :

1° Groupe additif des vecteurs libres du plan	addition $(a, b) + (a', b')$.
Propriétés de la somme vectorielle	propriétés de l'addition.
2° A toute similitude directe S de rapport $\rho > 0$ et d'angle θ (classe mod 2π) est associé un vecteur $\vec{V}$ non nul de longueur ρ , angle $(\vec{Ox}, \vec{V}) = \theta$	module et argument ρ, θ .
Echantillon $\vec{OA}$ de $\vec{V}$, similitude notée S_{OA}^+ .	
Similitude-produit S_{OC}^+ de S_{OA}^+, S_{OB}^+ : on obtient S_{OC}^+ en appliquant S_{OA}^+ à $\vec{OB}$,	
$S_{OA}^+(\vec{OB}) = \vec{OC}$	multiplication : $\rho\rho', \theta + \theta'$.
Propriétés de cette loi de composition (groupe)	propriétés de la multiplication.
Cas particulier : rotation $+$ $\frac{\pi}{2}$	nombre i .
« carré » de celle-ci	$i^2 = -1$.

3° La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition consiste à reconnaître pour les similitudes une *linéarité* qu'on aura vue en géométrie : le vecteur construit avec $\vec{OA}, \vec{OB} + \vec{OC}$, est la somme des vecteurs construits avec $\vec{OA}, \vec{OB}$ et $\vec{OA}, \vec{OC}$:

$$S_{OA}^+(\vec{OB} + \vec{OC}) = S_{OA}^+(\vec{OB}) + S_{OA}^+(\vec{OC}).$$

Remarque. — La révision de la trigonométrie peut se faire à ce moment ; $\cos(a + b)$ et compagnie s'obtiennent par le produit :

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b).$$

C'est presque obligatoire puisque Moivre est au programme.

Exercices. — Bien que le programme ne veuille pas d'applications à la similitude et à l'inversion, il va sans dire que les exercices rattachés directement aux définitions s'imposent. Ainsi :

— L'étude de l'inversion $Z = \frac{k}{z}$ avec k réel positif complète ce qu'on fait en géométrie (mais ne pas traiter la correspondance homographique générale).

— La division harmonique et le quadrangle harmonique étudiés jusqu'alors séparément sont pauvres respectivement, l'un en géométrie, l'autre en algèbre. Main-

tenant, l'étude du nombre $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ (mesures complexes) associe les deux : les

calculs sont les mêmes (dans un corps) que sur la droite (à s'y tromper, évidemment — c'est-à-dire à ne pas savoir si c'est sur la droite ou sur le plan). La géométrie du plan s'introduit par les arguments qui ne sont plus nuls modulo π ; le choix d'une origine fournit $OA^2 = OB^2 = \overline{OC} \cdot \overline{OD}$ et donne avec naturel les propriétés connues. Si on choisit en outre un axe des réels et une unité, le problème se relie à l'étude de la correspondance $Z = z^2$ (ce qui est peut-être un peu hors du programme, même en exercice).

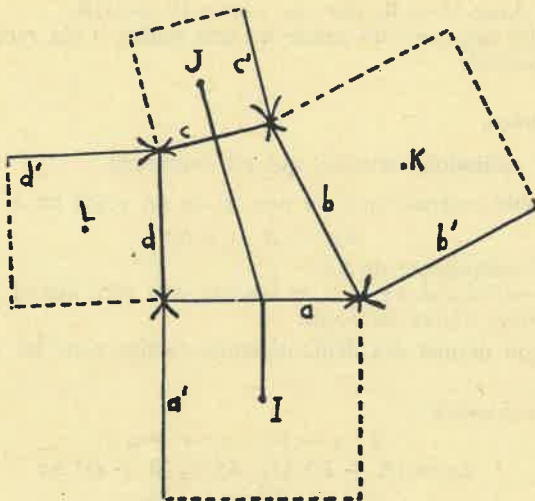
Autres exercices : 1° Lieu de M image de z pour que $(z + a)(z - a)$ soit réel (a complexe) : géométrie analytique simple en prenant la forme cartésienne ; géométrie dite pure par les arguments : on trouve une génération de l'hyperbole équilatère.

2° Ligne polygonale fermée orientée de quatre côtés, bordée d'un côté choisi par quatre carrés ; I, J, K, L sont les centres des carrés. Montrer que les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{KL}$ ont même longueur et sont de directions perpendiculaires.

On prend les vecteurs libres des côtés orientés $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$; par la rotation $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$ on obtient $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}', \vec{d}'$ (cette rotation opérant sur les vecteurs libres n'a pas de centre). En évaluant $\vec{IJ}$:

$$\vec{IJ} = \frac{\vec{a}'}{2} + \frac{\vec{b} - \vec{d}}{2} + \frac{-\vec{c}'}{2}$$

et en appliquant la rotation $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$: $\vec{a}' \rightarrow -\vec{a}$, etc..., on obtient $\vec{KL}$.



C'est de la géométrie des vecteurs libres, — mais si on prend les nombres complexes : $a \dots$ et $ia \dots$, c'est de l'algèbre, — on ne sait plus ce que c'est, et c'est ce qu'il faut, — il n'y a que le langage qui est changé.

3° Cercles de Chasles ; très sommairement :

$$z = a \cos \varphi + ib \sin \varphi, \quad M$$

$$z_1 = a \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + ib \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad M_1$$

$$p = z + iz_1 = (a - b) \cos \varphi - i(a - b) \sin \varphi \quad P$$

$$q = z - iz_1 = (a + b) \cos \varphi + i(a + b) \sin \varphi \quad Q,$$

d'où les lieux de P et Q (cercles de Chasles), et la relation

$$pq = z^2 + z_1^2 = a^2 - b^2 - c^2$$

qui précise la disposition en quadrangle harmonique avec les foyers.

2. Sur l'homothétie.

Si c'est une correspondance ponctuelle, la famille n'est un groupe (non commutatif), vis-à-vis de la composition, que si elle adopte les translations. Si elle est correspondance vectorielle, c'est-à-dire opère sur les vecteurs libres, elle est définie simplement par k non nul ; $k = 1$ donne l'élément neutre dans la loi de composition ; ces homothéties n'ont pas de centre ; on a un groupe (commutatif) vis-à-vis de la composition, sans besoin d'adoption.

Les propriétés sont celles d'une application linéaire, écrites :

$$\begin{cases} \mathcal{H}(\vec{U}) + \mathcal{H}(\vec{V}) = \mathcal{H}(\vec{U} + \vec{V}) \\ \mathcal{H}(\lambda \vec{U}) = \lambda \mathcal{H}(\vec{U}) \end{cases}$$

avec leurs significations en langage géométrique.

L'homothétique de l'ensemble : $\vec{U} = x\vec{A} + y\vec{B}$

$\vec{A}, \vec{B}$ indépendants, x, y variables, est défini par :

$$\mathcal{H}(\vec{U}) = x \mathcal{H}(\vec{A}) + y \mathcal{H}(\vec{B}).$$

Si on fixe des origines (retour à une homothétie ponctuelle), on a un plan (ou un lieu dans le plan, ou une région, selon ce que sont x et y).

Si on a : $\text{long. } \vec{U} = R$, par $\mathcal{H}_k : \text{long. } \vec{U}' = |k|R$
d'où, si on fixe des origines : un cercle ou une sphère. Cela renouvelle un peu ce qu'on a fait en Seconde.

3. Sur les dérivées.

Signalons la définition suivante, qui est commode :

x étant variable indépendante ou non, si en un point on a :

$$\Delta y = (A + \varepsilon) \Delta x$$

A étant indépendant de Δx ,

ε étant nul quand $\Delta x = 0$, et tendant vers zéro quand Δx tend vers zéro,

A est appelé nombre dérivé au point.

1) Cette façon permet des démonstrations faciles pour les propriétés ajoutées au programme :

a) fonction composée :

$$f: x \rightarrow y; \quad g: y \rightarrow z$$

$$\Delta z = (A + \varepsilon_1) \Delta y, \quad \Delta y = (B + \varepsilon_2) \Delta x$$

d'où :

$$\Delta z = (AB + \varepsilon_3) \Delta x,$$

b) *fonction inverse* :

$$\Delta y = (A + \varepsilon) \Delta x \quad \left\{ \begin{array}{l} A \neq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{A + \varepsilon} \Delta y = \left(\frac{1}{A} + \varepsilon_1 \right) \Delta y.$$

2) Si on juge que la *différentielle* gagne à être définie en Mathématiques avant d'être « bricolée » en Physique, elle s'introduit *en même temps* que la dérivée (sinon avant !):

x étant variable indépendante, donc aussi Δx , la différentielle, au point, est $A \cdot \Delta x$. C'est le *premier* terme dans l'approximation d'un Δ ; si on dit : c'est l'application linéaire tangente, c'est vectoriel à volonté; on peut dire « terme principal » (mais c'est ennuyeux quand il est nul), on ne peut pas dire « partie principale ».

L'invariance du sens de l'écriture $dy = A dx$ usuelle ne demande pas de démonstration nouvelle : c'est contenu dans ce qu'on a fait plus haut 1) a).

J. SIROL,
(Lycée Louis-le-Grand).