

DISTANCES

par Marc BARBUT

(Groupe de Mathématique Sociale et de Statistique - E.P.H.E.)

« Des distances, l'amour peut rire,
l'amitié n'en supporte point. »

BÉRANGER.

Nous nous servons constamment d'expressions telles que : « la pensée de Pascal est très *éloignée* de celle de Montaigne », « le climat de Marseille est *voisin* (ou *proche*) de celui de Gênes », « il y a une grande *distance* entre le programme du Parti Communiste et celui des Indépendants », etc...

Ces mots soulignés, et tous ceux qui appartiennent au même champ sémantique, sont également utilisés en géométrie et en topologie, de façon très précise : ils recouvrent alors des instruments de calcul. Il est vraisemblable que le sens technique de ces termes joue un grand rôle dans nos représentations lorsque nous les utilisons dans le langage courant ; l'expérience que nous avons des distances spatiales (tout au moins localement), l'enseignement de la géométrie qui nous a été donné à l'école conditionnent notre représentation de l'espace et le sens que nous donnons aux termes du champ « distance ».

Est-il possible d'aller plus loin (*) ? De même que les distances géométriques ont été construites pour rendre calculables, communicables les données de notre intuition spatiale, ne peut-on fabriquer des « distances » qui nous rendraient les mêmes services en étant applicables à d'autres objets que les « points » de la géométrie (qui sont considérés comme des représentations des points matériels de l'espace physique dans le modèle mathématique de celui-ci qu'est l'espace de la géométrie métrique classique) ?

I. — LES DISTANCES EN GEOMETRIE

Rappelons d'abord comment on opère en géométrie métrique classique. A chaque couple de points (A, B) , on associe un *nombre* réel positif ou nul, la *distance* entre A et B , notée $d(A, B)$. Mais, évidemment, ce nombre n'est pas choisi de façon quelconque. D'abord on sait que si la distance entre deux points est nulle, les deux points sont confondus, et réciproquement. Ensuite, les distances de A à B et de B à A doivent être

(*) Sans y prendre garde, l'auteur introduit ici un terme du champ « distance » justement dans un sens que l'article se propose de justifier ; on ne saurait mieux souligner l'intérêt de la question. (N.D.L.R.).

égales (en réalité, cette condition n'est pas essentielle et l'on peut s'en affranchir ; on le devra dans beaucoup d'applications, par exemple lorsque la distance est définie par une durée de parcours ou un coût de transport ; si l'aller et le retour ne définissent pas la même distance, on retiendra comme distance la plus grande des deux évaluations, par exemple).

Enfin on traduit de façon précise le vieil adage « la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre » : étant donné trois points A, B, C , la distance de A à B est inférieure ou exceptionnellement égale à la somme des distances de A à C et de B à C .

On peut résumer ces propriétés de la façon suivante : E désignant l'espace, définir la distance d sur E revient à définir une application de E^2 dans R^+ [c'est-à-dire associer à tout couple (A, B) de points pris dans E un nombre réel positif ou nul $d(A, B)$] telle que :

I) $A \in E, B \in E$, il existe un nombre réel positif ou nul $d(A, B)$ et un seul appelé distance de A à B ;

II) $d(A, B) = 0 \iff A = B$;

III) $d(A, B) = d(B, A)$;

IV) $d(A, C) + d(C, B) \geq d(A, B)$.

De ces relations, la quatrième, la *relation triangulaire* (faussement dénommée souvent « inégalité triangulaire »), est la plus remarquable, car c'est par elle que nous traduisons le sentiment, l'intuition que nous avons de la distance dans la *structure algébrique* des nombres, à savoir deux des opérations fondamentales que l'on peut faire avec ceux-ci : les additionner (+) et les comparer entre eux, les ordonner ($\geq$).

Exemples.

Prendre comme distance entre deux points A et B la longueur du segment AB n'est pas la seule façon de satisfaire aux conditions I), II), III) et IV) ; en voici d'autres exemples :

1° si $A = B$, alors $d_1(A, B) = 0$ et si $A \neq B$, alors $d_1(A, B) = 1$ (*) ;

2° $d_2(A, B) = \sqrt{\text{longueur du segment } AB}$; on s'assurera facilement que les quatre conditions sont vérifiées ;

3° soit le plan rapporté à deux axes de coordonnées x et y (pour simplifier, pris orthonormés), M_1 et M_2 ayant respectivement pour coordonnées x_1, y_1 et x_2, y_2 , on appelle distance des deux points la plus grande des valeurs absolues des différences $|x_2 - x_1|$ et $|y_2 - y_1|$, soit encore $d_3 = \sup(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)$;

(*) Dans sa conférence « Espaces euclidiens et espaces métriques », parue dans le *Bulletin* 183 de janvier 1957 et reprise dans *Structures algébriques et structures topologiques*, p. 117, André Revuz, à propos de cet exemple écrivait : « C'est évidemment un cas extrême qui ne peut guère avoir d'autre rôle que celui de garde-fou, en fournissant un contre-exemple éventuel à un théorème conjecturé sur les espaces métriques. » D'un point de vue mathématique, sans doute. Toutefois, n'est-ce pas justement la « distance » qui existe dans le domaine de la douleur physique ? Si vous me marchez sur le pied, je hurlerai ; si un éléphant vous écrase, j'en serai fâché mais je ne sentirai rien. (N.D.L.R.).

4° dans le plan rapporté aux mêmes axes de coordonnées, on peut appeler distance des points M_1 et M_2 la somme :

$$d_4(M_1, M_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|,$$

c'est la distance usuelle dans une ville en damier (pour qui n'est pas « monte en l'air »).

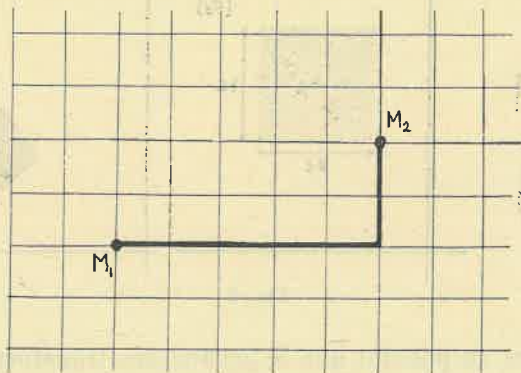


FIG. 1

Voisinages.

Dans la plupart des calculs concernant les distances, seules les propriétés I, II, III et IV interviennent. Une définition de la distance ayant été adoptée, on peut en déduire une définition de la *proximité* (relative à cette distance) : A est dit plus proche de B que de C si, et seulement si :

$$d(A, B) < d(A, C).$$

On peut alors définir le *voisinage* d'un point A : M est voisin de A à ε près si, et seulement si :

$$d(A, M) < \varepsilon.$$

En vertu de la relation triangulaire, il apparaît immédiatement que deux points voisins à ε près d'un même troisième sont voisins entre eux à 2ε près au plus.

Bien entendu, la forme des voisinages dépend de la définition choisie pour la distance. Dans l'exemple n° 1, le voisinage d'un point est réduit à lui-même ; avec la distance d_2 , comme avec la distance classique d_0 = longueur du segment, le voisinage est un disque ouvert dans le plan (une boule ouverte dans l'espace) ; dans l'exemple n° 3, le voisinage de A est la surface intérieure d'un carré de centre A dont les côtés parallèles aux axes mesurent 2ε ; enfin dans le cas n° 4 (en supposant encore les coordonnées orthonormales pour simplifier le tracé de la figure), le voisinage de A est la surface d'un carré de centre A et dont les côtés sont parallèles aux bissectrices des axes de coordonnées.

De la définition d'un voisinage résulte celle d'une *topologie*. Si nous laissons de côté l'exemple d_1 (qui conduit à la topologie discrète), les topologies du plan définies à partir des distances d_2 , d_3 ou d_4 sont équivalentes entre elles et équivalentes à celle que l'on obtient en prenant

pour distance la longueur du segment (d_0). Par « équivalentes », nous signifions ici que si un point M tend vers un point A dans l'une de ces topologies, M tend également vers A dans une autre : dans tous les cas, la distance de M à A tend vers zéro (que ce soit d_0 , d_2 , d_3 ou d_4).

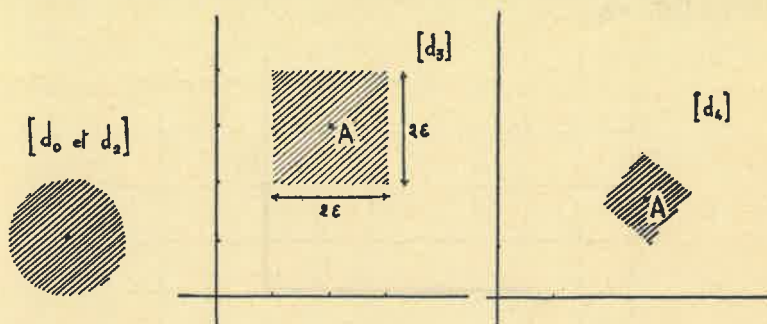


FIG. 2

Remarquons en passant que le groupe des transformations du plan (ou de l'espace) laissant les distances invariantes dépendra de la définition adoptée pour la distance.

« Intermédiaire entre ».

Si l'on veut, dans la gamme de toutes les distances *a priori* possibles, restreindre le choix, on peut le faire en cherchant à traduire de la façon la plus simple possible en termes de nombres, non seulement la relation « plus proche de », mais aussi la relation (ternaire) « intermédiaire entre ». En ce qui concerne les nombres, convenons de dire que C est entre A et B si, et seulement si :

$$d(A, C) + d(C, B) = d(A, B),$$

c'est-à-dire si la relation triangulaire IV se réduit à l'égalité. En ce qui concerne les « points », il faut choisir quelle sorte de configuration pour les points A, B et C correspond au cas où la relation numérique précédente est vérifiée.

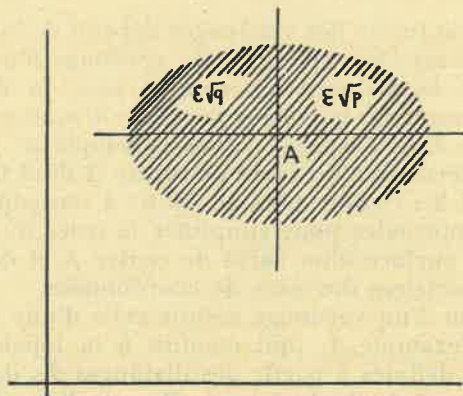


FIG. 3

Si la distance de deux points est la longueur du segment qui les joint, C est alors situé sur le segment AB. Mais la réciproque n'est pas vraie ; on démontre que la distance la plus générale pour laquelle on a

$$d(A, C) + d(C, B) = d(A, B) \iff C \in \text{segment AB}$$

est la « distance en moyenne quadratique » définie par :

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{p(x_2 - x_1)^2 + q(y_2 - y_1)^2}$$

où p et q sont deux nombres réels positifs arbitraires mais choisis une fois pour toutes (les coordonnées étant orthonormées). Par rapport à cette distance, les voisinages de A sont des ellipses de centre A et dont les axes respectivement parallèles à Ox et Oy ont pour mesures $2 \pm \sqrt{p}$ et $2 \pm \sqrt{q}$. Bien entendu, la longueur du segment $M_1 M_2$, ou distance euclidienne, appartient à la famille des distances en moyenne quadratique, puisqu'elle correspond au cas particulier $p = q = 1$.

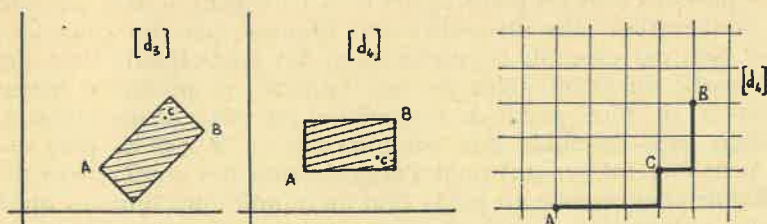


FIG. 4

Avec la distance d_s , la relation d'égalité $d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$ exprimera que le point C appartient à la surface de diagonale AB et dont les côtés sont inclinés de 45° sur les axes de coordonnées.

Avec la distance d_4 , la même relation d'égalité exprimera que le point C appartient au rectangle de diagonale AB dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Revenons à l'image de la ville en damier, le carrefour C est « entre » les carrefours A et B si l'on peut passer par C pour aller de A à B par l'un des plus courts chemins (car ici le plus court chemin n'est pas unique).

Ainsi, à chaque choix de la distance correspond une signification du mot « intermédiaire » et, en général, à chaque signification de ce mot une famille de distances.

II. — ESPACES METRIQUES

Revenons maintenant au cas d'autres ensembles que celui des points de la géométrie. De façon tout à fait générale, on a défini une distance sur un ensemble E si, à chaque couple (x, y) de $E \times E$, on associe un nombre réel et un seul noté $d(x, y)$ tel que :

- I) $d(x, y) \geq 0$;
- II) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- III) $d(x, y) = d(y, x)$;
- IV) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Autrement dit, définir une distance d sur l'ensemble E, c'est définir une application du produit cartésien $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ de telle façon que les propriétés I, II, III et IV soient vérifiées. E est alors un *espace métrique* ;

les expressions « plus proche de », « voisinage » y prennent alors le sens correspondant au choix de la distance adoptée. Si, d'autre part, E est déjà muni d'une certaine structure pour laquelle l'expression « intermédiaire entre » ait une signification intuitive, on traduira celle-ci par l'égalité :

$$y \text{ entre } x \text{ et } z \iff d(x, y) + d(y, z) = d(x, z).$$

Nous appliquerons ces principes à deux exemples.

Parties d'un ensemble fini.

On définit d'abord une *mesure* sur l'ensemble des parties de l'ensemble fini E considéré. Pour cela on affecte chaque élément de E d'un *poids*, c'est-à-dire qu'on définit une application de E dans $\mathbf{R}^+$. Si l'on n'a pas de raison de donner aux éléments de E une pondération plutôt qu'une autre, on prendra tous les poids égaux à $+1$; il peut arriver au contraire qu'une pondération plus diversifiée soit imposée par des considérations spéciales. Soit par exemple le recensement des participants à un Congrès international ; du strict point de vue humain, la première mesure de l'ensemble (resp. d'une partie de l'ensemble) est l'effectif des congressistes (resp. d'un sous-ensemble des congressistes) : $\forall x \in E, p(x) = +1$; mais il peut être intéressant pour l'organisation des conférences de donner à chaque congressiste un poids égal au nombre des langues qu'il peut parler, les polyglottes auront alors un grand poids et les mesures des parties de E seront très différentes de ce qu'elles étaient dans le premier cas.

Chaque élément de E étant pondéré, la mesure $m(X)$ d'une partie X de E est la somme des poids de ses éléments ; on pose évidemment $m(\emptyset) = 0$.

X et Y étant deux parties de E , on peut appeler distance de X à Y la mesure de la différence symétrique de X et Y , c'est-à-dire la somme des mesures de la partie de X qui n'est pas incluse dans Y et de la partie de Y qui n'est pas incluse dans X :

$$d(X, Y) = m(X \Delta Y) = m(V) + m(W).$$

On vérifie facilement que les axiomes de la distance sont bien vérifiés. En particulier la relation III (symétrie) résulte du caractère de la différence symétrique qui fait jouer le même rôle aux deux parties X et Y ; la relation triangulaire exprime qu'en général, lorsque l'on considère trois parties X, Y, Z , chacune contient des éléments qui n'appartiennent à aucune des deux autres.

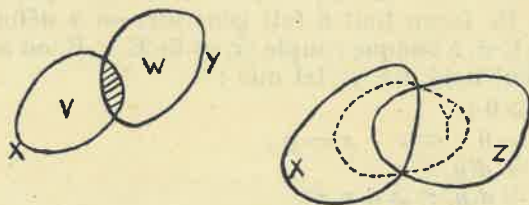


FIG. 5

L'expression « Y est une partie de E intermédiaire entre les parties X et Z » traduit au contraire la situation spéciale suivante : les éléments

communs à X et Z appartiennent à Y et les éléments de Y appartiennent à X ou à Z , c'est-à-dire à la réunion de X et Z . Cela rattache l'expression « entre » de la structure booléenne de l'ensemble des parties par les opérations d'intersection et de réunion, ce qui s'écrit :

$$X \cap Z \subset Y \subset X \cup Z \iff d(X, Y) + d(Y, Z) = d(X, Z).$$

Dans les applications pratiques, l'ensemble E dont il s'agira de distancer les parties sera souvent l'ensemble des graphes des correspondances entre deux ensembles A et B donnés, c'est-à-dire l'ensemble des parties du produit catésien (supposé fini) $A \times B$ (distances entre réseaux, entre sociogrammes, etc...). En particulier, si E est l'ensemble des rangements (dans un certain ordre) des éléments d'un ensemble fini A , c'est-à-dire une sélection dans l'ensemble des parties du produit cartésien $A \times A$, la distance entre deux rangements est celle qui consiste à compter, entre deux rangements de A , le nombre des désaccords (x avant y dans le premier rangement et y avant x dans le second).

Espaces vectoriels.

Supposons maintenant que l'ensemble à distancer est un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbf{R}$ des réels, c'est-à-dire l'ensemble des listes $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_n$. Dans la pratique, ces vecteurs pourront être des réseaux valués, ou des chroniques (de prix, de populations, etc...), ou des variables aléatoires, etc...

Trois distances sont usuellement utilisées dans un tel espace vectoriel E .

$$1^\circ \quad d(x, y) = \sum_{i=1}^n p_i |x_i - y_i| \quad (p_i > 0).$$

La distance du vecteur x au vecteur y est la somme des écarts absolus entre coordonnées de même indice, ces écarts étant pondérés par des coefficients positifs choisis une fois pour toutes selon la nature du problème étudié ; en particulier, les poids peuvent être tous pris égaux à 1 s'il n'y a aucune raison de donner aux diverses coordonnées des poids différents.

Avec cette définition de la distance de deux vecteurs, un vecteur y sera dit « entre » les deux vecteurs x et z si, et seulement si, chacune des coordonnées de y est comprise entre la plus grande et la plus petite des coordonnées correspondantes de x et de z . La figure 6 représente deux suites chronologiques x et z comportant chacune treize éléments ($n = 13$) et une suite intermédiaire y .

$$2^\circ \quad d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i (x_i - y_i)^2}.$$

C'est la distance en moyenne quadratique déjà rencontrée en géométrie ($n = 2$ ou 3) ; elle est dite euclidienne lorsque tous les coefficients p_i sont pris égaux à 1. On obtient un vecteur y intermédiaire entre les vecteurs x et z en prenant leur barycentre. Sur une figure semblable à la figure 6, la courbe y partagerait dans un rapport constant le segment parallèle à l'axe des ordonnées découpé par les courbes x et z .

$$3^\circ \quad d(x, y) = \sup |x_i - y_i|.$$

On prend ici pour distance l'écart maximum entre les coordonnées de même nom. Le vecteur y est dit « entre » les vecteurs x et z lorsque les écarts maximum entre coordonnées de x et y , de y et z , de z et x sont atteints pour la même coordonnée, celle de numéro r par exemple, et si l'on a alors

$$|x_r - y_r| + |y_r - z_r| = |x_r - z_r|$$

ou, ce qui revient au même : $x_r \leq y_r \leq z_r$.

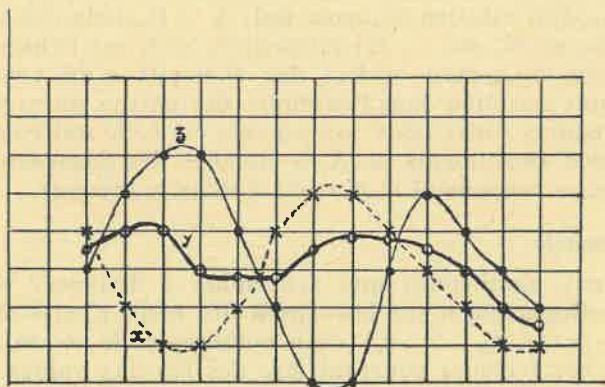


FIG. 6

Bien entendu, à chacune de ces distances, il est possible d'associer, pour l'espace vectoriel, une *norme*, en posant :

$$\text{norme de } x = n(x) = d(0, x)$$

où 0 désigne le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles.

Terminons par la remarque suivante, relative à un problème qui se pose souvent dans la pratique : savoir « réaliser la meilleure approximation possible d'un vecteur par un autre répondant à certaines conditions *a priori* » (par exemple, réaliser un ajustement d'une courbe empirique, ou d'une série statistique dont on veut un bon résumé). Il faut évidemment prendre garde que le superlatif « la meilleure approximation possible » n'a de sens que relativement au choix préalable de la distance qui mesurera l'approximation.

Donnons l'exemple d'une série chronologique de 5 termes ($n=5$) soit $x = (2, 5, 0, 3, 1)$ et cherchons la meilleure valeur constante $\bar{x}$ résument cette série. Avec la première distance (dans laquelle les p_i vaudront tous 1), on trouve la valeur *médiane* ; en rangeant les 5 termes de x par valeurs décroissantes, ce sera la valeur ayant le rang médian, soit ici 2. Avec la distance euclidienne, $\bar{x}$ est la moyenne arithmétique des coordonnées de x , soit ici 2,2. Enfin, avec la troisième distance, $\bar{x}$ est la moyenne arithmétique entre la plus grande et la plus petite coordonnée de x , soit ici 2,5.