

BIMESTRIEL

42^e année - N° 224 - Octobre 1962

Relations d'équivalence

Distances

Matériaux pour un dictionnaire

Sur les nouveaux programmes de Matélem

Programmes d'entrée aux E.N.I.A.M.

N° 224 - Bulletin de l'

Association des

Professeurs de Mathématiques

de l'Enseignement Public

**Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public.**
29, rue d'Ulm - Paris (5°)

Présidents d'Honneur :

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN.

Bureau.

Président :

M. GILBERT, 33 bis, rue Champ-Lagarde, Versailles (S.-et-O.) (tél. 950-53-81) (*Affaires générales ; Enseignement Technique ; Conférences ; Bulletin*).

Vice-Présidents :

Mlle FÉLIX, 2, rue Octave-Feuillet, Paris, 16° (TRO. 37-22) (*Enseignement du Second Degré*).

M. CHAZAL, 2, rue Thimonnier, Paris, 9° (TRU. 61-11) (*Programmes*).

M. RAMIS, 35, rue Pierre-Nicole, Paris, 5° (MED. 09-48) (*Classes préparatoires*).

M. SAMUEL, 3, avenue du Lycée-Lakanal, Bourg-la-Reine (Seine) (ROB. 35-34) (*Enseignement Supérieur*).

Secrétaire général :

M. VISSIO, 15, rue J.-Giraudoux, Sceaux (Seine) (FLO. 18-98) (*Administration de l'A.P.M. ; Préparation des réunions ; Bulletin*).

Secrétaires :

Mlle CLAVIER, 24, rue Linné, Paris, 5° (POR. 00-03) (*Programmes*).

Mlle BIARD, 2, place De-Gaulle, Fontenay-aux-Roses (Seine) (ROB. 36-03) (*Formation des maîtres*).

M. CHASTENET DE GÉRY, 4, rue des Capucins, Meudon-Bellevue (S.-et-O.) (OBS. 48-48) (*Dictionnaire*).

M. GASNAULT (*Enseignement du Premier Degré et Enseignement court*).

M. ROSSAT-MIGNOD, 19, rue de l'Odéon, Paris, 6° (DAN. 37-77) (*Régionales*).

M. WALUSINSKI, 26, parc de la Bérengère, Saint-Cloud (S.-et-O.) (VAL. 29-09) (*Rédaction du Bulletin ; Publicité*).

Trésorier :

Mlle LONJARET, 10, rue Pérignon, Paris, 7° (FON. 35-20).

Trésorier-adjoint :

Mlle AÏTOFF, 16, rue de l'Arbalète, Paris, 5° (*Expédition des Bulletins, des Brochures, etc...*).

Présidents des Commissions :

Programmes : M. CHAZAL ; *Formation des maîtres :* M. SAMUEL.

Dictionnaire : M. REVUZ ; *Premier degré :* Mlle VERVAECKE.

Rédaction : M. GILBERT (associés : Mlle FÉLIX, MM. CHAZAL, CHEVALLIER, CROZES, HUISMAN, ITARD, REVUZ, WALUSINSKI).

Rapporteurs spécialisés.

Concours des Grandes Ecoles : M. CHAZAL.

Histoire des Mathématiques : M. ITARD.

Astronomie (liaison avec la Société Astronomique de France) : M. WALUSINSKI.

I. ETUDES.

A. HUISMAN : Les mathématiques « modernes » dans l'enseignement du second degré.	
II. Relations d'équivalence ; lois de composition	3
M. BARBUT : Distances	23

II. ESSAIS ET PROBLEMES PEDAGOGIQUES.

J. SIROS : Notes sur les nouveaux programmes en Matélem	33
G. W. : Trois remarques sur les nouveaux programmes	37
G. LECONTOUR : La notation des quantificateurs	41
G. CONSTANTIN : Une nouvelle formule de baccalauréat, la corrélation non-linéaire	43
Problèmes curieux et propos délectables	46

III. ENQUETES.

Matériaux pour un dictionnaire (1)	49
Projets de programmes : Classe de Sciences Expérimentales	57
Classe de Philosophie	61

IV. EN MARGE.

Ch. TENOT : Le freinage des satellites	65
J. BONNET : Un cercle scientifique au lycée technique d'Arles	67
Calendrier astronomique	69

V. BIBLIOGRAPHIE.

G. LECONTOUR : Pour s'initier à la logique mathématique	71
Dans les revues, Livres et documents pour enseigner l'astronomie (G. W.). -	
A DONNEDU : Arithmétique générale (J. I.). - E. CASTELNUOVO :	
« I numeri, aritmetica pratica » (J. I)	72

VI. DOCUMENTS OFFICIELS.

Horaire dans les classes de Seconde et Première A' CM M'	79
Diplôme d'Etudes Scientifiques Générales	80
Sur la formation des Maîtres de C.E.G.	81
Programmes des sections préparatoires aux Ecoles Nationales d'Ingénieurs des Arts et Métiers	83
Certificats de propédeutique scientifique : énoncés (Strasbourg, juin 1962).	88

VII. LA VIE DE L'ASSOCIATION.

Réunion du Bureau (13-6-62) ; audiences ministérielles	93
Chronique des Régionales : Clermont, Bordeaux	94
Lettres ou imprimés, Le carnet de la Rédaction, Le bloc-notes de l'A.P.M. ..	95

Le coin du Trésorier

COTISATION. — Elle comprend l'abonnement au Bulletin, ainsi que les fascicules d'énoncés.

Cotisation normale	10 NF
Cotisation réduite (stagiaires C.P.R., élèves des E.N.S. et des I.P.E.S., jeunes gens accomplissant leur service militaire, retraités)	5 NF

ABONNEMENT (personnes n'appartenant pas à l'Enseignement Public, bibliothèques, etc...) :

France et Communauté : 12 NF - Autres pays : 15 NF

Le numéro : 3 NF

MODE DE PAIEMENT : Virement postal (adressé au centre de chèques du tireur) ou mandat-carte à l'adresse :

A.P.M. — 29, rue d'Ulm, Paris, 5^e — C.C.P. Paris 5708-21

RECOMMANDATIONS DU TRESORIER — Indications à porter sur le talon du chèque : 1^o Nom (en majuscules) et prénom. — 2^o Adresse où doit être envoyé le Bulletin. — 3^o Ancienne adresse en cas de changement. — 4^o Nom de l'établissement où l'on exerce. — 5^o Nom de l'établissement précédent en cas de mutation en fin d'année scolaire.

N.-B. — Toute nouvelle adhésion demandée en cours d'année scolaire compte à partir du 1^{er} octobre précédent. Elle donne droit à tous les bulletins déjà parus au cours de l'année scolaire, sous réserve qu'ils ne soient pas épuisés.

Comité.

Sortants en 1963 : MM. DEVIOSSE (Lycée de Lillebonne) ; CHAZAL (Charlemagne) ; Mme DUBOIS-VIOLETTE (Fénelon) ; MM. GIRARD (Janson-de-Sailly) ; LEGRAND (Compiègne) ; Mlle MINOIS (Le Havre) ; MM. POITOU (Fac. Sc., Lille) ; WALUSINSKI (Saint-Cloud).

Sortants en 1964 : MM. BARBUT (Ecole des Hautes Etudes, Paris) ; BRIANÇON (Aix-en-Provence) ; GÉNESTINE (Lycée Technique, Clichy) ; CHOQUET (Fac. des Sciences, Paris) ; Mlle FÉLIX (La Fontaine) ; MM. FOUCHÉ (Janson-de-Sailly) ; GILBERT (Lycée Technique, Versailles) ; Mlle LONJARET (Carnot) ; M. RUFF (Saint-Louis).

Sortants en 1965 : Mlle AÏTOFF (Montgeron) ; MM. CHEVALLIER (Marcelin-Berthelot) ; CLUZEL (E.N.N.A., Paris) ; Mlle DEROO (Racine) ; MM. DUMONT (Montaigne, Paris) ; FRENKEL (Fac. des Sc., Strasbourg) ; QUEYSANNE (Janson-de-Sailly) ; SIGNORET (Montaigne, Bordeaux).

Sortants en 1966 : Mme AUDIN (E.N. Auteuil, Paris) ; Mlle BIARD (E.N.S., Fontenay) ; MM. CROZES (Henri-IV) ; LE MÉNAGER (Angers) ; MUGNIER (Enseignement technique, C.N.E.C.) ; RAMIS (Louis-le-Grand) ; SAMUEL (Fac. des Sc., Paris) ; SIROS (Charlemagne) ; Mlle VERVAECKE (Fénelon, Lille) ; M. VISSIO (Lakanal, Sceaux).

Membres de droit

M. GIRAULT (Janson-de-Sailly) ; M. LECOEUVRE (Aix) ; Mlle MASSON (Marie-Curie) ; Mme NICOUD (Collège Marie-Vidalenc, Lyon) ; M. POUX (Saint-Cloud) ; Mlle ROULET (Victor-Hugo) ; M. SÉNÉCAT (Henri-IV) ; M. WALUSINSKI (Saint-Cloud).

LES MATHÉMATIQUES « MODERNES » DANS L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRÉ (*)

par André HUISMAN

Inspecteur de l'Académie de Paris

II. — RELATIONS D'ÉQUIVALENCE. LOIS DE COMPOSITION

Nous avons remarqué que l'égalité entre ensembles possède les trois qualités : réflexivité, symétrie, transitivité. Lorsqu'une relation entre deux éléments d'un ensemble possède ces trois qualités, on dit que c'est une relation d'équivalence.

Exemples : En géométrie, l'égalité et la similitude entre figures sont des relations d'équivalence. Dans l'ensemble des fractions, la relation d'équivalence entre b/a et d/c est : $bc = ad$.

Si, dans un ensemble E, on définit une relation d'équivalence, on détermine dans E une partition.

Soit R la relation d'équivalence ; pour exprimer que deux éléments x et x' de E vérifient R (sont équivalents module R), nous écrirons : xRx' . Soit x un élément de E ; formons une partie Cx de E avec tous les éléments x' tels que xRx' . Ceci fait, s'il y a encore des éléments de E qui ne sont pas dans Cx , soit y l'un d'eux, et formons la partie Cy avec tous les éléments y' tels que yRy' , et ainsi de suite. Finalement, tous les éléments de E seront ainsi classés, et il reste à montrer que les classes obtenues ne sont pas vides, et sont deux à deux disjointes. En effet :

1) la classe Cx n'est pas vide, elle contient au moins x puisque xRx (réflexivité) ;

2) les classes Cx et Cy sont disjointes, car si elles avaient un élément a commun, on aurait :

xRa et yRa ou : xRa et $aRy \Rightarrow xRy$ (transitivité de R), ce qui est impossible car, d'après la construction de Cx et Cy , la relation xRy est fautive.

Les parties Cx obtenues sont les classes d'équivalence, et l'ensemble formé par les classes d'équivalence est l'« ensemble quotient » noté E/R .

(*) La première partie de cette étude, consacrée aux ensembles, a paru dans le *Bulletin* n° 223, de juin 1962.

La rédaction du *Bulletin* prie l'auteur et les lecteurs d'excuser plusieurs négligences coupables que nous essayons, ici, de corriger :

— p. 279 : le nom de l'auteur a été omis.

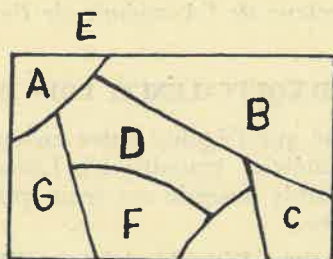
— p. 286, 13^e ligne, il faut lire 8 classes (et non 16).

— p. 288, 11^e ligne, il faut lire 8 classes (et non 16).

Il faut croire qu'en fin d'année scolaire, le calcul exact de 2^e est au-dessus des forces de la Rédaction !

Réciproquement, si l'on a déterminé une partition de E , on a défini une relation d'équivalence dans E .

Soit une partition de E en classes $A, B, \dots, L$. Définissons dans E une relation R : nous dirons que $x \in E$ et $y \in E$ vérifient $R, (xRy)$, si (et seulement si) x et y appartiennent à une même classe de la partition. Il faut prouver que R est une relation d'équivalence, ce qui est immédiat, car on vérifie sans difficulté les trois qualités (réflexivité, symétrie, transitivité).



Exemples : Dans le plan, nous nous donnons, entre points a et b , la relation : $Oa = Ob$, O étant un point fixe du plan. C'est une relation d'équivalence, les classes étant les cercles de centre O .

Dans le plan (ensemble de points) donnons-nous une droite D , et entre les points a et b , la relation $R : aRb$ si la droite ab est parallèle à D . C'est une relation d'équivalence, les classes sont les droites parallèles à D .

Dans le plan (ensemble de droites) donnons-nous une relation R : nous dirons qu'entre les droites d et d' on a dRd' si d et d' sont parallèles (en convenant, pour la réflexivité, que deux droites confondues sont parallèles : parallélisme au sens large). C'est une relation d'équivalence, les classes sont les directions de droite du plan.

De même dans l'espace, le parallélisme (au sens large) des plans est une relation d'équivalence ; l'ensemble quotient est l'ensemble des directions de plan.

1. — L'ensemble des entiers naturels.

Dans l'ensemble N des entiers naturels sont définies deux lois de composition, l'addition et la multiplication, pour lesquelles nous prendrons les axiomes suivants :

Relation d'équivalence : c'est l'égalité.

$$a = a ; a = b \Rightarrow b = a ; a = b \text{ et } b = c \Rightarrow a = c.$$

Addition : 1) Il existe une loi de composition interne appelée addition : $a \in N, b \in N$, il existe $c = a + b \in N$; l'ensemble N est fermé pour l'addition.

2) La relation d'égalité est compatible avec l'addition :

$$a = a' \text{ et } b = b' \Rightarrow a + b = a' + b'.$$

3) Commutativité : $a + b = b + a$.

4) Associativité : $(a + b) + c = a + (b + c)$.

5) Il existe un élément neutre, zéro : quel que soit $a \in \mathbb{N}$, $a + 0 = a$.

Multiplication : 1) Il existe une loi de composition interne appelée multiplication : $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, il existe $d = a \cdot b \in \mathbb{N}$; l'ensemble $\mathbb{N}$ est fermé pour la multiplication.

2) La relation d'égalité est compatible avec la multiplication :

$$a = a' \text{ et } b = b' \Rightarrow ab = a'b'.$$

3) Commutativité : $ab = ba$.

4) Associativité : $(ab)c = a(bc)$.

5) Existence d'un élément neutre : $a \cdot 1 = a$ quel que soit $a \in \mathbb{N}$.

6) Distributivité de la multiplication pour l'addition :

$$a(b + c) = ab + ac.$$

7) Tout élément non nul de $\mathbb{N}$ est simplifiable pour la multiplication :

$$c \neq 0 \text{ et } ca = cb \Rightarrow a = b.$$

Remarques : 1) L'élément neutre pour l'addition est unique, car : $a + x = a$ quel que soit a , donne, pour $a = 0$: $0 + x = 0$, et comme : $0 + x = x$, on en déduit, par transitivité : $x = 0$.

2) L'élément neutre pour la multiplication est unique, car : $ax = a$ quel que soit a donne, pour $a = 1$: $1x = 1$, et comme $1x = x$, on en déduit : $x = 1$.

3) L'axiome 2 de l'addition permet d'écrire :

$$a = b \text{ et } c = c \Rightarrow a + c = b + c,$$

nous verrons plus loin la réciproque.

4) L'axiome 2 de la multiplication permet d'écrire :

$$a = b \text{ et } c = c \Rightarrow ac = bc,$$

l'axiome 7 de la multiplication énonce la réciproque, pour $c \neq 0$.

2. — Symétrisation de $\mathbb{N}$ pour l'addition.

Le seul élément de $\mathbb{N}$ qui ne puisse pas être obtenu par addition est l'élément neutre 0 ; il n'existe pas d'entiers naturels a et b tels que l'on ait : $a + b = 0$, sauf bien entendu $a = b = 0$.

Nous allons définir un ensemble $\mathbb{Z}$ dont les éléments sont les entiers relatifs, de manière qu'à tout élément x de $\mathbb{Z}$ corresponde un élément « symétrique » x' tel que l'on ait : $x + x' = 0$.

On sait que cet ensemble $\mathbb{Z}$ peut être construit rigoureusement à partir des couples d'entiers (a, b) entre lesquels on se donne une relation d'équivalence. On montre alors qu'on peut identifier $\mathbb{N}$ à une partie de $\mathbb{Z}$.

A un point de vue plus élémentaire, on peut, après avoir défini le symétrique x' de l'entier naturel x , poser que tous les axiomes énoncés plus haut restent valables dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ formé par $\mathbb{N}$ et les éléments symétriques des éléments de $\mathbb{N}$, à condition, bien entendu, d'avoir convenablement défini les opérations d'addition et de multiplication.

Intuitivement, les entiers naturels peuvent être représentés par des points d'une demi-droite Ox , mais l'ensemble $\mathbb{N}$ ne permet pas de numérotter en même temps les points de la demi-droite opposée Ox' . Il est alors

naturel d'associer à tout point M de Ox son symétrique M' par rapport à O , et de désigner par $1', 2', \dots$ les entiers représentés par les points symétriques de ceux qui représentent $1, 2, \dots$. Deux entiers relatifs seront, par définition, égaux s'ils sont représentés par un même point de $x'x$.

L'interprétation géométrique de la relation : $a + a' = 0$ conduit aux règles connues de l'addition :

$$2 + 3' = 1' ; 2' + 3 = 1 ; 2' + 3' = 5',$$

et en général :

$a + b' = (a - b)$ si $a \geq b$; $a + b' = (b - a)'$ si $a \leq b$; $a' + b' = (a + b)'$ quels que soient a et b .

Remarquons qu'une relation telle que : $a + b' = (a - b)$ justifie dans la suite la notation $-b$ au lieu de b' *.

Remarque : Dans N , la soustraction n'est pas partout définie ; $b - a$ n'a de sens que si $b \geq a$. Avec l'introduction des entiers relatifs, l'opération devient toujours possible (mais son résultat n'appartient pas toujours à N). Si a et b sont des entiers naturels quelconques, $b - a$ est défini par l'équivalence :

$$x = b - a \iff b = x + a$$

et nous pouvons écrire (axiomes 2 et 4 de l'addition) :

$$a' = a' \text{ et } b = x + a \Rightarrow b + a' = (x + a) + a' = x + (a + a') = x + 0 = x.$$

Pratiquement, l'introduction des entiers x' perdrait beaucoup de ses avantages s'il fallait constamment distinguer les entiers x et x' . C'est pourquoi on convient de représenter par des lettres sans accent aussi bien les entiers naturels que leurs symétriques. Dans ces conditions x' représentera désormais le symétrique d'un entier relatif quelconque ; ce pourra donc être un entier naturel. Par exemple, si $x = 3'$, $x' = (3')' = 3$.

Théorème : Le symétrique de $b + a$ est $a' + b'$.

Car : $(b + a) + (a' + b') = b + (a + a') + b' = b + 0 + b' = b + b' = 0$.

Observons que la démonstration repose uniquement sur l'associativité de l'addition. La commutativité permet d'écrire aussi $b' + a'$.

Théorème : Tout entier relatif est simplifiable pour l'addition. C'est-à-dire : $a + b = a + c \Rightarrow b = c$.

En effet : $a' = a'$ et $a + b = a + c \Rightarrow a' + (a + b) = a' + (a + c)$ ou : $(a' + a) + b = (a' + a) + c$ ou : $0 + b = 0 + c$ ou enfin : $b = c$.

Remarque : Nous avons admis implicitement l'unicité du symétrique x' de x , ce qui est possible dans une étude intuitive. Notons cependant que cette unicité résulte des axiomes et du théorème précédent :

$$x + y = 0 \text{ et } x + z = 0 \Rightarrow x + y = x + z \Rightarrow y = z.$$

Conclusion : Résumons ce qui précède : Z , muni de la seule addition, possède les propriétés suivantes : il est fermé pour l'addition ; l'addition est associative, elle possède un élément neutre, et tout élément de Z a un symétrique.

On résume ces propriétés en disant que Z est un groupe additif, qui est en outre commutatif.

(*) Nous laissons de côté la vérification des différents axiomes de l'addition.

3. — La multiplication dans $\mathbf{Z}$.

Nous n'avons pas utilisé l'historique comparaison des nombres relatifs avec des gains et des pertes, car elle n'est d'aucun secours pour définir la multiplication. Nous nous contenterons de nous laisser guider par les axiomes relatifs à la multiplication dans $\mathbf{N}$, et de définir la multiplication dans $\mathbf{Z}$ de manière que ces axiomes restent valables.

Tout d'abord, puisque nous admettons que $\mathbf{N}$ est une partie de $\mathbf{Z}$, nous savons ce que signifie le produit ab lorsque $a \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{N}$. Il nous reste à préciser ce que signifient des produits tels que (en revenant momentanément à la première signification de l'accent) :

$$2.3' \quad \text{et} \quad 2'.3'.$$

Théorème : $a.0 = 0.a = 0$, quel que soit $a \in \mathbf{Z}$.

En effet (axiome 2) : $a = a$ et $a + 0 = a \Rightarrow a(a + 0) = aa$, puis (axiome 6) : $a(a + 0) = aa + a.0$; enfin : $aa + a.0 = aa \Rightarrow a.0 = 0$.

Soit à définir $2.3'$; d'après le théorème précédent :

$$2(3 + 3') = 0,$$

donc : $2.3 + 2.3' = 0$, ce qui prouve que $2.3'$ est le symétrique de 2.3 , d'où la règle : $2.3' = (2.3)'$.

On obtient de même la règle : $2'.3' = 2.3$.

Moyennant les règles précédentes, on pourra vérifier les autres propriétés : fermeture de $\mathbf{Z}$ pour la multiplication, associativité...

Théorème : $ab = 0$ et $a \neq 0 \Rightarrow b = 0$.

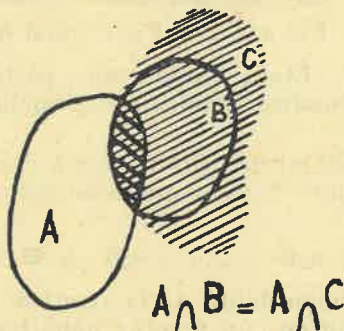
En effet : $ab = 0 = a.0 \Rightarrow b = 0$ puisque $a \neq 0$ est simplifiable.

Conclusion : Outre l'addition, pour laquelle $\mathbf{Z}$ a la structure de groupe commutatif, $\mathbf{Z}$ est maintenant muni d'une multiplication associative, et distributive pour l'addition. On résume ces propriétés en disant que $\mathbf{Z}$ a une structure d'anneau.

Remarque : Les propriétés de l'addition dans $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$ présentent des analogies évidentes avec celles des opérations $\cap$ et $\cup$ appliquées à des parties d'un ensemble. Notons des différences :

a) pour toute partie, on a : $A \cap A = A$, $A \cup A = A$, tandis que dans $\mathbf{Z}$ on n'a $x + x = x$ que pour $x = 0$, et $xx = x$ que pour $x = 0$ ou $x = 1$;

b) chacune des opérations $\cap$ et $\cup$ est distributive pour l'autre ;



c) pour les opérations $\cap$ et $\cup$, la règle de simplification n'est pas valable ; on n'a pas : $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$, ni : $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$.

A et B étant donnés, $A \cap B = A \cap C$ est vérifié si l'on prend pour C la réunion de $A \cap B$ et d'un ensemble disjoint de A.

A et B étant donnés, $A \cup B = A \cup C$ est vérifié si l'on prend pour C la réunion de $B \cap \bar{A}$ et d'une partie de A ou B.

Par contre, la conjonction des deux égalités permet la simplification par A :

$$A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C.$$

4. — Les classes résiduelles (module m).

Dans $\mathbf{Z}$, l'ensemble des multiples d'un entier m est fermé pour l'addition. Ces multiples sont de la forme xm , où l'on peut supposer m positif, en transférant le signe sur x .

On a ainsi une partition de $\mathbf{Z}$ en deux classes, celle des entiers xm , et celle des autres (m est supposé différent de 0 et de 1).

On peut obtenir une partition plus fine en utilisant la division « euclidienne » et en définissant une relation d'équivalence entre entiers : nous dirons que deux entiers a et b sont équivalents (ou congrus) module m si, divisés par m , ils donnent le même reste, c'est-à-dire si leur différence est divisible par m . Nous noterons cette relation :

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ (congruence).}$$

On vérifie aisément que c'est bien une relation d'équivalence, qui détermine dans $\mathbf{Z}$ une partition dont les classes sont les classes résiduelles $\pmod{m}$.

Il y a m classes, qui correspondent aux restes 0, 1, ..., $m - 1$ de la division par m .

On démontre alors que la relation d'équivalence est compatible avec l'addition et la multiplication :

$$a \equiv a' \text{ et } b \equiv b' \Rightarrow a + b \equiv a' + b' \text{ et } ab \equiv a'b' \pmod{m}.$$

L'ensemble quotient $\mathbf{Z}/m$ est ainsi muni des mêmes opérations que $\mathbf{Z}$; elles possèdent les propriétés déjà énumérées, sauf celle qui concerne la simplification pour la multiplication, sur laquelle nous reviendrons. Par contre, la règle de simplification pour l'addition subsiste :

$$a + b \equiv a + c \Rightarrow b \equiv c \pmod{m}.$$

Problème pratique : Etant donnée une partition de $\mathbf{Z}$ en classes mod m , comment reconnaître rapidement à quelle classe appartient un entier donné X ?

Les axiomes permettent de définir dans $\mathbf{Z}$ des polynômes ; en particulier, on peut représenter X dans une numération de base B (et d'une seule manière) :

$$X = a_0 + a_1B + a_2B^2 + \dots + a_nB^n, \quad a_i \in (0, 1, \dots, B - 1).$$

En vertu de la compatibilité de la relation d'équivalence avec les opérations, nous obtiendrons un nombre appartenant à la même classe

que X en remplaçant les a_i et B^k par des entiers équivalents (mod m). La méthode est particulièrement simple dans les cas suivants :

1) toutes les puissances de B appartiennent à la classe 0 ; alors :

$$X \equiv a_0 \pmod{m},$$

c'est le cas de $m = 2$ et $m = 5$ pour $B = 10$;

2) toutes les puissances de B appartiennent à la classe 1 ; alors :

$$X \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n \pmod{m},$$

c'est le cas de $m = 9$ pour $B = 10$;

3) B appartient à la classe -1 (c'est-à-dire $m - 1$) ; alors :

$$B^{2k} \equiv 1, B^{2k+1} \equiv -1 \pmod{m},$$

et : $X \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \dots,$

c'est le cas de $m = 11$ pour $B = 10$.

5. — Généralisation : l'ensemble $\{xm + yn\}$.

Considérons l'ensemble $\{xm + yn\}$, où l'on peut supposer que m et n sont des entiers naturels. Cet ensemble est fermé pour l'addition, et pour la multiplication par un entier :

$$\begin{aligned}(xm + yn) + (x'm + y'n) &= (x + x')m + (y + y')n ; \\ k(xm + yn) &= (kx)m + (ky)n.\end{aligned}$$

Dans l'ensemble, considérons les nombres qui sont strictement positifs *. Parmi eux, il y en a un qui est plus petit que tous les autres, soit d . Divisons $xm + yn$ par d :

$$xm + yn = dq + r, \quad 0 \leq r < d.$$

Cette relation montre que $r = (xm + yn) + (-q)d$ appartient à l'ensemble, et il est ≥ 0 . Il ne peut être > 0 , car il serait inférieur à d , ce qui est contraire à la définition de d ; r est donc nul, et :

$$xm + yn = qd.$$

Tous les nombres de l'ensemble sont donc multiples de d ; on est ramené au premier cas.

Propriétés de d : 1) d appartient à l'ensemble, il est donc de la forme $am + bn$. Par suite, tout entier qui divise à la fois m et n divise aussi d .

2) m et n appartiennent à l'ensemble :

$$m = 1.m + 0.n ; \quad n = 0.m + 1.n ;$$

par suite, tout entier qui divise d divise à la fois m et n .

En résumé, l'ensemble des diviseurs communs à m et n est égal à l'ensemble des diviseurs de d , ce qui justifie le nom de « plus grand diviseur commun » donné à d . Nous le désignerons aussi par $D(m, n)$.

Cas particuliers : 1) si d n'a pas d'autres diviseurs que 1 et d , on dit qu'il est premier ;

2) si $d = 1$, m et n n'ont pas d'autre diviseur commun que 1 ; on dit qu'ils sont premiers entre eux. Dans ce cas, il existe des entiers relatifs

(*) Nous supposons définie une relation d'ordre dans $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$.

a et b tels que : $am + bn = 1$. Et une telle relation entraîne évidemment que m et n sont premiers entre eux, d'où :

Théorème de Bezout : m et n sont premiers entre eux si (et seulement si) il existe des entiers relatifs a et b tels que l'on ait :

$$am + bn = 1.$$

Corollaire : Soit $D(m, n) = d$; posons : $m = m'd$, $n = n'd$, d'où :
 $d = am + bn = am'd + bn'd \Rightarrow 1 = am' + bn' \Rightarrow D(m/d, n/d) = 1$.

La règle de simplification multiplicative dans $\mathbb{Z}/m$.

Pour abréger, convenons d'écrire : $a|b$ pour exprimer que a divise b .

Théorème de Gauss : $a|bc$ et $D(a, b) = 1 \Rightarrow a|c$.

Car $D(a, b) = 1$ se traduit par : $xa + yb = 1$ d'où : $xac + ybc = c$.
 a divisant ac et bc , il divise c .

Revenons alors à la règle de simplification multiplicative dans $\mathbb{Z}/m$.
 Soit la congruence : $ca \equiv cb \pmod{m}$ ou : $c(a - b) \equiv 0 \pmod{m}$.

Si $D(m, c) = 1$, le théorème précédent montre que :

$$c(a - b) \equiv 0 \Rightarrow a - b \equiv 0 \pmod{m},$$

la règle de simplification est donc valable dans ce cas. En particulier si m est premier, tout entier qui n'appartient pas à la classe 0 de $\mathbb{Z}/m$ (on dit, pour abréger, tout entier non nul) est simplifiable pour la multiplication :

$$c \not\equiv 0 \text{ et } ca \equiv cb \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

en tout point comparable à l'axiome 7 de la multiplication.

Si $D(c, m) = d \neq 1$, posons : $c = c'd$, $m = m'd$, $D(c', m') = 1$; alors :
 $c(a - b) \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow c'(a - b) \equiv 0 \pmod{m'} \Rightarrow a - b \equiv 0 \pmod{m'}$.

Dans ce cas, la règle de simplification n'est pas valable dans $\mathbb{Z}/m$; on peut avoir : $xy \equiv 0 \pmod{m}$ sans que l'on ait $x \equiv 0$ ni $y \equiv 0 \pmod{m}$.
 Nous allons en voir des exemples.

6. — Tables d'opérations dans $\mathbb{Z}/m$.

L'ensemble $\mathbb{Z}/m$ étant fini, on peut représenter complètement les deux opérations par leurs tables.

Soit par exemple la table d'addition pour $\mathbb{Z}/6$. Dans cette table, $2'$ désigne la classe équivalente à 2, c'est-à-dire que $2'$ désigne les entiers de la forme : $2 + 6k$, $k \in \mathbb{Z}$.

On remarque :

— les rangées se déduisent de la première par permutations circulaires successives ;

	0'	1'	2'	3'	4'	5'
0'	0'	1'	2'	3'	4'	5'
1'	1'	2'	3'	4'	5'	0'
2'	2'	3'	4'	5'	0'	1'
3'	3'	4'	5'	0'	1'	2'
4'	4'	5'	0'	1'	2'	3'
5'	5'	0'	1'	2'	3'	4'

— $0'$ est l'élément neutre de $\mathbb{Z}/6$ pour l'addition ;
 — $0'$ figure une fois, et une seule, dans chaque rangée ; autrement dit, tout élément de $\mathbb{Z}/6$ a un symétrique, et un seul, pour l'addition.

En résumé, $\mathbb{Z}/6$, fermé pour l'addition, a la structure de groupe additif.

La table permet de résoudre des « équations » telles que :

$$x + a \equiv b \pmod{6}, \quad a, b, x \in \mathbb{Z}/6$$

par exemple, $2' + x \equiv 1'$ a pour solution $x \equiv 5'$. D'une manière générale, si a' est le symétrique de a :

$$x + a \equiv b \iff x + a + a' \equiv b + a' \text{ ou : } x \equiv b + a' \pmod{6}.$$

Considérons maintenant la table de multiplication dans $\mathbb{Z}/6$.

	$0'$	$1'$	$2'$	$3'$	$4'$	$5'$
$0'$	$0'$	$0'$	$0'$	$0'$	$0'$	$0'$
$1'$	$0'$	$1'$	$2'$	$3'$	$4'$	$5'$
$2'$	$0'$	$2'$	$4'$	$0'$	$2'$	$4'$
$3'$	$0'$	$3'$	$0'$	$3'$	$0'$	$3'$
$4'$	$0'$	$4'$	$2'$	$0'$	$4'$	$2'$
$5'$	$0'$	$5'$	$4'$	$3'$	$2'$	$1'$

On remarque :

$1'$ est l'élément neutre pour la multiplication ;

seul $5'$ a un « inverse », c'est-à-dire qu'il existe x' tel que : $5'.x' \equiv 1'$, c'est $5'$ lui-même puisque :

$$5'.5' \equiv 1 \pmod{6}.$$

$1'$ ne figure dans aucune des rangées relatives aux autres éléments ; il peut arriver que l'on ait $xy \equiv 0 \pmod{6}$ sans que l'on ait $x \equiv 0$, ni $y \equiv 0$; par exemple :

$$2'.3' \equiv 0, \quad 3'.4' \equiv 0 \pmod{6}$$

(on dit que $\mathbb{Z}/6$ a des diviseurs de zéro).

En résumé, $\mathbb{Z}/6$, muni des deux opérations, a la structure d'anneau.

Problème : A quoi reconnaît-on que $\mathbb{Z}/m$ n'a pas de diviseurs de 0 ?

Nous avons vu que :

$$xy \equiv 0 \pmod{m} \text{ et } D(x, m) = 1 \Rightarrow y \equiv 0 \pmod{m}$$

autrement dit, si m est premier, on ne peut avoir $xy \equiv 0 \pmod{m}$ que si $x \equiv 0$ ou $y \equiv 0 \pmod{m}$. $\mathbb{Z}/m$ n'a pas de diviseur de zéro.

Si m n'est pas premier, soit $m = ab$; a et b appartiennent à des classes $\pmod{m}$ a' et b' qui ne sont pas nulles ; il y a donc des diviseurs de zéro. En résumé :

Pour que $\mathbb{Z}/m$ n'ait pas de diviseur de 0, il faut et il suffit que m soit premier.

Problème : Dans $\mathbb{Z}/m$, quels sont les éléments qui ont un inverse, c'est-à-dire les éléments a pour lesquels il existe x tel que : $ax \equiv 1 \pmod{m}$. Cette congruence équivaut à l'égalité : $ax + my = 1$, qui exprime que $D(a, m) = 1$. Donc :

1) si m est premier, tous les éléments non nuls ont un inverse ;

2) si m n'est pas premier, seules les classes premières avec m ont un inverse, c'est-à-dire celles qui ne sont pas diviseur de zéro. C'est ainsi que, dans $\mathbb{Z}/6$, seule $5'$ a un inverse.

7. — Autre exemple : la table de multiplication dans $\mathbb{Z}/7$.

La table d'addition dans $\mathbb{Z}/7$ ne présente pas d'intérêt particulier ; elle nous montrerait que $\mathbb{Z}/7$, comme $\mathbb{Z}/6$ et en général $\mathbb{Z}/m$, a la structure de groupe additif. Etudions la table de multiplication.

	0'	1'	2'	3'	4'	5'	6'
0'	0'	0'	0'	0'	0'	0'	0'
1'	0'	1'	2'	3'	4'	5'	6'
2'	0'	2'	4'	6'	1'	3'	5'
3'	0'	3'	6'	2'	5'	1'	4'
4'	0'	4'	1'	5'	2'	6'	3'
5'	0'	5'	3'	1'	6'	4'	2'
6'	0'	6'	5'	4'	3'	2'	1'

Nous constatons que tout élément non nul a un inverse ; nous pouvons résoudre des équations telles que :

$$ax \equiv b \pmod{7}.$$

Soit par exemple : $3'x \equiv 4'$; sa solution est : $x \equiv 6' \pmod{7}$.

D'une manière générale, si $a \neq 0$, soit a' son inverse ; nous aurons :

$$ax \equiv b \Rightarrow a'ax \equiv a'b, \quad x \equiv a'b \pmod{7}.$$

En résumé, dans $\mathbb{Z}/7$, fermé pour la multiplication, les éléments non nuls forment un groupe.

Lorsqu'un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication possède les propriétés suivantes : c'est un groupe commutatif pour l'addition ; la multiplication est associative, et distributive pour l'addition ; l'ensemble, privé de l'élément neutre de l'addition, est un groupe pour la multiplication ; on dit que cet ensemble est un corps. Il en est ainsi pour $\mathbb{Z}/m$ lorsque m est premier.

Application : théorème de Wilson : Soit m premier ; considérons les $m - 1$ classes non nulles $\pmod{m}$, représentées par $1, 2, \dots, m - 1$. Chacune d'elles ayant un inverse, on peut associer les nombres précédents deux par deux de manière que, pour un couple (a, b) , on ait :

$$ab \equiv 1 \pmod{m}$$

1 est ainsi associé à lui-même, ainsi que $m - 1$, puisque :

$$(m - 1)^2 \equiv 1 \pmod{m}.$$

En multipliant membre à membre les congruences :

$$ab \equiv 1, a_1b_1 \equiv 1, \dots, m - 1 \equiv 1 \pmod{m},$$

nous obtenons :

$$(m - 1)! \equiv -1 \pmod{m}.$$

Réciproquement, si un entier m vérifie cette dernière congruence, il est évidemment premier.

8. — Applications géométriques.

A. — Groupe du triangle équilatéral

Soit un triangle équilatéral ABC, dont les hauteurs se coupent en O. ABC reste globalement inchangé par les opérations suivantes : la rotation (O, $+120^\circ$) ; la rotation (O, $+240^\circ$) ; les symétries d'axes AO, BO, CO ; et, bien entendu, l'opération neutre (ou identique) qui transforme A, B, C en A, B, C.

Désignons ces opérations par : R pour la première rotation, R' pour la seconde, H, H', H'' pour les symétries d'axes AO, BO, CO. Convenons de représenter par RH l'opération qui consiste à faire subir au triangle la symétrie H, puis la rotation R.

Dans ces conditions, nous pouvons dresser une table de multiplication des six opérations I, R, R', H, H', H''. Elle est faite de manière que le résultat du produit RH se lit à l'intersection de la colonne intitulée H et de la ligne intitulée R.

	I	R	R'	H	H'	H''
I	I	R	R'	H	H'	H''
R	R	R'	I	H''	H	H'
R'	R'	I	R	H'	H''	H
H	H	H'	H''	I	R	R'
H'	H'	H''	H	R'	I	R
H''	H''	H	H'	R	R'	I

L'ensemble des six opérations possède la structure de groupe : le produit de deux éléments de l'ensemble appartient à l'ensemble ; I est l'élément neutre, et tout élément a un inverse. Mais le groupe n'est pas commutatif.

Le groupe peut être engendré par deux opérations seulement, car :

$$R' = R^2, \quad I = R^3, \quad H' = HR, \quad H'' = RH.$$

On peut extraire du tableau précédent le suivant :

	I	R	R'
I	I	R	R'
R	R	R'	I
R'	R'	I	R

ou encore, en se servant uniquement de R et en convenant de remplacer R³ ou I par R⁰ :

	R ⁰	R ¹	R ²
R ⁰	R ⁰	R ¹	R ²
R ¹	R ¹	R ²	R ⁰
R ²	R ²	R ⁰	R ¹

Nous constatons donc que les opérations I, R, R' forment à elles seules un groupe, qui est un « sous-groupe » du groupe du triangle équilatéral. D'une façon générale, si un ensemble G a la structure de groupe pour une opération, on dit qu'une partie H de G est sous-groupe de G si elle est fermée pour l'opération du groupe, et si : $x \in H \Rightarrow x' \in H$, x' étant l'inverse de x dans G , pour l'opération du groupe.

Il résulte immédiatement de cette définition que l'élément neutre de H est celui de G , puisque : $xx' \in H$ et que $xx' = e$, e étant l'élément neutre de G .

Si nous utilisons la table du sous-groupe sous sa dernière forme (celle où l'on utilise uniquement R et ses puissances), et si nous faisons un tableau contenant uniquement les exposants de R , nous obtenons la table d'addition de $\mathbb{Z}/3$. C'est ce qu'on exprime en disant que le sous-groupe (R) du triangle est isomorphe du groupe additif $\mathbb{Z}/3$.

Du groupe du triangle, on peut encore extraire les sous-groupes : $(I, H), (I, H'), (I, H'')$, tous trois isomorphes du groupe additif $\mathbb{Z}/2$.

B. — Groupe du carré

Le carré admet huit opérations : l'opération neutre I ; trois rotations : $R(O, 90^\circ), R'(O, 180^\circ), R''(O, 270^\circ)$; quatre symétries : H, V, D, D' .

	I	R	R'	R''	H	V	D	D'
I	I	R	R'	R''	H	V	D	D'
R	R	R'	R''	I	D	D'	V	H
R'	R'	R''	I	R	V	H	D'	D
R''	R''	I	R	R'	D'	D	H	V
H	H	D'	V	D	I	R'	R''	R
V	V	D	H	D'	R'	I	R	R''
D	D	H	D'	V	R	R''	I	R'
D'	D'	V	D	H	R''	R	R'	I

Nous avons encore la structure de groupe non commutatif ; il peut être engendré par les seuls éléments R et H :

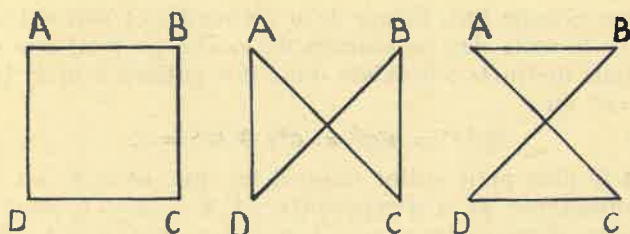
$$\begin{aligned} R' &= R^2, R'' = R^3, I = R^4, \text{ ou } R^0, \\ D &= RH, D' = HR, V = HR^2. \end{aligned}$$

On peut former avec I, R, R', R'' un sous-groupe, isomorphe du groupe additif $\mathbb{Z}/4$.

Remarque : Le groupe du triangle est formé de six éléments, et on constate aisément que les six opérations géométriques correspondent aux six permutations qu'on peut définir à partir de l'ensemble (A, B, C) . Il n'en est pas de même pour le carré, car l'ensemble (A, B, C, D) engendre 24 permutations, alors que le groupe du carré n'en donne que 8. Cela s'explique : les 24 permutations de (A, B, C, D) peuvent se répartir en 6 parties formées chacune de 4 permutations circulaires ; elles corres-

pondent à un même quadrilatère parcouru dans le même sens à partir d'un sommet différent.

Ces six parties peuvent être groupées par deux, de manière à correspondre à un même quadrilatère parcouru dans des sens différents. Finalement, les 24 permutations se répartissent en 3 parties dont chacune correspond à un quadrilatère de sommets A, B, C, D.



D'une manière générale, avec n points, il y a $n!$ permutations, parmi lesquelles $(n-1)!$ parties formées de permutations circulaires, et $\frac{1}{2}(n-1)!$ polygones distincts dont les sommets sont les n points.

Remarques finales :

a) Le sous-groupe de rotations extrait du groupe du triangle est d'ordre 3, diviseur de l'ordre du groupe, 6. Il en est de même pour le sous-groupe (d'ordre 4) de rotations extrait du groupe (d'ordre 8) du carré. D'une manière générale :

Théorème : Dans un groupe d'ordre n , tout sous-groupe a pour ordre un diviseur de n .

Soit un groupe G , formé de n éléments, et un sous-groupe H de G , formé de n' éléments. Dans G , définissons une relation binaire : a et b seront congrus (mod H) s'il existe un élément $x \in H$ tel que l'on ait : $b = ax$. Démontrons que c'est une relation d'équivalence :

1) elle est réflexive, car : pour tout $a \in G$, $a = ae$ (e élément neutre de G , et de H) ;

2) elle est symétrique, car si x' est l'inverse de $x \in H$, nous avons :

$$b = ax \Rightarrow bx' = axx' = a \quad \text{ou} : a = bx' \quad \text{avec} \quad x' \in H ;$$

3) elle est transitive, car :

$$b = ax \text{ et } c = by \Rightarrow c = a(xy) \quad \text{avec} : x \in H \text{ et } y \in H \Rightarrow xy \in H.$$

Cette équivalence détermine dans G une partition, et la classe d'un élément a de G contient : $ax_1, ax_2, \dots, ax_{n'}, x_i \in H$, éléments qui sont distincts, car : $ax_k = ax \Rightarrow x_k = x$, puisque les éléments d'un groupe sont simplifiables pour l'opération du groupe (voir la démonstration faite pour la simplification dans Z pour l'addition).

En résumé, toutes les classes de la partition sont formées d'un même nombre n' d'éléments, ce qui montre que l'ordre n de G est un multiple de l'ordre n' du sous-groupe H .

En particulier, si l'ordre de G est premier, G n'admet pas de sous-groupe proprement dit, c'est-à-dire autre que G lui-même et que le sous-groupe réduit à l'élément neutre e .

b) Le sous-groupe (R) du triangle présente cette particularité que tous ses éléments sont les puissances de l'un d'eux ; il en est de même du sous-groupe des rotations du carré. C'est ce qu'on appelle un « groupe cyclique ».

Soit G un groupe fini, formé de n éléments, et soit a l'un d'eux. Si l'on considère la suite des puissances de a , elle ne peut pas être formée d'éléments tous distincts ; il existe donc des entiers k et k' tels que l'on ait : $a^{k+k'} = a^k$ ou :

$$a^{k+k'} = a^k a^{k'} = a^k e \Rightarrow a^{k'} = e.$$

Si p est le plus petit entier naturel tel que $a^p = e$, on vérifie que toutes les puissances de a d'exposants : $1, 2, \dots, p-1$, sont distinctes ; les puissances d'exposants : $p+1, p+2, \dots, p+p-1$, donnent les mêmes éléments dans le même ordre, et ainsi de suite périodiquement.

En résumé, les puissances de a engendrent un groupe cyclique d'ordre p , et par suite p est un diviseur de n .

Nous pouvons considérer des exposants négatifs, en convenant de désigner l'inverse de a par a^{-1} . Dès lors, nous aurons :

$$a^x = a^y \Rightarrow x \equiv y \pmod{p}.$$

Si nous écrivons la table du groupe cyclique engendré par a , nous aurons celle du groupe $\mathbb{Z}/p$; donc :

Tout groupe cyclique d'ordre p est isomorphe du groupe additif $\mathbb{Z}/p$.

Remarque : Nous avons vu qu'un groupe fini d'ordre m premier ne peut avoir de sous-groupe proprement dit. Si a en est un élément, ses puissances engendrent un groupe cyclique dont l'ordre est diviseur de m . Donc, si a n'est pas l'élément neutre, ce sous-groupe cyclique doit coïncider avec le groupe lui-même. Autrement dit :

Tout groupe d'ordre premier est cyclique.

c) *Théorème de Fermat :* Soit $\mathbb{Z}/p$, p premier ; il y a $p-1$ classes non nulles, qui forment un groupe multiplicatif d'élément neutre 1. Si x est l'une d'elles, ses puissances engendrent un sous-groupe cyclique dont l'ordre est diviseur de l'ordre $p-1$ du groupe ; donc :

$$x^k \equiv 1 \Rightarrow x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad (\text{pour } x \neq 0)$$

c'est le théorème de Fermat, qu'on peut encore traduire par :

$$x^p \equiv x \pmod{p}$$

quel que soit alors l'entier x .

Exercices

47) Une relation binaire R est dite « circulaire » si :

$$aRb \text{ et } bRc \Rightarrow cRa.$$

Montrer qu'une relation R est réflexive et circulaire si, et seulement si, c'est une relation d'équivalence.

48) Examiner la validité du raisonnement suivant : soit R une relation binaire symétrique et transitive ; on a :

$$aRb \Rightarrow bRa, \text{ puis : } aRb \text{ et } bRa \Rightarrow aRa$$

donc, toute relation symétrique et transitive est aussi réflexive.

49) Peut-on réaliser une partition du plan considéré comme ensemble de points, de manière que les classes soient :

- a) les droites issues d'un point donné A ;
- b) les cercles d'un faisceau linéaire ?

50) Soit, dans le plan, une droite D . La relation entre points : mRm' , lorsque m et m' appartiennent à un même demi-plan de frontière D , est-elle une relation d'équivalence ?

Entre les cercles du plan, on considère la relation : cRc' si les cercles c et c' sont confondus ou bien si leur axe radical est une droite fixe donnée. Cette relation est-elle une équivalence ?

51) Dans une population, on veut faire une classification basée sur les caractères suivants : être commerçant ; avoir une voiture ; avoir un réfrigérateur ; avoir une machine à laver. Enumérer les 16 classes de la partition qu'on peut construire à partir de ces caractères, en supposant qu'aucune ne soit vide.

52) Dans N , on envisage les lois de composition :

$$a^b ; a - b ; aTb = ab - (a + b) ; aSb = 2a - 3b.$$

(aTb signifie que a et b sont associés par la loi désignée par T).

Etudier la commutativité et l'associativité.

53) Utiliser les tables d'addition et de multiplication de $Z/7$ pour vérifier les lois des deux opérations ; par exemple, calculer :

$$(3'.4').5' ; 3'.(4'.5') ; 3'(4' + 5') ; 3'.4' + 3'.5'.$$

54) Le groupe multiplicatif de $Z/7$ (c'est-à-dire l'ensemble des éléments non nuls) peut être engendré par les puissances du seul élément $3'$. Il peut de même être engendré par les puissances de $5'$.

55) Construire la table de multiplication de $Z/12$. Vérifier que les classes diviseurs de zéro correspondent à 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10. Les classes 1, 5, 7, 11 ont un inverse et forment un groupe multiplicatif.

56) Nous avons énoncé l'axiome 6 de la multiplication sous forme de distributivité à gauche : $a(b + c) = ab + ac$. Etablir la distributivité à droite : $(b + c)a = ba + ca$.

57) L'axiome 7 de la multiplication admet que tout élément non nul est simplifiable pour la multiplication, et nous en avons déduit :

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Montrer qu'inversement si l'on admet ce dernier énoncé, on peut démontrer l'axiome 7.

58) La congruence : $x^3 \equiv a \pmod{5}$ a une solution, quel que soit l'entier a .

59) Quels sont les entiers a pour lesquels : $x^3 \equiv a \pmod{7}$ a des solutions ?

60) Les 16 classes non nulles $\pmod{17}$ forment un groupe multipli-

catif qui peut être engendré par les puissances de la classe 3. Trouver les sous-groupes.

61) *Equations diophantiennes*. Soit l'équation : $5x - 7y = 1$; on peut la transformer en congruence : $5x \equiv 1 \pmod{7}$. Si a est la solution de cette congruence, les x qui vérifient la première équation sont : $x = a + 7k$. En déduire les valeurs correspondantes de y .

De même, l'équation : $3x - 25y = 8$ donne : $y + 2 \equiv 0 \pmod{3}$.

Résoudre :

$$3x - 5y = 2 ; 4x - 5y \equiv 1 ; 33x + 25y = 1 ; 33x + 25y = 8.$$

62) Résoudre les congruences :

$$3x \equiv 2 \pmod{5} ; 7x \equiv 4 \pmod{10} ; 243x + 17 \equiv 101 \pmod{725} ;$$

$$4x + 3 \equiv 4 \pmod{5} ; 6x + 3 \equiv 4 \pmod{10} ; 6x + 3 \equiv 1 \pmod{10}.$$

63) Résoudre les systèmes de congruences :

$$x \equiv 2 \pmod{5} \text{ et } 3x \equiv 1 \pmod{8} ; 3x \equiv 2 \pmod{5} \text{ et } 2x \equiv 1 \pmod{3}.$$

64) Démontrer que : $D(ma, mb) = mD(a, b)$, m, a et $b \in \mathbb{N}$. En déduire :

$$a = a'd, b = b'd \text{ et } D(a', b') = 1 \Rightarrow D(a, b) = d.$$

65) Etudier l'ensemble : $xa + yb + zc$; en déduire que si a, b, c ont un pgcd d , il est de la forme : $d = ma + nb + pc$.

66) Démontrer que : $D[D(a, b), c] = D[a, D(b, c)] = D[D(a, c), b]$.

67) La règle de simplification est-elle valable pour la loi de composition $aTb = D(a, b)$? C'est-à-dire a-t-on :

$$D(a, b) = D(a, c) \Rightarrow b = c ?$$

68) A partir de $D(a, b)$, chercher le plus petit commun multiple M de a et b . Montrer que : $Md = ab$.

A-t-on la règle de simplification :

$$M(a, b) = M(a, c) \Rightarrow b = c ?$$

69) *Recherche pratique du pgcd*. Soit à déterminer $D(a, b)$. Si $b > a$ on divise b par a : $b = aq + r$. Si (a, b) désigne l'ensemble des diviseurs communs à a et b , montrer que : $(a, b) = (a, r)$. On recommence, en divisant le plus grand des deux entiers a et r par l'autre. Les nombres vont en décroissant ; on sera enfin amené à chercher les diviseurs communs à un entier d et à 0, qui sont ceux de d , lequel sera le pgcd de a et b .

Exemple : 77 715 et 37 215.

Au lieu d'employer la division ordinaire (q par défaut, r positif), on peut employer q par excès et r négatif, de manière à rendre le reste minimum en valeur absolue.

Comparer les deux méthodes avec les entiers 8382 et 1750 ; on a à faire 7 divisions dans un cas, 4 dans l'autre.

70) En utilisant la méthode précédente (algorithme d'Euclide), montrer que : $D(ma, mb) = mD(a, b)$.

71) Démontrer que pour que l'équation : $ax + by = c$ ait des solutions, il faut et il suffit que : $D(a, b) | c$.

Après avoir divisé les deux membres par $D(a, b)$, utiliser le théorème de Bezout, qui permet de trouver une solution particulière de l'équation. Montrer que la solution générale de l'équation affine $ax + by = c$ peut s'obtenir en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation linéaire associée $ax + by = 0$.

D'où une méthode pour résoudre les équations diophantiennes : on emploie l'algorithme d'Euclide pour chercher le pgcd de a et b , ce qui permet de l'obtenir sous la forme $ma + nb$; d'où une solution particulière de l'équation.

Exemples : $730x - 27y = 64$; $8x + 11y = 101$; $12x + 41y = 1$.

72) En utilisant l'algorithme d'Euclide, mettre le pgcd des deux nombres a et b sous la forme $ma + nb$ dans les cas suivants : 14 et 35 ; 11 et 15 ; 180 et 252 ; 2873 et 6643 ; 4148 et 7684 ; 1001 et 7655.

73) Si p est premier, $p|ab \Rightarrow p|a$ ou $p|b$.

74) Démontrer : $D(a, m) = D(b, m) = 1 \Rightarrow D(ab, m) = 1$.

75) Démontrer :

$$D(a, c) = d, \quad a|b \text{ et } c|b \Rightarrow ac|bd \text{ et } M(a, c) = ac/d.$$

76) Les produits des 12 classes de $\mathbb{Z}/12$ par une classe diviseur de zéro, par exemple 9, ne donnent que quatre classes distinctes, toutes divisibles par 3.

D'une manière générale, si $D(a, m) = 1$, en multipliant par a les m classes (mod m), on obtient les mêmes m classes. Si $D(a, m) = d$, en multipliant les m classes par a , on a seulement m/d classes distinctes, toutes diviseurs de zéro et divisibles par d .

77) Si $D(a, m) = d$, la congruence : $ax \equiv b \pmod{m}$ a d solutions distinctes.

78) Ecrire les tables d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}/9$; vérifier que les éléments autres que 0 et ses diviseurs forment un groupe multiplicatif.

79) Vérifier que le groupe additif $\mathbb{Z}/6$ peut être engendré par les multiples de la classe 5' (groupe cyclique). Trouver les sous-groupes cycliques.

80) Pour tout entier x : $x^2 \equiv 0, 1$ ou $4 \pmod{8}$.

81) Montrer que $x^2 \equiv 35 \pmod{100}$ n'a pas de solution.

82) Si $x^2 \equiv a \pmod{65}$ a une solution, il en est de même pour $x^2 \equiv -a \pmod{65}$.

83) Pour tout x impair non multiple de 3 : $x^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

84) Montrer qu'aucun entier $x \equiv 7 \pmod{8}$ ne peut être une somme de trois carrés (utiliser l'exercice 80).

85) Si $D(m, m') = 1$, on peut résoudre les congruences simultanées : $x \equiv b \pmod{m}$ et $x \equiv b' \pmod{m'}$. Si x et x' sont deux solutions, on a : $x \equiv x' \pmod{mm'}$.

86) Généralisation du 85 : étudier les congruences simultanées :

$$a_i x \equiv b_i \pmod{m_i} \text{ avec : } D(a_i, m_i) = 1,$$

les m_i étant premiers entre eux deux à deux.

87) Le groupe additif des classes (mod 60) peut être engendré par les multiples d'une classe première avec 60. Chercher les sous-groupes.

88) Sur Q , soit la loi de composition : $aTb = (a + b)/2$. Montrer qu'elle n'est pas associative. Calculer :

$$aT(bTc) ; (aTb)Tc ; (aTc)Tb ; aT(cTb) ; \dots$$

Sur N , la même loi est-elle partout définie ?

89) Soit un ensemble E , sur lequel est définie une loi de composition T non associative. Etant donnés n éléments, pris dans un ordre déterminé, combien de « produits » différents peut-on former avec ces éléments, en les associant de diverses manières ? Faire le calcul pour $n = 3, 4$ et 5 , pour lesquels les réponses sont respectivement $2, 5$ et 12 . Exemple : soit (dans Q) la loi : $aTb = a + 1/b$. Etudier la commutativité, l'associativité. Pour 3 éléments a, b, c pris dans cet ordre, calculer les produits de l'exercice 88. Calculer les produits pour 4 éléments a, b, c, d pris dans cet ordre. Combien obtiendrait-on de produits en modifiant l'ordre des 4 éléments ?

90) Une loi de composition est définie par la table ci-dessous. Vérifier si elle est commutative : associative.

	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

Résoudre des équations telles que : $xTb = c$; $xTx = x$; $xTx = a$.

91) Dans Q , on considère la loi de composition : $aTb = a + b + ab$. Etudier la commutativité ; l'associativité ; chercher s'il y a un élément neutre, les éléments qui ont un inverse ; la loi est-elle distributive pour l'addition ? Pour la multiplication ?

92) Dans l'ensemble des entiers naturels non nuls, on considère deux lois de composition : $a \circ b$ est le pgcd de a et b , aTb est le ppcm. Etudier la commutativité, l'associativité, montrer que la multiplication est distributive par rapport à chacune des deux lois.

93) En utilisant la distributivité des lois $\cup$ et $\cap$, démontrer formellement que, A et C étant des parties données de E , la relation $A \cap B = A \cap C$ est vérifiée par : $B = A' \cap C$, A' étant le complément de A par rapport à E . Quelles sont les autres solutions ?

94) Soient les couples d'entiers (a, b) et (c, d) , a et c non nuls. Montrer que la relation : $bc = ad$ est une relation d'équivalence.

95) Soient les couples d'entiers (a, b) et (c, d) ; montrer que la relation : $a + d = b + c$ est une relation d'équivalence.

96) Dans l'ensemble des entiers naturels, on considère les parties suivantes : les multiples de 7 ; les non multiples de 5 ; les impairs ; les entiers congrus à 2 (mod 5). Déterminer celles de ces parties qui sont fermées pour l'addition ; pour la multiplication.

97) Dans un groupe fini d'ordre pair, il existe, en dehors de l'élé-

mènt neutre, un nombre impair d'éléments qui sont leurs propres inverses.

98) Etudier le groupe des opérations géométriques qui laissent invariant (globalement) un parallélogramme ; un rectangle.

99) Soit un polygone régulier de n côtés ; étudier le groupe des rotations qui laissent invariant le polygone.

100) Trouver l'ordre de chaque élément du groupe du carré.

101) Etudier le groupe de l'hexagone, et le sous-groupe qui laisse invariante une diagonale donnée.

102) Si G est sous-groupe de G' et G' sous-groupe de G'' , G est-il sous-groupe de G'' ?

103) Dans le groupe du carré (avec les notations du texte), trouver X tel que : $RXR' = D$. Si l'on désigne par H^{-1} l'inverse de l'élément H de ce groupe, montrer que : $(RH)^{-1} = H^{-1}R^{-1}$ et vérifier que cette expression n'est pas égale à $R^{-1}H^{-1}$.

104) Montrer que le groupe du polygone régulier (ex. 99) peut être engendré par deux éléments R et H tels que : $R^n = I$ et $H^2 = I$.

105) Dans $\mathbb{Z}/6$, les éléments autres que 0 et ses diviseurs forment un groupe multiplicatif ; à quel groupe connu est-il isomorphe ? Même question pour $\mathbb{Z}/9$.

106) Dans $\mathbb{Z}/11$, quels sont ceux des ensembles suivants qui forment un groupe multiplicatif :

$(1, 3, 4, 5, 9)$; $(1, 3, 5, 7, 8)$; $(1, 8)$; $(1, 10)$; $(1, 10, 3)$.

107) Tout groupe d'ordre inférieur ou égal à 4 est commutatif.

108) Dans un groupe G , l'ensemble des éléments a tels que $ax = xa$ pour tout $x \in G$ est un sous-groupe de G , qu'on appelle centre de G . Chercher le centre du groupe du carré ; du groupe du polygone régulier de n côtés.

109) Chercher les sous-groupes des groupes suivants : $\mathbb{Z}/12$ additif ; groupe du pentagone régulier ; de l'hexagone régulier.

110) Les éléments non nuls de $\mathbb{Z}/7$ forment-ils un groupe cyclique ? Même question pour les éléments 1, 3, 5, 7 de $\mathbb{Z}/8$; pour 1, 2, 4, 5, 7, 8 de $\mathbb{Z}/9$.

111) Parmi les groupes suivants, y en a-t-il qui soient isomorphes : groupe du triangle équilatéral ; du carré ; des éléments non nuls du groupe multiplicatif $\mathbb{Z}/5$; des rotations de l'hexagone régulier ; groupe additif $\mathbb{Z}/4$; groupe additif $\mathbb{Z}/6$.

112) Même question pour : le groupe des rotations du carré ; des symétries du rectangle ; des symétries du losange ; groupe multiplicatif de 1, 5, 8, 12 (mod 13) ; groupe multiplicatif de 1, 5, 7, 11 (mod 12).

113) A quelle condition un élément a d'un groupe cyclique d'ordre m engendre-t-il tout le groupe ? On dit alors que c'est un élément primitif. Chercher les éléments primitifs de $\mathbb{Z}/10$, de $\mathbb{Z}/12$.

114) Si un groupe formé de 6 éléments a un élément d'ordre 3, il est cyclique.

115) Soient deux entiers naturels a et b , et $D(a, b) = 1$. Le raison-

nement employé à propos des groupes cycliques montre que les puissances successives de a , divisées par b , donnent une suite périodique de restes ; le nombre de termes de la période est le plus petit entier k tel que : $a^k \equiv 1 \pmod{b}$.

Applications : On pourrait en déduire des règles de divisibilité pour les entiers écrits dans la numération décimale, par exemple par 7, mais elles ne seraient guère utilisables pratiquement.

Trouver les restes de : $3758^{79} \pmod{11}$; de $153^{21} \pmod{7}$.

116) Il existe deux types de groupes d'ordre 4 ; l'un est le groupe additif $\mathbb{Z}/4$, l'autre le groupe des isométries du rectangle.

117) Chercher les groupes d'ordre 5, formé des éléments e, a, b, c, d . On remarquera qu'on doit associer à chacun des éléments a, b, c, d son inverse, et que le seul cas possible est celui où : $ab = cd = e$. La seule solution est un groupe isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/5$.

118) Quatre hommes possèdent en commun des cocotiers et un singe. Un jour, un premier homme prélève le quart des noix et comme il en reste une, il la donne au singe. Le deuxième jour, un deuxième homme prélève le quart des noix qui restent ; il y en a une de trop, il la donne au singe. Le jour suivant, un troisième homme fait de même. Enfin, le quatrième jour, les quatre hommes se partagent également les noix, et comme il y en a une de trop, ils la donnent au singe. Trouver le plus petit nombre de noix pour lequel le problème est possible.

Même question, en supposant que le quatrième homme agisse comme les trois premiers, et que le partage final se fasse le cinquième jour.

119) Sept personnes se partagent un nombre x d'objets, x n'étant pas divisible par 7. La première prend un objet et le septième du reste ; la deuxième prend 2 objets et $2/7$ du reste, la troisième 3 objets et $3/7$ du reste, ..., la septième prend 7 objets et $7/7$ du reste. Trouver la plus petite valeur de x pour laquelle le problème est possible.

La très prochaine parution du Cours de l'A.P.M. - I

Le premier volume du Cours REVUZ

Groupes anneaux, corps

va paraître aussitôt après le Bulletin 224.

— Si vous avez souscrit avant le 30/7/62, le volume vous sera envoyé à l'adresse indiquée par vous lors du versement. **En cas de changement d'adresse, conformez-vous aux instructions précisées p. 80 ou 98.**

— Si vous n'avez pas souscrit, passez votre commande, comme pour les autres brochures : voir p. 31.

DISTANCES

par Marc BARBUT

(Groupe de Mathématique Sociale et de Statistique - E.P.H.E.)

« Des distances, l'amour peut rire,
l'amitié n'en supporte point. »

BÉRANGER.

Nous nous servons constamment d'expressions telles que : « la pensée de Pascal est très *éloignée* de celle de Montaigne », « le climat de Marseille est *voisin* (ou *proche*) de celui de Gênes », « il y a une grande *distance* entre le programme du Parti Communiste et celui des Indépendants », etc...

Ces mots soulignés, et tous ceux qui appartiennent au même champ sémantique, sont également utilisés en géométrie et en topologie, de façon très précise : ils recouvrent alors des instruments de calcul. Il est vraisemblable que le sens technique de ces termes joue un grand rôle dans nos représentations lorsque nous les utilisons dans le langage courant ; l'expérience que nous avons des distances spatiales (tout au moins localement), l'enseignement de la géométrie qui nous a été donné à l'école conditionnent notre représentation de l'espace et le sens que nous donnons aux termes du champ « distance ».

Est-il possible d'aller plus loin (*) ? De même que les distances géométriques ont été construites pour rendre calculables, communicables les données de notre intuition spatiale, ne peut-on fabriquer des « distances » qui nous rendraient les mêmes services en étant applicables à d'autres objets que les « points » de la géométrie (qui sont considérés comme des représentations des points matériels de l'espace physique dans le modèle mathématique de celui-ci qu'est l'espace de la géométrie métrique classique) ?

I. — LES DISTANCES EN GEOMETRIE

Rappelons d'abord comment on opère en géométrie métrique classique. A chaque couple de points (A, B) , on associe un *nombre* réel positif ou nul, la *distance* entre A et B , notée $d(A, B)$. Mais, évidemment, ce nombre n'est pas choisi de façon quelconque. D'abord on sait que si la distance entre deux points est nulle, les deux points sont confondus, et réciproquement. Ensuite, les distances de A à B et de B à A doivent être

(*) Sans y prendre garde, l'auteur introduit ici un terme du champ « distance » justement dans un sens que l'article se propose de justifier ; on ne saurait mieux souligner l'intérêt de la question. (N.D.L.R.).

égales (en réalité, cette condition n'est pas essentielle et l'on peut s'en affranchir ; on le devra dans beaucoup d'applications, par exemple lorsque la distance est définie par une durée de parcours ou un coût de transport ; si l'aller et le retour ne définissent pas la même distance, on retiendra comme distance la plus grande des deux évaluations, par exemple).

Enfin on traduit de façon précise le vieil adage « la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre » : étant donné trois points A, B, C , la distance de A à B est inférieure ou exceptionnellement égale à la somme des distances de A à C et de B à C .

On peut résumer ces propriétés de la façon suivante : E désignant l'espace, définir la distance d sur E revient à définir une application de E^2 dans R^+ [c'est-à-dire associer à tout couple (A, B) de points pris dans E un nombre réel positif ou nul $d(A, B)$] telle que :

I) $A \in E, B \in E$, il existe un nombre réel positif ou nul $d(A, B)$ et un seul appelé distance de A à B ;

II) $d(A, B) = 0 \iff A = B$;

III) $d(A, B) = d(B, A)$;

IV) $d(A, C) + d(C, B) \geq d(A, B)$.

De ces relations, la quatrième, la *relation triangulaire* (faussement dénommée souvent « inégalité triangulaire »), est la plus remarquable, car c'est par elle que nous traduisons le sentiment, l'intuition que nous avons de la distance dans la *structure algébrique* des nombres, à savoir deux des opérations fondamentales que l'on peut faire avec ceux-ci : les additionner (+) et les comparer entre eux, les ordonner ($\geq$).

Exemples.

Prendre comme distance entre deux points A et B la longueur du segment AB n'est pas la seule façon de satisfaire aux conditions I), II), III) et IV) ; en voici d'autres exemples :

1° si $A = B$, alors $d_1(A, B) = 0$ et si $A \neq B$, alors $d_1(A, B) = 1$ (*) ;

2° $d_2(A, B) = \sqrt{\text{longueur du segment } AB}$; on s'assurera facilement que les quatre conditions sont vérifiées ;

3° soit le plan rapporté à deux axes de coordonnées x et y (pour simplifier, pris orthonormés), M_1 et M_2 ayant respectivement pour coordonnées x_1, y_1 et x_2, y_2 , on appelle distance des deux points la plus grande des valeurs absolues des différences $|x_2 - x_1|$ et $|y_2 - y_1|$, soit encore $d_3 = \sup(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)$;

(*) Dans sa conférence « Espaces euclidiens et espaces métriques », parue dans le *Bulletin* 183 de janvier 1957 et reprise dans *Structures algébriques et structures topologiques*, p. 117, André Revuz, à propos de cet exemple écrivait : « C'est évidemment un cas extrême qui ne peut guère avoir d'autre rôle que celui de garde-fou, en fournissant un contre-exemple éventuel à un théorème conjecturé sur les espaces métriques. » D'un point de vue mathématique, sans doute. Toutefois, n'est-ce pas justement la « distance » qui existe dans le domaine de la douleur physique ? Si vous me marchez sur le pied, je hurlerai ; si un éléphant vous écrase, j'en serai fâché mais je ne sentirai rien. (N.D.L.R.).

4° dans le plan rapporté aux mêmes axes de coordonnées, on peut appeler distance des points M_1 et M_2 la somme :

$$d_4(M_1, M_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|,$$

c'est la distance usuelle dans une ville en damier (pour qui n'est pas « monte en l'air »).

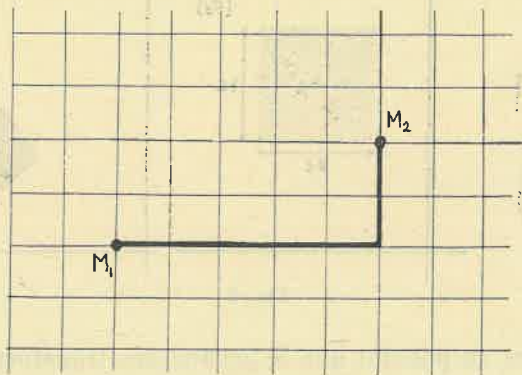


FIG. 1

Voisinages.

Dans la plupart des calculs concernant les distances, seules les propriétés I, II, III et IV interviennent. Une définition de la distance ayant été adoptée, on peut en déduire une définition de la *proximité* (relative à cette distance) : A est dit plus proche de B que de C si, et seulement si :

$$d(A, B) < d(A, C).$$

On peut alors définir le *voisinage* d'un point A : M est voisin de A à ε près si, et seulement si :

$$d(A, M) < \varepsilon.$$

En vertu de la relation triangulaire, il apparaît immédiatement que deux points voisins à ε près d'un même troisième sont voisins entre eux à 2ε près au plus.

Bien entendu, la forme des voisinages dépend de la définition choisie pour la distance. Dans l'exemple n° 1, le voisinage d'un point est réduit à lui-même ; avec la distance d_2 , comme avec la distance classique d_0 = longueur du segment, le voisinage est un disque ouvert dans le plan (une boule ouverte dans l'espace) ; dans l'exemple n° 3, le voisinage de A est la surface intérieure d'un carré de centre A dont les côtés parallèles aux axes mesurent 2ε ; enfin dans le cas n° 4 (en supposant encore les coordonnées orthonormales pour simplifier le tracé de la figure), le voisinage de A est la surface d'un carré de centre A et dont les côtés sont parallèles aux bissectrices des axes de coordonnées.

De la définition d'un voisinage résulte celle d'une *topologie*. Si nous laissons de côté l'exemple d_1 (qui conduit à la topologie discrète), les topologies du plan définies à partir des distances d_2 , d_3 ou d_4 sont équivalentes entre elles et équivalentes à celle que l'on obtient en prenant

pour distance la longueur du segment (d_0). Par « équivalentes », nous signifions ici que si un point M tend vers un point A dans l'une de ces topologies, M tend également vers A dans une autre : dans tous les cas, la distance de M à A tend vers zéro (que ce soit d_0 , d_2 , d_3 ou d_4).

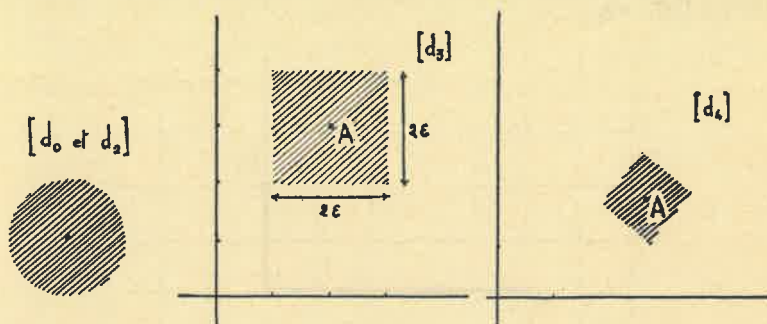


FIG. 2

Remarquons en passant que le groupe des transformations du plan (ou de l'espace) laissant les distances invariantes dépendra de la définition adoptée pour la distance.

« Intermédiaire entre ».

Si l'on veut, dans la gamme de toutes les distances *a priori* possibles, restreindre le choix, on peut le faire en cherchant à traduire de la façon la plus simple possible en termes de nombres, non seulement la relation « plus proche de », mais aussi la relation (ternaire) « intermédiaire entre ». En ce qui concerne les nombres, convenons de dire que C est entre A et B si, et seulement si :

$$d(A, C) + d(C, B) = d(A, B),$$

c'est-à-dire si la relation triangulaire IV se réduit à l'égalité. En ce qui concerne les « points », il faut choisir quelle sorte de configuration pour les points A, B et C correspond au cas où la relation numérique précédente est vérifiée.

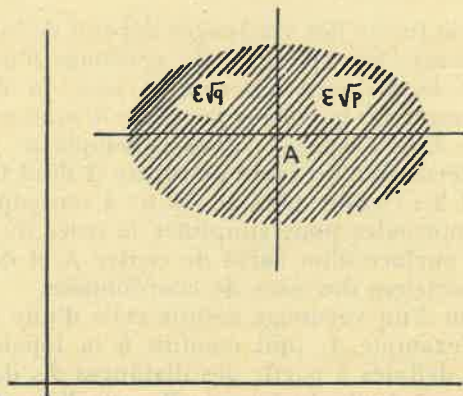


FIG. 3

Si la distance de deux points est la longueur du segment qui les joint, C est alors situé sur le segment AB. Mais la réciproque n'est pas vraie ; on démontre que la distance la plus générale pour laquelle on a

$$d(A, C) + d(C, B) = d(A, B) \iff C \in \text{segment AB}$$

est la « distance en moyenne quadratique » définie par :

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{p(x_2 - x_1)^2 + q(y_2 - y_1)^2}$$

où p et q sont deux nombres réels positifs arbitraires mais choisis une fois pour toutes (les coordonnées étant orthonormées). Par rapport à cette distance, les voisinages de A sont des ellipses de centre A et dont les axes respectivement parallèles à Ox et Oy ont pour mesures $2 \pm \sqrt{p}$ et $2 \pm \sqrt{q}$. Bien entendu, la longueur du segment $M_1 M_2$, ou distance euclidienne, appartient à la famille des distances en moyenne quadratique, puisqu'elle correspond au cas particulier $p = q = 1$.

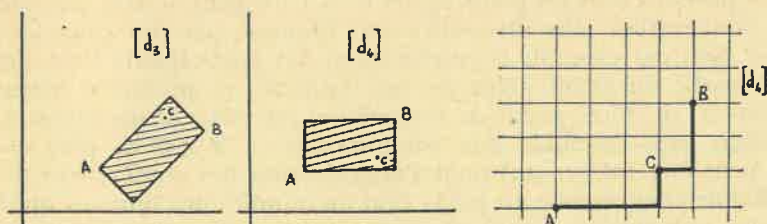


FIG. 4

Avec la distance d_s , la relation d'égalité $d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$ exprimera que le point C appartient à la surface du rectangle de diagonale AB et dont les côtés sont inclinés de 45° sur les axes de coordonnées.

Avec la distance d_4 , la même relation d'égalité exprimera que le point C appartient au rectangle de diagonale AB dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Revenons à l'image de la ville en damier, le carrefour C est « entre » les carrefours A et B si l'on peut passer par C pour aller de A à B par l'un des plus courts chemins (car ici le plus court chemin n'est pas unique).

Ainsi, à chaque choix de la distance correspond une signification du mot « intermédiaire » et, en général, à chaque signification de ce mot une famille de distances.

II. — ESPACES METRIQUES

Revenons maintenant au cas d'autres ensembles que celui des points de la géométrie. De façon tout à fait générale, on a défini une distance sur un ensemble E si, à chaque couple (x, y) de $E \times E$, on associe un nombre réel et un seul noté $d(x, y)$ tel que :

- I) $d(x, y) \geq 0$;
- II) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- III) $d(x, y) = d(y, x)$;
- IV) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Autrement dit, définir une distance d sur l'ensemble E, c'est définir une application du produit cartésien $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ de telle façon que les propriétés I, II, III et IV soient vérifiées. E est alors un *espace métrique* ;

les expressions « plus proche de », « voisinage » y prennent alors le sens correspondant au choix de la distance adoptée. Si, d'autre part, E est déjà muni d'une certaine structure pour laquelle l'expression « intermédiaire entre » ait une signification intuitive, on traduira celle-ci par l'égalité :

$$y \text{ entre } x \text{ et } z \iff d(x, y) + d(y, z) = d(x, z).$$

Nous appliquerons ces principes à deux exemples.

Parties d'un ensemble fini.

On définit d'abord une *mesure* sur l'ensemble des parties de l'ensemble fini E considéré. Pour cela on affecte chaque élément de E d'un *poids*, c'est-à-dire qu'on définit une application de E dans $\mathbf{R}^+$. Si l'on n'a pas de raison de donner aux éléments de E une pondération plutôt qu'une autre, on prendra tous les poids égaux à $+1$; il peut arriver au contraire qu'une pondération plus diversifiée soit imposée par des considérations spéciales. Soit par exemple le recensement des participants à un Congrès international ; du strict point de vue humain, la première mesure de l'ensemble (resp. d'une partie de l'ensemble) est l'effectif des congressistes (resp. d'un sous-ensemble des congressistes) : $\forall x \in E, p(x) = +1$; mais il peut être intéressant pour l'organisation des conférences de donner à chaque congressiste un poids égal au nombre des langues qu'il peut parler, les polyglottes auront alors un grand poids et les mesures des parties de E seront très différentes de ce qu'elles étaient dans le premier cas.

Chaque élément de E étant pondéré, la mesure $m(X)$ d'une partie X de E est la somme des poids de ses éléments ; on pose évidemment $m(\emptyset) = 0$.

X et Y étant deux parties de E , on peut appeler distance de X à Y la mesure de la différence symétrique de X et Y , c'est-à-dire la somme des mesures de la partie de X qui n'est pas incluse dans Y et de la partie de Y qui n'est pas incluse dans X :

$$d(X, Y) = m(X \Delta Y) = m(V) + m(W).$$

On vérifie facilement que les axiomes de la distance sont bien vérifiés. En particulier la relation III (symétrie) résulte du caractère de la différence symétrique qui fait jouer le même rôle aux deux parties X et Y ; la relation triangulaire exprime qu'en général, lorsque l'on considère trois parties X, Y, Z , chacune contient des éléments qui n'appartiennent à aucune des deux autres.

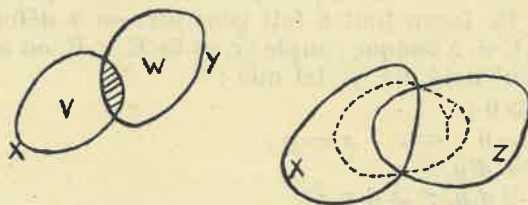


FIG. 5

L'expression « Y est une partie de E intermédiaire entre les parties X et Z » traduit au contraire la situation spéciale suivante : les éléments

communs à X et Z appartiennent à Y et les éléments de Y appartiennent à X ou à Z , c'est-à-dire à la réunion de X et Z . Cela rattache l'expression « entre » de la structure booléenne de l'ensemble des parties par les opérations d'intersection et de réunion, ce qui s'écrit :

$$X \cap Z \subset Y \subset X \cup Z \iff d(X, Y) + d(Y, Z) = d(X, Z).$$

Dans les applications pratiques, l'ensemble E dont il s'agira de distancer les parties sera souvent l'ensemble des graphes des correspondances entre deux ensembles A et B donnés, c'est-à-dire l'ensemble des parties du produit catésien (supposé fini) $A \times B$ (distances entre réseaux, entre sociogrammes, etc...). En particulier, si E est l'ensemble des rangements (dans un certain ordre) des éléments d'un ensemble fini A , c'est-à-dire une sélection dans l'ensemble des parties du produit cartésien $A \times A$, la distance entre deux rangements est celle qui consiste à compter, entre deux rangements de A , le nombre des désaccords (x avant y dans le premier rangement et y avant x dans le second).

Espaces vectoriels.

Supposons maintenant que l'ensemble à distancer est un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbf{R}$ des réels, c'est-à-dire l'ensemble des listes $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_n$. Dans la pratique, ces vecteurs pourront être des réseaux valués, ou des chroniques (de prix, de populations, etc...), ou des variables aléatoires, etc...

Trois distances sont usuellement utilisées dans un tel espace vectoriel E .

$$1^\circ d(x, y) = \sum_{i=1}^n p_i |x_i - y_i| \quad (p_i > 0).$$

La distance du vecteur x au vecteur y est la somme des écarts absolus entre coordonnées de même indice, ces écarts étant pondérés par des coefficients positifs choisis une fois pour toutes selon la nature du problème étudié ; en particulier, les poids peuvent être tous pris égaux à 1 s'il n'y a aucune raison de donner aux diverses coordonnées des poids différents.

Avec cette définition de la distance de deux vecteurs, un vecteur y sera dit « entre » les deux vecteurs x et z si, et seulement si, chacune des coordonnées de y est comprise entre la plus grande et la plus petite des coordonnées correspondantes de x et de z . La figure 6 représente deux suites chronologiques x et z comportant chacune treize éléments ($n = 13$) et une suite intermédiaire y .

$$2^\circ d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i (x_i - y_i)^2}.$$

C'est la distance en moyenne quadratique déjà rencontrée en géométrie ($n = 2$ ou 3) ; elle est dite euclidienne lorsque tous les coefficients p_i sont pris égaux à 1. On obtient un vecteur y intermédiaire entre les vecteurs x et z en prenant leur barycentre. Sur une figure semblable à la figure 6, la courbe y partagerait dans un rapport constant le segment parallèle à l'axe des ordonnées découpé par les courbes x et z .

$$3^\circ d(x, y) = \sup |x_i - y_i|.$$

On prend ici pour distance l'écart maximum entre les coordonnées de même nom. Le vecteur y est dit « entre » les vecteurs x et z lorsque les écarts maximum entre coordonnées de x et y , de y et z , de z et x sont atteints pour la même coordonnée, celle de numéro r par exemple, et si l'on a alors

$$|x_r - y_r| + |y_r - z_r| = |x_r - z_r|$$

ou, ce qui revient au même : $x_r \leq y_r \leq z_r$.

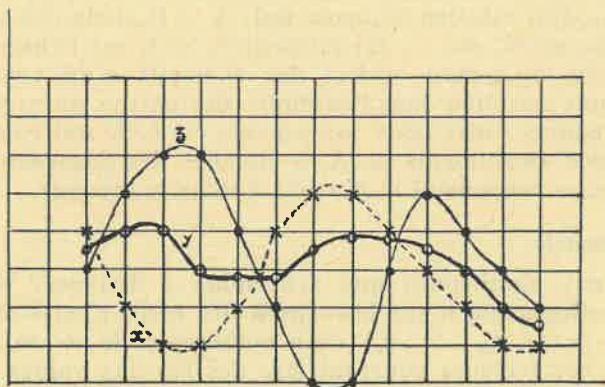


FIG. 6

Bien entendu, à chacune de ces distances, il est possible d'associer, pour l'espace vectoriel, une *norme*, en posant :

$$\text{norme de } x = n(x) = d(0, x)$$

où 0 désigne le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles.

Terminons par la remarque suivante, relative à un problème qui se pose souvent dans la pratique : savoir « réaliser la meilleure approximation possible d'un vecteur par un autre répondant à certaines conditions *a priori* » (par exemple, réaliser un ajustement d'une courbe empirique, ou d'une série statistique dont on veut un bon résumé). Il faut évidemment prendre garde que le superlatif « la meilleure approximation possible » n'a de sens que relativement au choix préalable de la distance qui mesurera l'approximation.

Donnons l'exemple d'une série chronologique de 5 termes ($n=5$) soit $x = (2, 5, 0, 3, 1)$ et cherchons la meilleure valeur constante $\bar{x}$ résument cette série. Avec la première distance (dans laquelle les p_i vaudront tous 1), on trouve la valeur *médiane* ; en rangeant les 5 termes de x par valeurs décroissantes, ce sera la valeur ayant le rang médian, soit ici 2. Avec la distance euclidienne, $\bar{x}$ est la moyenne arithmétique des coordonnées de x , soit ici 2,2. Enfin, avec la troisième distance, $\bar{x}$ est la moyenne arithmétique entre la plus grande et la plus petite coordonnée de x , soit ici 2,5.

Les brochures de l'A.P.M.

Que vous soyez ancien et nouvel adhérent de l'A.P.M., vous pouvez être intéressé par **les Brochures**.

Elles reprennent, souvent avec d'importantes additions, des études publiées par le Bulletin, ou des textes inédits. Elles sont tirées sur beau papier et pourtant vendues à des prix défiant toute concurrence.

1. **Le langage simple et précis des Mathématiques modernes**, par André REVUZ et L. LESIEUR (le tirage à 3 500 ex. est épuisé).
2. **Congruences paratactiques de cycles**, par P. ROBERT (64 pages, 3 NF, franco 3,50 NF).
3. **Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire**, par G. CHOQUET (40 pages, 2 NF, franco 2,50 NF).
4. **Le calcul des probabilités et l'enseignement**, par A. HUISMAN, R. FORTET, E. MOURIER, A. FUCHS, D. DUGUÉ, G.-T. GUILBAUD, J. BOUZITAT, J. VILLE, F. GENUYS (144 pages, 7 NF, franco 8 NF).
5. **L'enseignement de la mécanique**, par P. GERMAIN, R. MAZET, J. KAMPÉ DE FÉRIET (40 pages, 2 NF, franco 2,50 NF).
7. **Etude commentée d'une méta-démonstration de Gödel**, par Jean BALIBAR (40 pages, 2 NF, franco 2,50 NF).

**

Un prix spécial est consenti pour la commande de la collection complète (n° 2, 3, 4, 5, 7) : 11 NF (au lieu de 14) ; franco 14 NF.

**

Notice sur : « **Le système international des unités de mesure** », par F. BRACHET (8 pages). L'exemplaire : 1 NF (franco).

Prix par quantités (franco) 10 ex. : 5 NF ; 50 ex. : 20 NF ; 100 ex. : 30 NF.

ATTENTION :

La « brochure n° 6 », c'est-à-dire **LE COURS DE L'A.P.M. I. GROUPES, ANNEAUX, CORPS**, par André et Germaine REVUZ, professeurs à la Faculté des Sciences de Poitiers, va bientôt paraître.

Les quelque 1 500 souscripteurs seront, bien entendu, servis les premiers. Nous pensons qu'en novembre ils auront tous reçu le volume (176 pages sur beau papier « bouffant 72 g »).

LA SOUSCRIPTION EST DESORMAIS CLOSE. Mais tous les collègues qui le désireront pourront encore se procurer le volume à un prix intéressant (qui sera fixé après le tirage, mais sera probablement voisin de 20 NF).

Cours spécialement conçu pour les professeurs, enrichi de nombreux exercices (dont les solutions détaillées constituent près du tiers du volume), **LE COURS DE L'A.P.M.** est l'outil indispensable des professeurs qui veulent enseigner les mathématiques de leur temps.

N. B. Très important. Pour se procurer les brochures :

Employer de préférence à tout autre le moyen suivant : adresser un virement postal au compte de l'A.P.M.E.P. (Paris 5 708-21). Préciser au dos du virement les brochures commandées. Le Trésorier de l'A.P.M. se charge des expéditions.

Recommandation aux responsables d'établissement : centralisez les commandes de brochures, vous simplifierez le travail du Trésorier.

O.C.D.L.

65, rue Claude-Bernard, Paris - V^e

MATÉRIEL DIDACTIQUE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

● Calculateur de fonctions Faber Castell.

Un instrument de travail polyvalent pour l'illustration d'un cours magistral et de travaux pratiques en classes terminales. C'est un appareil aux possibilités très variées permettant la réalisation de transformations linéaires, la représentation graphique et la solution de fonctions et d'équations du second degré, du troisième et du quatrième degré, les représentations directes de fonctions trigonométriques, l'addition de deux fonctions par superposition, l'addition directe de plusieurs fonctions trigonométriques, l'addition indirecte de plusieurs fonctions trigonométriques, la somme des premiers termes d'une série de Fourier, etc...

Brochure explicative sur demande.

● Règles à calcul Castell.

— Castell novo-duplex 2/83.

Les grands avantages de cette règle sont les échelles de racines carrées $W1$, $W1'$, $W2$, $W2'$. Une règle de 25 cm. qui donne la précision de 4 décimales des règles de 50 cm.

— Règle scolaire Castell-Duplo 52/82.

Les échelles principales sont soulignées par des linceaux verts. Uniformité et précision excellentes. Par un seul réglage du curseur, on peut déterminer les valeurs de toutes les fonctions d'angle. L'échelle supplémentaire des tangentes $T2$ de 45° à $84,5^\circ$, permet, pour la première fois, avec une règle à calcul scolaire, le calcul direct avec des valeurs de tangentes supérieures à 45° . La transformation incommode de la fonction cotangente est supprimée et les calculs d'angles supérieurs et inférieurs à 45° peuvent toujours être exécutés avec le mode opératoire habituel.

● Hélices à calcul Otis King's.

— Modèle K : toutes les opérations de calcul.

— Modèle L : toutes les opérations et, en outre, par lecture directe le logarithme d'un nombre quelconque.

Notice explicative sur demande.

NOTES SUR LES NOUVEAUX PROGRAMMES EN MATELEM (*)

Les remarques qui suivent ont surtout pour but d'en provoquer de pareilles — ou plutôt de meilleures. Elles demandent des compléments, mises au point, rectifications, contradictions... que la rédaction du *Bulletin* accueillera avec avidité.

1. Construction des nombres.

Entiers naturels. — Leur construction axiomatique correcte se fait déjà dans certaines classes, mais on peut trouver que c'est long et pénible, alors une axiomatique « tempérée », surabondante, est encore acceptable si l'on dénonce ses défauts.

Par exemple : on se donne la suite des entiers (zéro, un...), c'est une phrase ; on énonce les significations de « ajouter un », « ajouter b à a » ; puis, postulats : $a = a' \iff a + b = a' + b$ (l'addition est « déterminée » et réciproquement les nombres entiers sont des éléments « réguliers » dans l'addition), $a + b = b + a$, $a + (b + c) = (a + b) + c$...et quelques autres peut-être : on a une demi-douzaine d'énoncés précis, choisis, qui sont des comptes rendus d'expériences.

Ceci fait, on peut annoncer avec fermeté que la suite de l'arithmétique se déduira logiquement des résultats de ce premier chapitre. Par exemple, si on définit la multiplication par : $a \times n = a + a + \dots + a$ (ce qui, entre nous, n'est pas fameux) ; les propriétés de celle-ci (commutativité, associativité et distributivité par rapport à l'addition) se déduiront de la propriété de l'addition :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n) + \dots + (l_1 + \dots + l_n) = (a_1 + \dots + l_1) + \dots + (a_n + \dots + l_n)$$

(on n'a pas fait appel à l'expérience des cartes de boutons).

Entiers relatifs. — La méthode axiomatique semble s'imposer : un entier relatif est une classe d'équivalence de couples (a, b) d'entiers naturels. Ceci est maintenant bien classique. L'introduction rapide du couple réduit : $(a, 0)$ ou a^+ ou $(+, a)$, $(0, b)$ ou b^- ou $(-, b)$, rassure les élèves : le jeu est correct.

Enfants, nous nous demandions une fois si la « règle des signes » ($+$ par $+$...) se « démontrait ». Un camarade, d'une autre classe, nous avait affirmé que son maître la démontrait ! — nous vivions en plein mystère !

Pour les *rationnels*, même méthode : un rationnel est une classe de couples appelés fractions, il y a deux couples réduits, mais on en choisit un. Pour ces deux chapitres, l'axiomatique peut être correcte et définitive.

Il est bon de marquer un temps d'arrêt ici dans ce long problème de construction ; on a les premiers exemples de groupe, anneau, corps, il en faut bien d'autres !

Passer à l'arithmétique ; les congruences modulo d fourniront sur $\mathbb{Z}$ un nouvel exemple d'anneau, et, si d est premier, de corps — et en géométrie (qu'avec un bon réglage on peut conduire en même temps), on notera que l'angle $(\vec{U}, \vec{V})$ par exemple se mesure non pas par un nombre algébrique, mais par une classe modulo 2π , avec un groupe additif (là on devra avouer que la définition de la multiplication est vicieuse, car $a + a$ n'est pas $2a$). La relation de Chasles s'appuie sur le fait que l'addition des classes est « déterminée », alors on peut choisir les échantillons des mesures pour trouver zéro (modulo 2π).

(*) Ne reculant devant aucune hardiesse, surtout lorsqu'il s'agit de profondes réformes, la Rédaction forge ce néologisme « matélem », la classe dont il s'agit ayant repris son vieux titre de *mathématiques élémentaires*. Quant aux nouveaux programmes, cf. Bulletin 222, p. 245.

Nombres réels. — C'est difficile. II, 5° y prépare (fractions décimales, quotients) ; 6° (rapports, racines...) et 8° (calculs approchés) engendrent le I, 4° (notions sur les réels). On peut, avec cela, composer une définition correcte des réels.

Que ces réels soient introduits à partir d'une représentation décimale n'est pas grave, car on peut montrer que la périodicité (ou non) d'un développement est *stable* malgré un changement de la base de numération.

L'idée directrice peut être la suivante : on sait ce que sont les *valeurs approchées* par défaut et par excès de $3/7$ (paragr. 5°). Au paragraphe 8°, on définit les *racines carrées approchées* de 2 ; ce ne sont des valeurs approchées de *rien du tout*, mais les deux suites qu'elles constituent ont les mêmes propriétés que plus haut (adjacentes) et avec elles on fait les mêmes opérations (encadrements, erreurs...). Alors ce « rien » devient « quelque chose » (voir Larousse), car c'est l'opération qui crée l'objet (comme : c'est la loi qui fait le citoyen, citation connue).

Nombres complexes. — Ils devront attendre que la géométrie en soit arrivée au 8° Similitude, car, plutôt que de « poser » les règles axiomatiques des opérations, il est préférable d'adopter l'exposé géométrique, avec le point de vue suivant : on ne va rien inventer, mais seulement « noter » des résultats géométriques tous connus et constater qu'on est conduit à une *extension* du corps des réels, avec *concordance* pour les deux opérations fondamentales.

Plan très sommaire :

1° Groupe additif des vecteurs libres du plan	addition $(a, b) + (a', b')$.
Propriétés de la somme vectorielle	propriétés de l'addition.
2° A toute similitude directe S de rapport $\rho > 0$ et d'angle θ (classe mod 2π) est associé un vecteur $\vec{V}$ non nul de longueur ρ , angle $(\vec{Ox}, \vec{V}) = \theta$	module et argument ρ, θ .
Echantillon $\vec{OA}$ de $\vec{V}$, similitude notée S_{OA}^+ .	
Similitude-produit S_{OC}^+ de S_{OA}^+, S_{OB}^+ : on obtient S_{OC}^+ en appliquant S_{OA}^+ à $\vec{OB}$,	
$S_{OA}^+(\vec{OB}) = \vec{OC}$	multiplication : $\rho\rho', \theta + \theta'$.
Propriétés de cette loi de composition (groupe)	propriétés de la multiplication.
Cas particulier : rotation $+$ $\frac{\pi}{2}$	nombre i .
« carré » de celle-ci	$i^2 = -1$.

3° La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition consiste à reconnaître pour les similitudes une *linéarité* qu'on aura vue en géométrie : le vecteur construit avec $\vec{OA}, \vec{OB} + \vec{OC}$, est la somme des vecteurs construits avec $\vec{OA}, \vec{OB}$ et $\vec{OA}, \vec{OC}$:

$$S_{OA}^+(\vec{OB} + \vec{OC}) = S_{OA}^+(\vec{OB}) + S_{OA}^+(\vec{OC}).$$

Remarque. — La révision de la trigonométrie peut se faire à ce moment ; $\cos(a + b)$ et compagnie s'obtiennent par le produit :

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b).$$

C'est presque obligatoire puisque Moivre est au programme.

Exercices. — Bien que le programme ne veuille pas d'applications à la similitude et à l'inversion, il va sans dire que les exercices rattachés directement aux définitions s'imposent. Ainsi :

— L'étude de l'inversion $Z = \frac{k}{z}$ avec k réel positif complète ce qu'on fait en géométrie (mais ne pas traiter la correspondance homographique générale).

— La division harmonique et le quadrangle harmonique étudiés jusqu'alors séparément sont pauvres respectivement, l'un en géométrie, l'autre en algèbre. Main-

tenant, l'étude du nombre $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ (mesures complexes) associe les deux : les calculs sont les mêmes (dans un corps) que sur la droite (à s'y tromper, évidemment — c'est-à-dire à ne pas savoir si c'est sur la droite ou sur le plan). La géométrie du plan s'introduit par les arguments qui ne sont plus nuls modulo π ; le choix d'une origine fournit $OA^2 = OB^2 = \overline{OC} \cdot \overline{OD}$ et donne avec naturel les propriétés connues. Si on choisit en outre un axe des réels et une unité, le problème se relie à l'étude de la correspondance $Z = z^2$ (ce qui est peut-être un peu hors du programme, même en exercice).

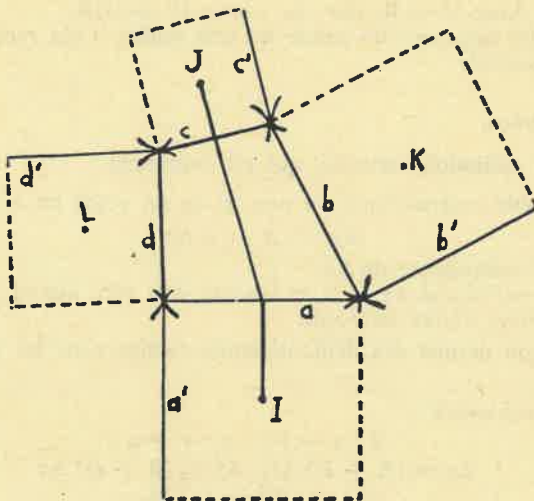
Autres exercices : 1° Lieu de M image de z pour que $(z + a)(z - a)$ soit réel (a complexe) : géométrie analytique simple en prenant la forme cartésienne ; géométrie dite pure par les arguments : on trouve une génération de l'hyperbole équilatère.

2° Ligne polygonale fermée orientée de quatre côtés, bordée d'un côté choisi par quatre carrés ; I, J, K, L sont les centres des carrés. Montrer que les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{KL}$ ont même longueur et sont de directions perpendiculaires.

On prend les vecteurs libres des côtés orientés $\vec{a} \vec{b} \vec{c} \vec{d}$; par la rotation $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$ on obtient $\vec{a}' \vec{b}' \vec{c}' \vec{d}'$ (cette rotation opérant sur les vecteurs libres n'a pas de centre). En évaluant $\vec{IJ}$:

$$\vec{IJ} = \frac{\vec{a}'}{2} + \frac{\vec{b} - \vec{d}}{2} + \frac{-\vec{c}'}{2}$$

et en appliquant la rotation $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$: $\vec{a}' \rightarrow -\vec{a}$, etc..., on obtient $\vec{KL}$.



C'est de la géométrie des vecteurs libres, — mais si on prend les nombres complexes : $a \dots$ et $ia \dots$, c'est de l'algèbre, — on ne sait plus ce que c'est, et c'est ce qu'il faut, — il n'y a que le langage qui est changé.

3° Cercles de Chasles ; très sommairement :

$$z = a \cos \varphi + ib \sin \varphi, \quad M$$

$$z_1 = a \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + ib \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad M_1$$

$$p = z + iz_1 = (a - b) \cos \varphi - i(a - b) \sin \varphi \quad P$$

$$q = z - iz_1 = (a + b) \cos \varphi + i(a + b) \sin \varphi \quad Q,$$

d'où les lieux de P et Q (cercles de Chasles), et la relation

$$pq = z^2 + z_1^2 = a^2 - b^2 - c^2$$

qui précise la disposition en quadrangle harmonique avec les foyers.

2. Sur l'homothétie.

Si c'est une correspondance ponctuelle, la famille n'est un groupe (non commutatif), vis-à-vis de la composition, que si elle adopte les translations. Si elle est correspondance vectorielle, c'est-à-dire opère sur les vecteurs libres, elle est définie simplement par k non nul ; $k = 1$ donne l'élément neutre dans la loi de composition ; ces homothéties n'ont pas de centre ; on a un groupe (commutatif) vis-à-vis de la composition, sans besoin d'adoption.

Les propriétés sont celles d'une application linéaire, écrites :

$$\begin{cases} \mathcal{H}(\vec{U}) + \mathcal{H}(\vec{V}) = \mathcal{H}(\vec{U} + \vec{V}) \\ \mathcal{H}(\lambda \vec{U}) = \lambda \mathcal{H}(\vec{U}) \end{cases}$$

avec leurs significations en langage géométrique.

L'homothétique de l'ensemble : $\vec{U} = x\vec{A} + y\vec{B}$

$\vec{A}, \vec{B}$ indépendants, x, y variables, est défini par :

$$\mathcal{H}(\vec{U}) = x \mathcal{H}(\vec{A}) + y \mathcal{H}(\vec{B}).$$

Si on fixe des origines (retour à une homothétie ponctuelle), on a un plan (ou un lieu dans le plan, ou une région, selon ce que sont x et y).

Si on a : $\text{long. } \vec{U} = R$, par $\mathcal{H}_k : \text{long. } \vec{U}' = |k|R$
d'où, si on fixe des origines : un cercle ou une sphère. Cela renouvelle un peu ce qu'on a fait en Seconde.

3. Sur les dérivées.

Signalons la définition suivante, qui est commode :

x étant variable indépendante ou non, si en un point on a :

$$\Delta y = (A + \varepsilon) \Delta x$$

A étant indépendant de Δx ,

ε étant nul quand $\Delta x = 0$, et tendant vers zéro quand Δx tend vers zéro,

A est appelé nombre dérivé au point.

1) Cette façon permet des démonstrations faciles pour les propriétés ajoutées au programme :

a) fonction composée :

$$f : x \rightarrow y ; \quad g : y \rightarrow z$$

$$\Delta z = (A + \varepsilon_1) \Delta y, \quad \Delta y = (B + \varepsilon_2) \Delta x$$

d'où :

$$\Delta z = (AB + \varepsilon_3) \Delta x,$$

b) *fonction inverse* :

$$\Delta y = (A + \varepsilon) \Delta x \quad \left\{ \begin{array}{l} A \neq 0 \\ \varepsilon \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{A + \varepsilon} \Delta y = \left(\frac{1}{A} + \varepsilon_1 \right) \Delta y.$$

2) Si on juge que la *différentielle* gagne à être définie en Mathématiques avant d'être « bricolée » en Physique, elle s'introduit *en même temps* que la dérivée (sinon avant !):

x étant variable indépendante, donc aussi Δx , la différentielle, au point, est $A \cdot \Delta x$. C'est le *premier* terme dans l'approximation d'un Δ ; si on dit : c'est l'application linéaire tangente, c'est vectoriel à volonté; on peut dire « terme principal » (mais c'est ennuyeux quand il est nul), on ne peut pas dire « partie principale ».

L'invariance du sens de l'écriture $dy = A dx$ usuelle ne demande pas de démonstration nouvelle : c'est contenu dans ce qu'on a fait plus haut 1) a).

J. SIROL,
(Lycée Louis-le-Grand).

Trois « autres » remarques sur les nouveaux programmes

N'ayant jamais eu beaucoup d'aptitude à la stricte observance d'un texte ou de son « esprit », je ne prétends donner aucun conseil dans les notes suivantes. Je ne désire rien tant que des critiques grâce auxquelles je pourrai, peut-être, progresser. Puissent beaucoup de collègues répondre à ces propos, ceux de Siros et les miens; rien ne peut mieux donner vie à ces programmes, qui seront nouveaux si nous le voulons, à la fois fanés et sclérosés dès leur apparition, si nous ne les nourrissons pas du lait frais de notre imagination.

1. Fonctions, applications, différentielles, dérivées.

Bien que la question soit plutôt à verser à la Commission du Dictionnaire, je souhaiterais, dès les débuts, la distinction suivante entre *fonction* et *application*. Limitons-nous, pour simplifier, au domaine algébrique. La formule :

$$y = f(x) = \sqrt{x-2}$$

définit une *fonction*; y est fonction de x . Il y a *application* dès que l'on précise l'ensemble E de départ, ici $E = \{x \in \mathbf{R}, x \geq 2\}$, et l'ensemble F dans lequel est inclus l'ensemble d'arrivée, ici $F = \mathbf{R}$; soit $\bar{F}$ l'ensemble d'arrivée, ici $\mathbf{R}^+$. Alors f est l'application de E sur $\bar{F}$, ce qu'on écrira :

$$f: x \in E \longrightarrow y \in \bar{F}.$$

Une place prédominante est faite, bien justement, à l'*application linéaire*. Soit A l'application linéaire de coefficient a :

$$A: x \in \mathbf{R} \longrightarrow y = ax \in \mathbf{R}.$$

Il est remarquable que la notation peut être introduite dès la classe de Sixième; on y gagne la disparition des « raisonnements de règle de trois », d'autant plus remarquables qu'ils énoncent si souvent des absurdités.

Le graphe de l'application f est la partie Γ de $E \times \bar{F}$, c'est-à-dire l'ensemble des couples $(x, y) \in E \times \bar{F}$ tels que $y = f(x)$. Nos élèves savent, depuis la Troisième (et peut-être avant), que le graphe de l'application linéaire A est une droite Δ passant par l'origine des coordonnées.

En Première, on a vu ou revu la fonction du second degré. N'est-ce pas une bonne occasion d'introduire la notion de différentielle *avant* celle de dérivée? Soit

la fonction du second degré $g(x) = ax^2 + bx + c$; x_0 étant une valeur arbitraire choisie de x , le changement de variable $x = x_0 + h$ permet d'écrire :

$$g(x) = g(x_0) + h(2ax_0 + b) + ah^2.$$

Il est courant d'appeler accroissement de y la quantité :

$$k = h(2ax_0 + b) + ah^2.$$

C'est une fonction du second degré de h , accroissement de x .

On reconnaît que l'application linéaire :

$$h \longrightarrow (2ax_0 + b)h$$

aura pour graphe une droite Δ_0 telle qu'elle soit *tangente* en M_0 au graphe Γ de g . « Vus à la loupe », les graphes Δ_0 et Γ sont distincts au voisinage de M_0 ; mais Δ_0 peut être considérée comme une approximation de Γ (« l'écart » étant mesuré par ah^2).

De ces considérations banales, on peut tirer les définitions : pour x_0 , il existe une application linéaire tangente à l'application g , notée dg , et appelée différentielle de g pour x_0 ; le coefficient de cette application linéaire est le nombre dérivé de g pour x_0 .

Il est évident que pour toutes les fonctions rationnelles un calcul semblable au précédent est, en principe, possible. Cela suffit à suggérer la définition générale suivante : soit l'application $f : x \in E \longrightarrow y = f(x) \in \bar{F}$; x_0 étant une valeur choisie dans E , on pose $x = x_0 + h$; il existe une application f^* (celle des accroissements) : $f^* : h \in E' \longrightarrow k = f(x_0 + h) - f(x_0)$; s'il est possible de définir une application linéaire (c'est-à-dire un coefficient $a \in \mathbf{R}$, a fini) :

$$(df)_0 : h \in E' \longrightarrow ah$$

telle que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{ah} = 1$$

alors cette application linéaire est la différentielle de f pour x_0 et son coefficient est le nombre dérivé de f pour x_0 .

On notera que h est élément d'un ensemble E' (facilement défini lorsque E l'est), sans autre restriction.

La notation classique :

$$(df)_0 : dx \longrightarrow dy = adx$$

ou encore mieux :

$$(df)_0 : dx \longrightarrow dy = f'(x_0)dx$$

a l'avantage de conduire sans difficulté à la différentielle d'une fonction de fonction.

On objectera peut-être que pour les fonctions circulaires, par exemple, le calcul est quelque peu artificiel :

$$\sin(x + h) - \sin x = \frac{2}{h} \sin \frac{h}{2} \times \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \times h$$

d'où se déduit :

$$d(\sin x) = (\cos x)dx.$$

Mais est-ce plus artificiel que le procédé classique du calcul de la dérivée ?

En revanche, pour les deux applications réciproques :

$$f : x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow y = \sin x \in [-1, +1]$$

$$\varphi : y \in [-1, +1] \longrightarrow x = \text{Arc sin } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

la différentiation permet d'écrire :

$$dx = \varphi'(y)dy = \varphi'(y) f'(x)dx,$$

ce qui permet un calcul facile de $\varphi'(y)$.

2. Les fonctions logarithmiques.

Il y a beaucoup de mathématiciens qui n'aiment pas cette définition de $\text{Log } x$ par la mesure d'une aire mixtiligne indiquée par le programme. Au niveau de matélem, cela me paraît pourtant combler une lacune : pour quoi, jusqu'ici, fallait-il (en principe) exclure le cas $n = -1$ dans le calcul des primitives de x^n ? Autre avantage encore plus important : fournir, en plus des fonctions circulaires, un autre exemple de définition d'une fonction transcendante.

L'étude des propriétés de $\text{Log } x$ à partir de cette définition est déjà classique en classe de Sciences Expérimentales. Je me sens moins à l'aise pour la limite de

$\frac{\text{Log } x}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Que penserez-vous de la présentation suivante : on note : 1) que la tangente au graphe $x \rightarrow \text{Log } x$ pour $x = e$ passe par l'origine ; 2) que ce graphe admet l'axe des x comme direction asymptotique ; 3) que la droite $y = ax$ (avec

$0 < a < \frac{1}{e}$) coupe le graphe logarithmique en deux points $1 < x_1 < \frac{1}{e}$ et

$\frac{1}{e} < x_2$; 4) par conséquent, quel que soit a ($0 < a < \frac{1}{e}$), il est possible de trouver un nombre x_2 tel que, pour $x > x_2$, $\text{Log } x < ax$. Autrement dit, aussi petit que soit a , positif, il est possible de trouver x assez grand pour que $\frac{\text{Log } x}{x} < a$; or

nous savons que $\frac{\text{Log } x}{x}$ est positif et décroissant, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log } x}{x} = 0$.

Cette justification mérite sans doute diverses critiques ; entre autres, on regrettera peut-être le rôle important accordé au graphe de la fonction logarithmique. Quant à moi, il me paraît au contraire que ce support visuel peut aider les élèves (si le texte du programme ne mentionne ce graphe qu'au 5^e alinéa du paragraphe, cela ne signifie pas qu'il faille en retarder si loin la construction).

3. Les nombres.

Nous avons l'expérience, en matélem, de la construction de $\mathbf{Z}$ et de $\mathbf{Q}$ par la méthode axiomatique ; l'obligation de reprendre pour $\mathbf{Q}$ la même méthode que pour $\mathbf{Z}$ a des vertus pédagogiques : « plus ça change et plus c'est la même chose » : $\mathbf{Z}$ est un anneau, $\mathbf{Q}$ est un corps.

C'est ici que les difficultés nouvelles commencent ; par quoi continuer : $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$?

En « normand », je proposerai le problème suivant déjà expérimenté avec les élèves :

Les lettres $a, b, c, d, \dots$ désignent des entiers relatifs. On appelle entier complexe tout couple $u = (a, b) \in \mathbf{Z}^2$ et $\mathbf{CN}$ l'ensemble des entiers complexes qui vérifient les axiomes suivants :

- (I) $(a, b) = (a', b') \iff a = a' \text{ et } b = b'$.
- (II) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
- (III) $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Les nombres $(a, 0)$ sont dits entiers complexes de 1^{re} catégorie ; les nombres $(0, b)$, entiers complexes de 2^e catégorie.

1° (I) définit une relation d'équivalence.

2° Montrer que $\mathbf{CN}$ est un groupe commutatif pour l'addition.

3° Montrer que la multiplication dans $\mathbf{CN}$ est commutative et distributive par rapport à l'addition. Quelle est la structure de $\mathbf{CN}$?

4° Montrer que tout entier complexe u a un conjugué, noté $\bar{u}$ tel que $u + \bar{u}$ et $u \times \bar{u}$ soient deux entiers complexes de 1^{re} catégorie. Vérifier que $u \times \bar{u}$ est égal au carré de la norme de u , c'est-à-dire à la somme des carrés de ses deux termes. $\|u\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

5° Montrer que le sous-ensemble des entiers complexes de 1^{re} catégorie est fermé pour l'addition et la multiplication et qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

6° Calculer les puissances successives $u^2, u^3, \dots$ d'un entier complexe u . Appliquer en particulier le calcul à $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$.

7° Trouver, s'il en existe, tous les entiers complexes vérifiant l'une des équations :

$$\begin{array}{ll} \text{(E1)} & x^2 - 3 = 0; \\ \text{(E2)} & x^2 + 4 = 0; \\ \text{(E3)} & x^2 - (1, 5)x + (-6, 2) = 0; \\ \text{(E4)} & x^2 - 4x + 5 = 0. \end{array}$$

Je ne crois donc pas que la grosse difficulté (pour le professeur) soit d'introduire les nombres complexes ; la variété des exercices possibles doit même en faire un chapitre très attrayant pour les élèves. Je me sens beaucoup plus circonspect pour les « notions sur les nombres réels », n'ayant fait qu'une seule tentative, il y a deux ans, et avec un succès partiel.

Voici quel avait été le plan suivi. La construction de $\mathbb{Q}$ ayant été acquise, l'arithmétique a été étudiée. Vient alors l'étude des rationnels décimaux, y compris les valeurs décimales approchées d'un rationnel quelconque. Un exemple classique montre l'insuffisance de ces rationnels : valeurs approchées de $\sqrt{2}$; il n'y a pas, dans $\mathbb{Q}$, de nombre x tel que $x^2 = 2$.

L'exemple des suites infinies (x_n) convergentes dans $\mathbb{Q}^+$ (ne considérer que les positifs est une simplification sans inconvénient théorique) permet de montrer que pour une telle suite, la limite, pour p et q infinis, de $|x_p - x_q|$ est zéro. Mais la réciproque n'est pas vraie : on a justement vu le cas des approximations décimales de $\sqrt{2}$.

Appelons *suite de Cauchy* toute suite infinie (x_n) de termes appartenant à $\mathbb{Q}$ et telle que :

$$\lim_{p, q = \infty} |x_p - x_q| = 0.$$

Définissons l'équivalence de deux suites de Cauchy par :

$$\lim_{n = \infty} |x_n - x'_n| = 0 ;$$

il est facile de vérifier que c'est bien une relation d'équivalence. Alors, de deux choses l'une : 1° La suite de Cauchy (x_n) converge dans $\mathbb{Q}^+$; soit x sa limite ; x est le plus petit des majorants qui appartiennent à (x_n) et le plus grand des mineurs qui appartiennent à (x_n) . 2° La suite (x_n) ne converge pas dans $\mathbb{Q}^+$; on désignera encore sa limite par x qui sera un nombre réel non rationnel, plus petit que tous ses majorants de (x_n) , plus grand que tous ses mineurs de (x_n) .

L'ensemble $\mathbb{R}$ ainsi défini contient évidemment $\mathbb{Q}$. Il reste à montrer qu'il prolonge les propriétés essentielles de $\mathbb{Q}$, corps commutatif totalement ordonné et partout dense.

Il est immédiatement visible qu'un des inconvénients pédagogiques majeurs de l'exposé est sa longueur. Il ne faut pas lasser l'auditoire qui comporte, à côté de jeunes esprits qui aspirent à la rigueur et à l'abstraction, des élèves surtout soucieux d'utiliser correctement les mathématiques dans les applications. Il serait donc opportun de mener ces considérations théoriques de front avec de nombreux exercices de calcul numérique (par exemple, valeurs approchées de sommes de séries numériques convergentes, la convergence étant affirmée sans démonstration ; calcul de e , de π , ...); l'emploi des machines à calculer, de la règle, des tables de valeurs

numériques, ou la construction de telles tables (par équipes), peut aider certains élèves à mieux comprendre l'intérêt pratique de cette étude.

Mais, comme je l'ai déjà dit, je n'ai qu'une courte et très partielle expérience. Si je la livre ici, c'est dans l'espoir de susciter d'abondantes critiques.

G. W.

Sur la limite de $\frac{\text{Log } x}{x}$.

Voilà plus simple qui m'est communiqué par notre Collègue Itard ; la notion d'aire mixtiligne rend évidente la proposition suivante : si, pour tout x supérieur à a : $f(x) > g(x) > 0$, alors

$$\int_a^x f(t) dt > \int_a^x g(t) dt.$$

Or $\forall x > 1$, $\frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{x} > 0$, donc $\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} > \text{Log } x$; soit $2(\sqrt{x} - 1) > \text{Log } x$

et finalement $\frac{\text{Log } x}{x} < 2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right)$; le second membre a pour limite zéro lorsque x tend vers l'infini.

Remarque : l'application réitérée de la même méthode à $0 < \sin x < 1$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$ donne la suite de relations d'ordre

$$1 - x < \cos x < 1 ; x - \frac{x^2}{2} < \sin x < x ; 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} ; \text{etc...}$$

LA NOTATION DES QUANTIFICATEURS

Le premier à faire explicitement usage de quantificateurs fut Frege, professeur de Mathématiques à l'Université de Iéna, en 1879, dans *Begriffsschrift* (traduction libre : notation des concepts).

Mais l'école polonaise a montré que déjà Aristote en avait une idée claire (1).

La notation de Frege était très lourde. En 1894, dans ses *Notations de logique mathématique*, Peano introduisit les symboles (...) et ($\exists$...), repris par Russel dans les *Principia mathematica* en 1910.

L'introduction de $\forall$ (...) pour le quantificateur universel semble due à Hilbert.

Notations actuelles.

La notation de Russel est implantée chez les Anglo-saxons.

Mais il s'est introduit et imposé en Allemagne une nouvelle notation :

Λ ou Λx pour le quantificateur universel,

$\mathbf{V}$ ou $\mathbf{V} x$ pour le quantificateur existentiel.

(1) L'école polonaise a montré qu'il ne faut pas réduire à la syllogistique l'œuvre d'Aristote ; l'essentiel dans son œuvre est la découverte que la validité d'un raisonnement doit être établie formellement, sans référence au contenu ; Aristote est le premier à utiliser des variables pour désigner des objets (au sens large de la logistique) ; c'est en cela qu'il a devancé génialement son temps de quelque 20 siècles.

Cette notation a été introduite pour souligner les rapports de la quantification universelle et de la conjonction notée $\wedge$ d'une part, et ceux de la quantification existentielle et de l'alternation notée $\vee$, d'autre part.

Dans un domaine fini d'éléments $a, b, \dots, h$, on a :

$$\wedge x \equiv a \wedge b \wedge \dots \wedge h.$$

Le quantificateur universel est distributif pour la conjonction :

$$\wedge x (f(x) \wedge g(x)) \equiv \wedge x f(x) \wedge \wedge x g(x).$$

Formules, analogues, duales, pour $\vee$ et $\vee$.

Et les quantificateurs suivent les mêmes règles de dualisation que $\wedge$ et $\vee$; on n'en fait pas assez usage ; ni de ce que la dualisation s'opère ou bien par remplacement de $\wedge$ par $\vee$ et de $\vee$ par $\wedge$, ou bien par négation de l'expression à dualiser et de toutes ses composantes élémentaires. En tenant compte de ce que $D[D(A)] \equiv A$, on obtient par dualisations successives les formules classiques :

$$\begin{array}{l|l} p \wedge q \equiv \neg (\neg p \vee \neg q) & p \vee q \equiv \neg (\neg p \wedge \neg q) \\ \wedge x f(x) \equiv \neg \vee x \neg f(x) & \vee x f(x) \equiv \neg \wedge x \neg f(x). \end{array}$$

Les deux colonnes sont duales. On voit vraiment ici combien la notation fait apparaître les analogies de structure. C'est encore plus utile dans des formules plus complexes.

Tout ce qui précède suppose évidemment la notation $\wedge$ pour la conjonction. La notation anglo-saxonne ne s'est pas unifiée : c'est le $\&$ des typographes ou un point, le plus souvent omis. Mais le couplage $\wedge, \vee$ a des avantages certains du point de vue logique pur. Il s'y ajoute, ce qui nous paraît important, que l'analogie avec les symboles $\cap$ et $\cup$ de l'algèbre des ensembles présente l'intérêt de rappeler l'isomorphie de la logique propositionnelle et des treillis distributifs. (Un cours de logique pour mathématiciens peut débiter par l'étude de cette isomorphie).

Le système de notation $\wedge \vee \wedge \vee$ a plus d'unité et beaucoup d'avantages. Il suffit de s'y habituer pour le préférer aux autres systèmes. Et, parmi les avantages, il y a des avantages didactiques évidents.

Aussi, au moment où les quantificateurs sont officiellement introduits dans l'enseignement secondaire par le nouveau programme de Mathématiques, nous nous demandons si le moment n'est pas venu d'adopter $\wedge$ et $\vee$ au lieu de $\forall(\dots)$ et $\exists(\dots)$.

De plus, il serait opportun de se détacher des attaches linguistiques particulières de $\forall$ (Allsatz) et $\exists$ (existence). $\wedge$ et $\vee$ deviendront à coup sûr d'usage international.

Le changement de symbolisme sera beaucoup plus difficile dans quelques années lorsqu'un nombre important d'ouvrages auront été composés.

G. LECONTOUR.

UNE NOUVELLE FORMULE DE BACCALAUREAT

la corrélation non linéaire

N.D.L.R. — *En publiant les dates des congés scolaires en 1962-63, le Ministère a précisé que la date des grandes vacances dépendrait de la future organisation du baccalauréat. On sait que celle-ci est réformable. Il nous paraît donc intéressant de publier l'étude de notre Collège Constantin.*

Question préalable.

Le bachot a perdu une bonne partie de son prestige. Des professeurs de l'Enseignement Supérieur, des chefs d'entreprise sont parfois déçus par les bacheliers qu'ils instruisent ou qu'ils emploient. Administrations publiques ou entreprises privées ne se contentent plus des diplômes scolaires et font subir aux candidats à un emploi des examens et tests divers dont elles se réservent d'apprécier les résultats. Des parents d'élèves, espérant peut-être une plus grande indulgence pour leurs enfants, proposent que le baccalauréat soit attribué d'après les seuls résultats scolaires. Des professeurs du secondaire adoptent cette formule, pensant y gagner un surcroît d'autorité et la disparition de leur tâche de correcteur. D'autres proposent même la suppression pure et simple du bachot.

Et pourtant, qui ne voit les inconvénients de cette démission ? Supprimer le baccalauréat ? Quel aveu de faillite et d'impuissance ! Le donner d'après les résultats scolaires ? Quel danger de surenchère entre les établissements et quelle prime aux « boîtes à bachot » !

Certes, le baccalauréat ne retrouvera son prestige que lorsque l'Enseignement Secondaire, rajeuni, aura lui aussi épousé son siècle. Cependant, certaines réformes récentes permettent de penser que nous sommes déjà sur la bonne voie et même dans la situation actuelle nous estimons que le baccalauréat peut au moins être rendu plus juste et que ce résultat peut être obtenu par un moyen extrêmement simple.

Ce qui est valable dans la session unique.

Malgré tout le soin avec lequel sont rédigés les sujets d'épreuves, malgré le partage en questions indépendantes, un candidat peut être défavorisé par tel sujet alors que tel autre l'eût avantagé et chacun sait que dans une même classe et pour une même discipline, les classements des trois compositions trimestrielles sont différents ; de même les examinateurs sont souvent frappés par les discordances entre les résultats de l'écrit, ceux de l'oral et les indications du livret scolaire. En outre, de l'autre côté de la barrière, il y a des examinateurs sévères et d'autres qui sont indulgents même parmi les plus soucieux de rester dans une juste moyenne. Pour peu que les écarts dus à ces deux causes soient de même sens dans deux ou trois épreuves, une injustice apparaît.

Cependant, dans la moyenne des notes de cinq candidats, à moins d'un hasard imaginable, les écarts dus à l'affinité plus ou moins grande des candidats et du sujet se compensent en très grande partie. Allons plus loin et faisons corriger les cinq copies par cinq correcteurs différents. Alors les écarts dus à l'inégalité de sévérité des correcteurs disparaissent à leur tour. Nous verrons plus loin comment utiliser cette propriété de la moyenne.

Ce qui est valable dans les résultats scolaires.

Nous l'avons déjà dit, accorder une confiance totale aux notes et appréciations des livrets scolaires serait une prime à la démagogie. Cependant, le classement général des élèves d'une même classe, établi en fonction des notes de trois compositions, des travaux surveillés, des notes de leçons, des interrogations écrites et des coefficients du baccalauréat est certainement un élément digne de foi même s'il

provient de notes données par des professeurs trop sévères ou trop indulgents. Seules la partialité ou l'incompétence pourraient le fausser. On nous accordera que l'une et l'autre sont exceptionnelles.

Il ne reste plus maintenant qu'à faire la synthèse des deux éléments valables que nous avons reconnus.

La corrélation non linéaire.

Dès que le service du baccalauréat est en possession des rangs scolaires et des totaux individuels, il établit la corrélation non linéaire qui existe entre ces deux éléments. A cet effet, il établit pour chaque classe un graphique où chaque candidat est représenté par un point ayant pour abscisse son rang scolaire et pour ordonnée son total de points. On obtient ainsi une constellation de points dont on trace la « courbe des moyennes » (Monjallon, *Introduction à la méthode statistique*, p. 171). Disons, pour les non initiés, que cette courbe passe par les centres de gravité des groupes de points (ici groupes de cinq points) obtenus en partageant la constellation par des verticales.

Appelons « total compensé » l'ordonnée du point de la courbe situé sur la verticale d'un candidat. Le total compensé diffère peu de la moyenne des totaux qu'obtiendrait le candidat s'il se présentait un grand nombre de fois avec des épreuves différentes et des correcteurs différents. Il représente donc une mesure acceptable de la valeur du candidat.

On voit que la méthode est apparentée à celle qu'a proposée notre collègue philosophe M. Vernes. Elle a des avantages communs avec la sienne et d'autres qui lui sont propres.

Avantages.

1° Le total compensé variant en sens contraire du rang, les résultats ne peuvent contredire le classement scolaire : au-dessus d'un certain rang, tous les élèves sont reçus et, au-dessous, tous sont refusés.

2° Un bon élève est assuré contre une défaillance même grave.

3° Un mauvais candidat qui aurait réussi à frauder ne reçoit pas le salaire de ses efforts coupables.

4° Le comportement des candidats à l'oral entre en compte, modestement il est vrai, par le fait que les notes orales de l'année scolaires contribuent à déterminer le classement.

5° Chaque élève travaille non seulement pour lui mais aussi pour ses camarades puisque ses bonnes notes au baccalauréat contribuent à relever la courbe des moyennes. On peut espérer qu'il en résultera un heureux esprit d'équipe.

6° Le regroupement des résultats par classe permet (enfin !) d'informer les chefs d'établissements des résultats obtenus par leurs élèves.

7° La suppression des oraux de contrôle et des délibérations de jurys permet aux professeurs d'assurer leur service dans les classes où l'on ne passe pas le baccalauréat.

8° Cette même suppression permet de retarder de quelques jours la date des épreuves écrites et d'allonger d'autant la durée effective de l'année scolaire.

9° Qu'un grand nombre de candidats et leurs parents sachent que le résultat du baccalauréat dépend d'une « corrélation » est le meilleur moyen de diffuser et de populariser une technique utile et méconnue.

Variante.

Voir le résultat d'un examen dépendre non seulement des points obtenus par un candidat mais aussi des points obtenus par ses camarades est une nouveauté qui pourra choquer certains juristes pointilleux. Si elle est jugée trop hardie, on pourrait soumettre à un oral de contrôle les candidats qui auraient à la fois un total personnel suffisant et un total compensé insuffisant.

Le nombre de ces cas ne doit guère dépasser 2 ou 3 % du nombre de candidats. On pourrait encore déclarer admis ces candidats.

Cas particuliers.

Les isolés subissent un oral de contrôle.

Le cas des *ex-aequo* ne fait pas obstacle à l'application de la méthode.

Les établissements (s'il s'en trouve) dans lesquels les Sections ont des effectifs inférieurs à 30 sont invités à grouper ces sections. Dans ce cas, la corrélation joue non pas sur les totaux individuels mais sur les moyennes individuelles.

Les candidats dispensés d'éducation physique se voient attribuer la note de 10/20.

Le cas des candidats absents ne modifie pas le déroulement des opérations et n'oblige pas à faire de nouveaux bordereaux.

Le coût du système.

Le langage un peu technique que nous avons dû employer pourrait laisser croire aux profanes que les « courbes des moyennes » ne peuvent être établies qu'à la suite d'un long travail confié à des spécialistes. Certes, la démonstration de leurs propriétés est assez savante, mais leur établissement et leur utilisation peuvent être entrepris par quiconque sait faire une addition et a reçu cinq minutes d'explications.

En pratique, il n'est même pas nécessaire de tracer les points figurant les candidats (nous n'en avons parlé que pour nous faire mieux comprendre) et le tracé d'une courbe demande environ deux minutes, c'est-à-dire le temps de faire (sans machines) 6 à 8 additions de 5 nombres, de marquer les points figuratifs correspondants et de les joindre.

Pour le Service du bac, les divers travaux supplémentaires demandent deux minutes par candidat (voir annexe). Dans une académie où se présentent 60 000 candidats, il y aurait donc 2 000 heures de travail supplémentaires, soit moins de trois jours pour 100 étudiants qui auraient envie de gagner un peu d'argent de poche.

Guy CONSTANTIN,

Professeur au Lycée de Garçons de Reims.

Annexe

Détail des opérations. Durée du travail supplémentaire.

Les numéros des candidats sont composés par les établissements de la manière suivante : les 3 premiers chiffres indiquent l'établissement, le 4^e indique la section, le 5^e indique le n^o de la Section dans l'établissement et les deux derniers indiquent le rang de l'élève dans sa classe. Certes, les deux derniers chiffres ne sont connus que dans les derniers jours, mais le Service du bac peut fort bien s'en passer ; il lui suffit de classer les dossiers par ordre alphabétique dans chaque classe.

Les établissements rédigent directement sur le bordereau-graphique la liste des candidats par ordre de mérite.

Chaque copie porte l'identité, la signature et le n^o du candidat cachés par un onglet plié et collé. En outre, le n^o est reproduit dans l'angle supérieur gauche. Il sera caché en temps opportun. En attendant, il facilite le recensement des copies.

Analysons la tâche d'un Service du baccalauréat à partir du moment où il reçoit les copies non corrigées. Elle comprend des éléments anciens, notés A, et des éléments nouveaux, notés N, dont nous allons évaluer les durées N₁, N₂, N₃...

1^o Regrouper les copies par matière dans l'ordre croissant des numéros (A).

2^o Partager les copies en groupes d'environ 600. Tâche équivalente à l'ancien partage en groupes de 120. Travail supplémentaire nul.

3^o Partager chaque groupe de 600 en 5 paquets destinés à 5 correcteurs. Pour cela, afin d'assurer un bon brassage et de faciliter le regroupement ultérieur, on

procède comme si l'on distribuait les cartes à des joueurs de bridge (N). Durée : 1 s par copie, soit 7 à 8 s par candidat. $N_1 = 8$ s.

4° Cacher les numéros des candidats au moyen de vignettes collantes inarrachables portant des n° de 1 à 150 (environ) dans chaque paquet de copies destinées à un même correcteur, opération de même durée que le collage des anciens numéros dits d'anonymat. Temps supplémentaire nul.

5° Distribuer ou envoyer les copies aux correcteurs (A) et joindre à chaque paquet une note recommandant de laisser les copies dans l'ordre où elles se trouvent.

6° Recevoir les copies corrigées et les regrouper par classes en faisant l'opération inverse du 3° : $N_2 = 8$ s par candidat.

7° Décacher les onglets (N). Opération plus longue que l'ancien arrachage de la partie détachable. Durée supplémentaire : 2 s par copie, soit $N_3 = 16$ s par candidat.

8° Incrire les notes sur les bordereaux (N). Durée : 3 s par copie, soit $N_4 = 24$ s.

9° Additionner les 7 ou 8 notes de chaque candidat. Durée : 15 s par candidat, mais la nécessité d'un contrôle nous amène à compter $N_5 = 30$ s.

10° Etablir la courbe des moyennes (N). Durée : 2 minutes par classe de 40 élèves. Soit $N_6 = 3$ s par candidat.

11° Rédiger les « collantes ». $N_7 = 15$ s.

Total des temps supplémentaires :

$$8 + 8 + 16 + 24 + 30 + 3 + 15 = 104 \text{ s.}$$

En y ajoutant les temps morts inévitables, on atteint environ 2 minutes par candidat.

PROBLEMES CURIEUX ET PROPOS DELECTABLES

« La vie de ceux qui œuvrent selon vertu
est selon soi délectable. »

ORESME.

● Un Collègue signale que le *Bulletin* n° 215 a publié, parmi les problèmes proposés aux Olympiades de Moscou, un énoncé dont il serait bien curieux de connaître une solution. Rappelons cet énoncé : « Les nombres 1, 2, 3, ..., 100, 101 (en tout 101 nombres entiers) sont rangés dans un ordre quelconque inconnu. Montrer qu'on peut en rayer 90 de telle sorte que les onze restant soient rangés soit dans l'ordre croissant, soit dans l'ordre décroissant (Moscou, 1950 ; 9° et 10° classe). »

Le *Bulletin* se fera un plaisir de publier les solutions.

● Dans le plan euclidien, on considère un ensemble de n points distincts. On appelle *diamètre* de cet ensemble la plus grande des distances de toutes les paires de points de l'ensemble. Montrer que le nombre maximum de distances de paires de points égales à ce diamètre est $(2n - 3)$.

Cet énoncé nous est soumis par le Professeur Straszewicz (de Varsovie) ; mais là aussi, le *Bulletin* publiera avec intérêt les solutions qui lui parviendront.

● Un Collègue nous écrit : « La Rédaction a eu l'excellente idée de présenter à la veille des vacances 46 exercices et problèmes en Mathématiques "modernes". Il ne fait pas de doute que plusieurs d'entre nous se seront agréablement distraits en recherchant la solution. Il faudrait donc qu'un très prochain *Bulletin* en publiât le corrigé. »

Nous soumettons la proposition à M. Huisman et nous attendons de tous les amateurs des solutions élégantes... et d'autres énoncés.

EXTRAIT DE L'ANNUAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES POUR L'AN 1963

à l'usage de l'Enseignement secondaire
Spécialement destiné aux élèves des lycées, collèges, écoles normales, etc...
Calendrier et éphémérides pour 1963

In-8° (13 × 19), 48 pages 3 NF

Cahiers Scientifiques, fasc. XXVII

ALGÈBRE GÉOMÉTRIQUE

par E. ARTIN

Professeur à l'Université de Princeton
traduit par M. LAZARD

Le présent livre est un modèle de la présentation combinée de l'algèbre et de la géométrie. Il est incontestablement de la plus haute valeur éducative et de la plus grande utilité dans la recherche. L'auteur est guidé, en effet, par deux soucis : un souci de rigueur abstraite qui conviendra toujours à tout exposé d'algèbre ; un souci d'éveiller des images géométriques comme illustration et application des théorèmes algébriques étudiés.

In-8° (16 × 25), 214 pages, 1962 40 NF

Mémoire des Sciences Mathématiques, fasc. 151

FONCTIONS ABÉLIENNES ET FONCTIONS THÊTA DE DEUX VARIABLES

par C.-E. TRAYNARD

In-8° (16 × 25), 53 pages, 1962 10 NF

Mémoire des Sciences Mathématiques, fasc. 152

LES PRINCIPES DE L'ANALYSE DIMENSIONNELLE

Invariance des relations vectorielles dans certains groupes d'affinités

par R. SAINT-GUILHEM

In-8° (16 × 25), 79 pages, 9 figures, 1962 16 NF

LA LOGIQUE APPLIQUÉE

par G. BEVILLE

La logique appliquée est une méthode de réflexion rationnelle qui permet de mieux comprendre pour mieux agir.

De nombreux exemples empruntés à tous les domaines, appuyés de graphiques, mettent cette méthode à la disposition de l'honnête homme aussi bien que du spécialiste, pour résoudre les problèmes qui se posent dans la vie professionnelle et privée.

In-8° (16 × 24), 172 pages, 1962 20 NF

Collection « Information et Cybernétique »

LA CYBERNÉTIQUE DES ÊTRES VIVANTS

par D. et K. STANLEY JONES

traduit de l'anglais par M.-G. RICHARD

L'ouvrage de M. Stanley Jones sur la Cybernétique des Êtres Vivants apporte une contribution très importante à l'explication de nombreux phénomènes de comportement de l'être vivant, tant psychologiques que somatiques, au moyen du phénomène de feed-back.

In-8° (16 × 24), 126 pages, 1962 18 NF

GAUTHIER-VILLARS Éditeur PARIS

NOUVEAUTÉ,

Vient de paraître :

**ÉLÉMENTS
DE
CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
INTÉGRAL**

par

GRANVILLE, SMITH et LONGLEY



NOUVELLE EDITION
traduite de l'américain

par

P. COMMENY

Professeur honoraire au lycée de Meknès



Volume 16 × 24 cm, de 680 pages

Relié toile **54 NF**

Broché **50 NF**



Une mise au point de l'édition française de ce livre était devenue indispensable : le professeur W. R. LONGLEY avait constamment amélioré l'édition américaine en élargissant le champ des exercices et des problèmes grâce à l'introduction des coordonnées cylindriques et sphériques et des fonctions hyperboliques

P. COMMENY en a donné une traduction exacte qui rendra, nous en sommes certains, de grands services aux étudiants et aux futurs ingénieurs

VUIBERT

63, Bd SAINT-GERMAIN, 63, PARIS V°

MATERIAUX POUR UN DICTIONNAIRE

« S'il y a quelque ouvrage qui demande d'être exécuté par une compagnie, c'est le dictionnaire d'une langue vivante ; comme il doit donner l'explication des sens différents des mots qui sont en usage, il faut que ceux qui entreprennent d'y travailler aient une multitude de connaissances qu'il est comme impossible de trouver rassemblées dans une même personne. »

Préface
au Dictionnaire de l'Académie Française
(1740).

Sous la vigoureuse impulsion de son Secrétaire, notre Collègue Chastenet de Géry, la commission du dictionnaire, qui n'avait pu jusqu'ici trouver son rythme, a pris un nouveau départ très prometteur. Voici sa méthode de travail : les membres de la commission se sont répartis des mots à définir ; chacun a soumis sa première rédaction à la critique d'un collègue ; après quoi la seconde rédaction, ronéotypée, a été soumise à l'ensemble de la commission. Une discussion en séance plénière (c'était le 14 juin, de 14 h. 30 à 17 h. 30 !) a été fort animée, fort instructive et très cordiale ; elle a permis de mettre au point neuf notices qui sont maintenant soumises à l'appréciation et à la critique de tous.

Car il faut insister sur ce point : la commission n'a pas voulu présenter un credo ; elle a surtout eu le souci d'expliquer les usages les plus fréquents sans pour autant négliger l'appréciation de ce qui lui paraît le plus souhaitable. En tout cas, les rédacteurs ne souhaitent rien tant que la critique et la commission, comme jadis l'agriculture, manque de bras : les lecteurs sont invités à adresser leurs avis, critiques et suggestions au secrétaire de la commission, Chastenet de Géry, 4, rue des Capucins, Meudon-Bellevue (Seine-et-Oise). Ils peuvent contribuer au travail en envoyant aussi des projets de notices. La Rédaction du Bulletin espère bien que la rubrique du dictionnaire sera abondante dans tous les numéros (elle a d'ailleurs en réserve plusieurs articles et prie leurs auteurs d'excuser le retard de publication).

C'est après la discussion de toutes les critiques ainsi publiquement recueillies, après la poursuite de ce travail pour un plus grand nombre de mots, qu'il sera envisagé de réunir les notices « définitives » dans une brochure de l'A.P.M. Notre association réserve évidemment tous ses droits relativement à ce travail de longue haleine.

Les notices présentées ci-dessous le sont donc au nom de la commission ; elles sont toutefois suivies des initiales du rédacteur principal (Ch. de G. signifie, évidemment, Chastenet de Géry ; de même J. C. : J. Chevallier ; A. R. : A. Revuz). Pour chaque notice le plan est le suivant : I donne l'acception du langage courant (si cela a paru nécessaire) ; II donne le ou les significations en Mathématiques. Dans I et II, s'il y a plusieurs acceptions, elles sont numérotées : 1, 2, 3, etc... et même 1 a), b)... dans certains cas. Pour faciliter la recherche, tout le numérotage est imprimé en gras. ex. signifie exemple ; les autres abréviations sont d'usage courant : n. f. = nom féminin.

APPLICABLE, adj. : voir *isométrique*.

APPLICATION, n. f.

I. Langage courant : — 1) Action de placer une chose tout contre une autre, le plus exactement possible ; *ex.* : application d'un calque sur un dessin, application du segment AB sur le segment A'B'. — 2) S'emploie aussi au figuré, un des objets (ou les deux) pouvant être abstrait : — a) utilisation d'une force ou d'une faculté pour une tâche qui la requiert intégralement ; *ex.* : application de l'esprit à l'étude d'un texte ; le mot est aussi employé absolument dans le sens : attention avec effort soutenu ; *ex.* : cet élève travaille avec application ; — b) emploi d'une loi, d'un résultat général, ou d'une méthode, dans un cas d'espèce particulier ; *ex.* : application de l'algèbre à un problème de géométrie, application du théorème de Pythagore au triangle ABC ; le mot indique souvent alors le passage d'un niveau d'abstraction au niveau inférieur ou au concret.

II. Mathématiques : Correspondance (voir ce mot) entre les éléments d'un ensemble A, dit *ensemble de définition* (ou de départ) de l'application et les éléments d'un ensemble B, dit *ensemble d'arrivée* (ou final) de l'application, telle que pour tout élément de A il existe un élément de B et *un seul* qui lui corresponde. Si l'application est notée f , l'élément correspondant à $x \in A$ est noté $f(x)$, ou parfois f_x , et est appelé *valeur* de l'application f pour l'élément x , ou au point x . L'ensemble des objets $f(x)$ pour tout $x \in E \subset A$ est appelé l'*image* de E par f et noté parfois $f(E)$ (il vaut mieux éviter la notation impropre $f(E)$ qui peut être source d'erreurs) ; on peut aussi considérer l'application, soit f^+ , de l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des parties de A dans l'ensemble $\mathcal{P}(B)$, telle que $f^+(E) = f(E)$.

L'image par f de l'ensemble de départ de f s'appelle ensemble des valeurs de f ; c'est *a priori* une partie de B et l'on dit pour cette raison que f applique (ou envoie) A dans B. Si l'ensemble des valeurs est l'ensemble B lui-même, on précise en disant que f applique A sur B, ou que f est une application *surjective*, ou que c'est une *surjection*. Dans le cas où $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ on dit que f est une application *injective*, ou que c'est une *injection* (unijetive et unijection seraient préférables comme dans : univoque, univalent). Enfin, une application à la fois surjective et injective est dite *bijetive*, ou appelée une *bijection* ; c'est alors une correspondance biunivoque entre l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée.

La notion d'application généralise et précise la notion traditionnelle de fonction (voir ce mot) ; le mot application dérive tout naturellement du verbe appliquer, mais il prête assez fâcheusement à confusion avec le sens (I, 2, b) précédent ; *ex.* : étudier les applications numériques de la question.

[*Commentaire* : Pour éviter la confusion qui vient d'être signalée, on pourrait peut-être remplacer le mot application dans le sens II, soit par le mot « opérateur » qui est déjà utilisé assez souvent dans ce sens, par exemple dans l'expression « opérateur linéaire », soit par le mot « appliqueur » (ou applicateur), ce qui pourrait entraîner : surjecteur, unijeteur, bijeteur. On mettrait ainsi encore plus l'accent sur l'agent, sans confusion possible avec le résultat (voir : projection, projecteur)].

APPLIQUER, v. tr., 1^{er} groupe.

Effectuer une application (dans tous les sens de ce mot) ; en particulier les *Mathématiques appliquées* (sens I, 2, b) sont celles qui sont présentées sous une forme propre à leur utilisation pour le calcul numérique, la physique ou d'autres sciences (Ch. de G.).

BASE, n. f.

I. Langage courant : — 1) *Général* : ce sur quoi repose un objet, frontière inférieure d'un corps ; *ex.* : base d'une pyramide. Par extension, s'emploie aussi pour

désigner certains côtés d'un polygone, certaines facettes d'un polyèdre ; *ex.* : les bases d'un trapèze. — 2) *Figuré* : partie fondamentale, primitive, initiale ou indispensable d'une doctrine, d'une théorie, d'une organisation ; *ex.* : l'observation est la base de toutes les sciences.

II. Mathématique : — 1) *Cinématique* : dans le mouvement plan sur plan, courbe du plan fixe sur laquelle roule sans glisser une courbe du plan mobile appelée « roulante ». — 2) *Arithmétique* : a) Nombre de chiffres distincts utilisés dans un système de numération de position. Plus précisément, si b est un entier plus grand que 1, tout entier positif ou nul peut s'exprimer, et d'une seule façon, sous forme d'une combinaison linéaire de puissances entières positives ou nulles de b , dont les coefficients appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, \dots, b-1\}$; la numération de position de base b représente chaque entier positif par la suite de ces coefficients dans l'ordre décroissant des puissances correspondantes de b et en commençant par le coefficient de la puissance la plus élevée qui a un coefficient non-nul. On peut alors éviter de marquer par un signe la séparation entre les éléments de la suite en utilisant pour chacun des nombres $0, 1, \dots, b-1$ un symbole original ou « chiffre » ; *ex.* : le système décimal est un système de base dix, les dix nombres de base sont représentés, dans l'ordre croissant, par les chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le nombre $1+1$ est représenté par 2, le nombre $9+1$ est représenté par 10. — b) Premier terme d'une progression, arithmétique ou géométrique. — 3) *Analyse classique* : exponentielle de base a , c'est la fonction : $x \rightarrow a^x$; logarithme de base a , c'est la fonction inverse de la précédente : $x \rightarrow \log_a(x)$. — 4) *Algèbre linéaire* : a) Partie e d'un espace vectoriel E telle que tout vecteur de E puisse se mettre d'une façon et d'une seule sous forme d'une combinaison linéaire (finie) d'éléments de e à coefficients dans le corps K des scalaires. C'est à la fois une partie libre et un sous-ensemble générateur (« système de générateurs ») de E . Cette notion peut s'étendre, *mutatis mutandis*, aux modules unitaires libres. On montre que tout espace vectoriel possède au moins une base ; *ex.* : dans l'espace K^n sur le corps K , il existe une base naturelle, ensemble des n éléments de K^n dont une des n composantes (ou projection) est égale à 1 et dont toutes les autres sont nulles. — b) Famille f d'éléments de E , indexée injectivement par un ensemble $\mathcal{I}$, telle que l'ensemble des valeurs de la famille soit une base e au sens précédent. Il lui correspond donc canoniquement une bijection de $\mathcal{I}$ sur e ; *ex.* : dans K^n on a encore une base naturelle en ce sens en prenant pour $\mathcal{I}$ l'ensemble des n premiers entiers positifs, le vecteur de base d'indice j étant celui dont la j -ième composante est 1, les autres étant toutes nulles. — c) Dans le cas d'un espace vectoriel de dimension finie n , isomorphisme S de K^n sur E ; l'ensemble des images d'une base de K^n par S est alors une base de E au sens a) ; on appelle ici vecteurs de base de S les images par S des vecteurs de la base naturelle de K^n . Cette notion, bien commode dans certains cas (cf. Souriau : *Calcul linéaire*), peut être rattachée à l'acception précédente en prenant comme ensemble $\mathcal{I}$ des indices la base naturelle de K^n au sens a) et en prolongeant toute injection f de $\mathcal{I}$ dans E par l'isomorphisme S , de K^n sur E , qui lui correspond. L'isomorphisme inverse (ou réciproque) de E sur K^n est alors appelé la *cobase* correspondante ; si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les n coordonnées du vecteur V dans la base S , on a $V = S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) = S^{-1}(V)$. — 5) *Topologie* : a) Un ensemble $\mathcal{A}$ de parties d'un espace topologique E est une base de la topologie de E si tout ouvert est une réunion d'éléments de $\mathcal{A}$; *ex.* : l'ensemble des intervalles ouverts bornés est une base de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. — 6) Un ensemble $\mathcal{B}(x)$ de voisinages d'un point x d'un espace topologique E est une base des voisinages de x si tout voisinage de x contient un élément de $\mathcal{B}(x)$. Alors l'ensemble des voisinages de x est l'ensemble des parties de E qui contiennent un élément de $\mathcal{B}(x)$; *ex.* : dans $\mathbb{R}$, tout point x possède une base de voisinages formée des intervalles ouverts de centre x et de longueur $\frac{1}{n}$ (pour n entier positif).

On utilise encore le mot base dans toutes sortes de structures algébriques et topologiques : affines, projectives, filtres, préhilbertiennes, il s'agit le plus souvent d'un ensemble B tel que l'on puisse reconstituer l'espace considéré par certaines opérations sur B (ensemble générateur), et parfois, en outre, tel qu'il soit minimal à ce point de vue, c'est-à-dire tel que l'on ne puisse reconstituer l'espace, par les mêmes opérations, avec tout ensemble A *strictement* inclus dans B ($A \subset B$, $A \neq B$). (Ch. de G.).

CLASSE, n. f.

a) Employé le plus fréquemment en Mathématiques dans l'expression « classe d'équivalence » qui désigne un des éléments d'une partition $\mathcal{P}$ d'un ensemble E, c'est-à-dire d'une famille $\mathcal{P}$ de parties non vides de E vérifiant

$$\bigcup A; A \in \mathcal{P} = E$$

et

$$A \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{P}, A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset.$$

A toute partition correspond sur E une relation R réflexive, symétrique et transitive, dite relation d'équivalence définie par

$$x R y \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{P} \ x \in A \ y \in A.$$

Réciproquement, à une telle relation R correspond une partition dont les éléments sont les « classes d'équivalence » définies par

$$x = \{ y; x R y \}.$$

Une partition n'est autre que le résultat d'un partage de E en sous-ensembles non vides deux à deux disjoints : la notion de classe d'équivalence précise donc l'idée exprimée dans la plupart des emplois habituels du mot classe : classe sociale, classe hiérarchique, classe de recrutement, classe d'une école (en tant qu'ensemble d'élèves), classe des classifications des Sciences Naturelles. — b) Un autre emploi se rencontre dans certaines théories des ensembles, où la classe est la notion primitive correspondant à l'idée de collection générale, et où les ensembles seraient des classes particulières soumises aux axiomes restrictifs de la théorie des ensembles envisagée. Tout ensemble est une classe, la réciproque est fautive : la classe de tous les nombres cardinaux, la classe des nombres ordinaux transfinis, la classe des structures de groupes ne sont pas des ensembles. — c) Dans la théorie des courbes algébriques planes sur le corps des complexes, la classe d'une courbe est le nombre (convenablement décompté) des tangentes qu'on peut lui mener d'un point arbitraire du plan. Ce nombre est indépendant du point et est lié à l'ordre et aux « singularités » de la courbe (Plücker) (A. R.).

COMPLEMENTAIRE, adj.

I. *Langage courant* : qualifie un élément susceptible de compléter un ensemble, une théorie, et qui était donc considéré comme manquant dans la situation initiale ; ex. : un versement complémentaire, une information complémentaire.

II. *Mathématiques* : deux usages en accord avec l'idée précédente : 1) L'angle saillant A est complémentaire de l'angle saillant B si leur somme vaut un droit ; la relation est symétrique, aussi peut-on dire : A et B sont complémentaires ; on dit aussi que A est le complément de B ; plus généralement, deux angles orientés sont complémentaires, si leurs mesures en radians, α et β , vérifient $\alpha + \beta \equiv \frac{\pi}{2}$ (modulo π ou 2π suivant les cas). — 2) A étant une partie d'un ensemble E, le complémentaire de A par rapport à E est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas éléments de A. Symboles : $\complement_E A$, $E - A$, $(A, A^c, A', \bar{A}, A^-, \text{etc.})$. Ce complémentaire est caractérisé par les égalités :

$$A \cup \complement_E A = E \quad A \cap \complement_E A = \emptyset.$$

Plus généralement, sur un treillis T , dont les lois sont notées $\vee$ et $\wedge$, possédant un plus grand élément I et un plus petit élément 0 , un élément a' est dit complémentaire d'un élément a si :

$$a \vee a' = I \quad a \wedge a' = 0.$$

Il peut n'exister aucun complémentaire de a , il peut en exister plusieurs. Si tout élément a possède un complémentaire unique, le treillis est dit complémenté ; *ex.* : $\mathcal{P}(E)$; a' est alors aussi appelé complément de a . (A. R.).

COORDONNEES, n. f. pl. (le singulier est usité, mais sous-entend toujours la pluralité inhérente à cette notion).

1) Soit E un espace vectoriel sur un corps K , et S une base de E formée de vecteurs e_i ; tout vecteur x de E peut être mis de façon unique sous la forme $\sum x^i e_i$, les x^i appartenant à K ; ces x^i sont les coordonnées du vecteur x relativement à S . — 2) De cette définition, on passe aisément à celle des coordonnées d'un vecteur libre ou d'un point dans l'espace affine ; c'est sous cette forme que la notion s'est introduite en Mathématiques et c'est encore avec ce sens que le mot, employé seul ou associé à l'adjectif « cartésiennes », apparaît dans l'enseignement élémentaire, à savoir : mesures des composantes d'un vecteur sur les axes de référence. — 3) Plus généralement, si à chaque élément x d'un ensemble géométrique ou physique le choix préalable d'un ensemble S de référence permet d'associer un ensemble rangé de nombres (cette correspondance pouvant être bijective ou non), ces nombres pourront être appelés coordonnées de l'élément x relativement à S . Il existe un grand nombre de types de coordonnées : coordonnées polaires, semi-polaires, bipolaires, trilineaires ou tétraédriques, barycentriques, homogènes, elliptiques... d'un point ; coordonnées tangentielles (homogènes ou non) d'une droite ou d'un plan ; coordonnées plückériennes d'une droite ; coordonnées d'un cercle, d'une sphère, etc. ; coordonnées superficielles, en particulier sphériques (géographiques, célestes) ; coordonnées spatio-temporelles d'un événement (relativité), etc. — 4) Le mot retrouve sa valeur adjectivale originelle dans des expressions telles que « lignes (ou surfaces) coordonnées » désignant des lignes (ou surfaces) sur lesquelles l'une des coordonnées d'un point reste constante. (J. C.).

FAMILLE, n. f.

I. *Langage courant* : un synonyme du mot *ensemble*.

II. *Math.* : son langage n'y a pas été strictement codifié, sauf par Bourbaki, dans certaines expressions (cf. 3). — 1) Historiquement a été souvent employé exactement dans le sens de *ensemble*, soit que la théorie des ensembles n'ait pas encore été dégagée, soit que le terme *ensemble* ait été réservé aux ensembles de points (Punktmenge de Cantor), ou de réels (Borel) ; *ex.* : familles de courbes dépendant d'un paramètre, familles normales de fonctions analytiques, familles de fonctions quasi-analytiques. — 2) Tend aujourd'hui à être surtout utilisé pour désigner des ensembles dont les éléments sont les parties d'un ensemble donné E , c'est-à-dire pour désigner des parties de $\mathcal{P}(E)$; *ex.* : famille des ouverts d'une topologie, famille de courbes de l'espace, famille de Moore (partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$, contenant E et fermée pour l'intersection). — 3) Dans les expressions, à prendre en bloc, *famille indexée* et *famille sommable*, le terme *a*, en fait, le sens d'application. — a) Plus précisément, une *famille d'éléments d'un ensemble* E *indexée par un ensemble* I , qualifié alors d'ensemble des indices, est une application de I dans E ; quand I est l'ensemble N des entiers positifs, la famille indexée est appelée *suite* d'éléments de E ; si l'élément générique de E est noté x , l'élément de E , image de $i \in I$ par l'application considérée, est noté x_i . Cette dénomination « famille indexée » qui attire l'attention sur l'image $f(i)$ de i dans E au détriment de l'application elle-même et l'abus de langage : « un élément de la famille » pour désigner une valeur particulière $x_i = f(i)$,

auquel elle conduit, ne sont pas sans danger ; il faut soigneusement distinguer la famille indexée qui est l'application f de la partie $f(I)$ de E ; une suite constante n'est pas une partie réduite à un seul élément. — b) Si E est un espace vectoriel normé une famille indexée d'éléments de E est *sommable* et a pour somme $S \in E$, si, pour tout ε réel strictement positif, il existe une partie finie J_0 de I telle que pour toute partie finie J de I contenant J_0 , on ait :

$$\|S - \sum \{x_i, i \in J\}\| < \varepsilon.$$

La notion s'étend de manière évidente, au cas où E est un groupe commutatif topologique ; dans le cas $I = \mathbb{N}$, elle n'est autre que celle de série commutativement convergente. Si $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, une famille est sommable si et seulement si la famille $\|a_i\|$ est sommable (famille absolument sommable). (A. R.).

FONCTION, n. f.

I. Langage courant : emploi, rôle, charge. .

II. Sciences expérimentales et d'observation : sert à exprimer une idée de dépendance, ou un lien de cause à effet : on dit que la grandeur A est fonction de la grandeur B (entre autres) si, toutes choses égales par ailleurs, A varie quand B varie ; ex. : la température d'ébullition de l'eau pure est fonction de la pression, mais n'est pas fonction de la masse d'eau considérée.

III. Math. : — 1) Les acceptions traditionnelles semblent osciller entre deux pôles. — a) D'une part, en s'opposant à variable indépendante ; une fonction, ou variable dépendante, est une variable qui est déterminée chaque fois que la ou les variables indépendantes le sont ; on peut essayer de préciser ceci de la façon suivante : une variable est une lettre ou une expression qui peut être remplacée par un élément d'un certain ensemble, dit ensemble des valeurs de la variable (si cet ensemble est $\mathbb{R}$, ou une partie de $\mathbb{R}$, on dit que la variable est réelle...) ; quand la variable x est remplacée par l'élément 2 par exemple, on dit que x prend la valeur 2 et on écrit, improprement, $x = 2$. Une variable *indépendante* peut prendre arbitrairement toute valeur de son ensemble de valeurs. Une fonction, ou variable *dépendante*, ou variable, prend la valeur qui résulte de l'expression qui la définit et des valeurs des variables qui y figurent. Ces notions sont, dans une certaine mesure, relatives. Deux fonctions sont dites égales, ou équivalentes, si elles prennent des valeurs égales pour les mêmes valeurs des variables indépendantes, quelles que soient ces valeurs (on employait parfois dans ce cas le signe $\equiv$ au lieu du signe $=$). On dit que la variable z est fonction des variables x et y si sa valeur est déterminée par les valeurs de x et de y . On dit que z est fonction de u et de v si z est fonction de variables elles-mêmes fonctions de u et de v ; ex. : t étant une variable réelle, $x = ch\ t$ et $y = sh\ t$ sont des fonctions de t ; $z = \sqrt{x + y}$ est une fonction de x et y , fonction

de fonction de t ; on a aussi $z = e^z = (x - y)^{-\frac{1}{2}}$. — b) D'autre part, désigne la correspondance (univoque) entre l'ensemble des valeurs d'une variable et l'ensemble des valeurs d'une fonction de celle-ci, au sens précédent ; ex. : la fonction sinus, la fonction exponentielle, une fonction constante. Historiquement, la notion de fonction ne s'est appliquée d'abord qu'aux fonctions réelles d'une variable réelle, définies par les opérations de l'algèbre élémentaire, puis de l'analyse classique, en tout cas continues et dérivables là où elles sont définies. — 2) Actuellement, la Mathématique écarte les difficultés et ambiguïtés précédentes en utilisant systématiquement les notions de *graphe fonctionnel* et d'*application* (voir ces mots), qui inclinent plutôt vers le second des deux sens précédents, le mot fonction étant alors peu employé, afin d'éviter les confusions avec les acceptions traditionnelles. Ainsi, soit $P(x)$ une expression déterminée telle que : $x \in A \Rightarrow P(x) \in B$ (par exemple :

$$P(x) = ax^2 + bx + c ; A = B = \mathbb{R})$$

on pourra considérer l'application f de A dans B : $x \rightarrow P(x)$, mais cette application

ne doit pas être appelée $P(x)$, ni $f(x)$. En effet, $f(x)$ désigne la valeur de l'application f au point x ; on a d'ailleurs $f(x) = P(x)$ pour tout $x \in A$. Si l'application f est différentiable, $f'(x)$ désigne la valeur au point x de l'application f' , dérivée de l'application f , et non la dérivée de $f(x)$. Certains utilisent l'expression : « fonction définie dans A et à valeurs dans B » pour désigner une correspondance entre les éléments d'un ensemble A , dit initial ou de départ, et d'un ensemble B , telle que pour tout élément de A il existe au plus un élément de B qui lui corresponde; l'ensemble de définition est ici une partie de A , mais pas nécessairement A tout entier. Une application de A dans B est alors une fonction définie sur A et à valeurs dans B . Une fonction de deux variables (ou arguments) est une fonction définie sur un ensemble de couples et l'on pose $f(x, y) = f(x, y)$; une fonction de trois variables est définie sur un ensemble de triplets... A la notion de « fonction de fonction » correspond celle de composée (voir ce mot) de deux applications. *Fonction multiforme* (ou multivoque) : cette expression est employée quand on a un ensemble de fonctions, elles-mêmes appelées « branches » ou « déterminations » de la fonction multiforme, qui ont même ensemble initial. C'est ce qui se passe pour l'ensemble des inverses à droite d'une même fonction g , c'est-à-dire pour les fonctions f telles que $g(f(x)) = x$ pour tout x appartenant à l'ensemble E des valeurs de g (privé éventuellement de certains points); *ex.* : la fonction Arcsinus est une détermination (dite détermination principale) de la fonction multiforme arcsinus. Mais l'expression fonction multiforme est malheureuse, car elle entraîne à penser qu'il s'agit d'une fonction avec plusieurs valeurs en chaque point, alors que ceci est incompatible avec la notion de fonction qui suppose essentiellement l'unicité de la détermination (correspondance univoque); faute de cette unicité on revient aux notions plus générales de relation, de graphe, de correspondance. On peut bien associer à une fonction multiforme une véritable fonction qui la caractérise, mais il faut pour cela, soit prendre pour valeurs de cette fonction des familles de valeurs des déterminations, soit au contraire définir cette fonction sur quelque chose comme une surface à feuillets de Riemann (cf. fonctions analytiques). *Fonction numérique* : fonction à valeurs dans l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels (ou, parfois même, dans l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes). *Fonctions spéciales* : certaines fonctions transcendantales d'un usage courant en Mathématiques appliquées, comme les fonctions eulériennes, les fonctions de Bessel, etc... *Fonction généralisée* (ou pseudo-fonction) : cette expression est parfois utilisée pour désigner des mesures et des distributions (voir ces mots, qu'il est préférable d'employer); *ex.* : la « pseudo-fonction » de Dirac est une mesure. Voir aussi les mots : aléatoire, analytique, caractéristique, continue, convexe, croissante, décroissante, dérivée, différentielle, harmonique, holomorphe, homographique, implicite, inverse, linéaire, méromorphe, monogène, monotone...

FONCTIONNEL, LLE, adj. : relatif aux fonctions; en particulier :

Grappe fonctionnel : ensemble F de couples tel que $(x, y) \in F$ et $(x, z) \in F$ entraîne $y = z$. Alors $(x, y) \in F$ s'écrit aussi $y = F(x)$.

Déterminant fonctionnel (ou jacobien) : déterminant de la matrice des n^2 dérivées partielles premières d'une suite de n fonctions des n mêmes variables.

Equation fonctionnelle : équation où l'inconnue est une fonction; *ex.* : les équations différentielles sont des équations fonctionnelles.

Espace fonctionnel : ensemble E de fonctions définies dans un même ensemble A , à valeurs dans un même espace B et possédant certaines propriétés; les opérations sur B peuvent éventuellement se transporter canoniquement sur E . *Ex.* : l'ensemble des fonctions numériques, et par exemple continues, définies sur un intervalle $[a, b]$, est un espace vectoriel fonctionnel,

$$[f + g](x) = f(x) + g(x), [sf](x) = s[f(x)].$$

FONCTIONNELLE, n. f. : fonction, le plus souvent numérique et même linéaire, dont l'ensemble initial est un espace fonctionnel (Ch. de G.).

PRIMITIF, adj.

— 1) *Notion primitive, terme primitif* : au début d'une théorie déductive, les premières notions et les premiers termes introduits ne peuvent être définis à partir de notions ou de termes antérieurs puisqu'il n'y en a pas par hypothèse dans la théorie considérée. Du point de vue strict de la théorie déductive, ces notions ou termes seront donc dénués de définition, et ne seront l'objet que de règles d'emploi ; on les appelle notions primitives, termes primitifs ; du point de vue intuitif, on peut cependant les illustrer par des exemples tirés soit de la vie courante, soit d'une autre théorie déductive connue ; *ex.* : a) la notion d'ensemble, ou la notion de classe dans la théorie des ensembles ; si la notion de classe est prise comme primitive, celle d'ensemble est susceptible d'une définition ; — b) la notion de point dans l'exposé classique de la géométrie euclidienne. — 2) *Un élément primitif d'une extension algébrique* K d'un corps k est un élément x_0 de K tel que K soit l'extension $k[x_0]$ de k obtenue par adjonction de x_0 à k ; *ex.* : racines primitives de l'unité. — 3) *Fonction primitive*. — a) Sens originel : il est équivalent, deux fonctions F et f étant définies sur un ouvert de $\mathbf{R}$ ou de $\mathbf{C}$, de dire que F est une primitive de f ou de dire que f est la dérivée de F . — b) Il est commode d'étendre la définition au cas où la fonction F est continue et admet f pour dérivée, sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable. (A. R.).

SUPPLEMENTAIRE, adj.

I. Langage courant : qualifie un élément que l'on ajoute à un ensemble qui ne le comportait pas initialement ou ne le comporte pas habituellement ; *ex.* : un convive supplémentaire, un train supplémentaire.

II. Math. : deux sens spécialisés dont l'idée s'apparente plus à celle du « complémentaire » que du « supplémentaire » du langage courant : — 1) Un angle saillant A est supplémentaire d'un angle saillant B si leur somme est un angle plat ; on dit aussi que A est le supplément de B ; plus généralement, deux angles orientés sont supplémentaires si leurs mesures en radians, α et β , vérifient $\alpha + \beta \equiv x$ (modulo π ou 2π suivant les cas). — 2) Trièdres supplémentaires : deux trièdres supplémentaires (SA, SB, SC) et (SA', SB', SC') ont même sommet, chaque arête telle que SA' du second étant perpendiculaire à la face (SB, SC) homologue du premier et située, par rapport à cette face, du même côté que SA . — 3) Un sous-espace vectoriel G d'un espace vectoriel E est supplémentaire du sous-espace H de E , si E est la somme directe de H et G : $E = H \oplus G$; si H est différent de E ou de $\{0\}$, il possède une infinité de supplémentaires.

Dans tous les cas, la relation « être supplémentaire de » est symétrique, ce qui justifie les expressions : α et β sont supplémentaires, H et G sont supplémentaires.

SUPPLEMENT, n. m. : le supplément d'un angle saillant A est l'angle saillant supplémentaire de A . (A. R.).

SYSTEME, n. m. : d'usage non rigoureusement codifié, ce terme est : — 1) soit strictement synonyme du mot *ensemble* dans certaines expressions usuelles : système de vecteurs glissants, système de forces, système matériel, système de conducteurs (électrostatique) ; — 2) soit comportant une idée supplémentaire. — a) Lorsqu'il est utilisé pour désigner certaines parties d'un ensemble qui sont définies par une propriété attachée à la partie et non pas à ses éléments pris individuellement ; *ex.* : système de générateurs d'une structure algébrique ; système fondamental de voisinages d'un point dans un espace topologique. Un système de générateurs n'est pas

un ensemble dont chaque élément serait un générateur : il est dépourvu de sens de parler d'un générateur s'il n'est pas précisé à quel système de générateurs il appartient. — b) Dans l'expression : un système de relations (ou d'équations) où il signifie ensemble de relations qui doivent être satisfaites simultanément ; se donner le système de relations $R_i, i = 1, \dots, n$, c'est se donner la relation R telle que :

$$xRy \iff [xR_1y \text{ et } \dots \text{ et } xR_ny].$$

(A. R.).

PROJETS DE PROGRAMMES

Au cours de ses dernières réunions du printemps 62, la Commission des programmes a discuté d'éventuelles réformes des programmes de Sciences Expérimentales et de Philosophie. Il faut bien noter que ces réformes interviendront probablement pour la rentrée 64. Le Bureau de l'A.P.M. sera sans doute consulté, au moment choisi par l'Administration. Il a donc paru intéressant de publier ici des projets ou des schémas, sous la seule responsabilité de la Commission, ou de leurs auteurs : il est donc bien évident que ces textes ne sont pas officiels ; soumis à l'appréciation de tous, ils doivent susciter avis, critiques ou suggestions, qui seront adressés à la Secrétaire de la Commission : Mlle CLAVIER, 24, rue Linné, Paris, 5°.

A. Schéma d'un programme de Sciences Expérimentales.

N. B. : Ce projet est établi pour un horaire de 6 heures hebdomadaires et s'inspire du nouveau programme de Matélem (Cf. Bull. 222, p. 245).

Vocabulaire et symboles (même rédaction que M.E.).

I. *Les nombres* : Extensions successives de la notion de nombre (à l'exclusion des nombres complexes). Développer le calcul algébrique pratique ; calcul sur les nombres irrationnels ; calculs approchés.

II. *Arithmétique* (Cf. programme de M.E. à partir de 2°).

III. *Analyse combinatoire* (Cf. programme de Math. - Technique B) : Dénombrements, combinaisons, arrangements ; binôme de Newton. Probabilités simples ; probabilités totales ; probabilités composées. Espérance mathématique ; loi des grands nombres : lemme de Bienaymé et utilisation par Tchébychev. Théorèmes de Bernouilli et de Borel. Epreuves répétées dans le cas de deux éventualités dont les probabilités sont constantes ; utilisation du binôme de Newton pour un exposant positif entier.

IV. *Notions de géométrie analytique et de calcul vectoriel* (Cf. programme de M.E., p. 253, 254) : On pourrait ajouter l'étude de quelques courbes usuelles en astronomie, en physique, en chimie ou en sciences naturelles, ainsi que la notion de produit vectoriel.

V. *Fonctions d'une variable réelle* (Cf. M.E., p. 249, § 5) : Révision du cours de Première CM sur les dérivées et compléments : dérivée du produit de n fonctions, de u^n , dérivée d'une fonction composée, dérivée de la fonction réciproque d'une fonction monotone. Notion de différentielle. Etude de quelques fonctions rationnelles. Primitives et application à des calculs d'aires, de volumes, de moments d'inertie.

Fonction $\text{Log}_a x$ et fonction exponentielle de base a (voir M.E., p. 251) ; coordonnées logarithmiques.

Fonctions circulaires ; fonction $a \cos(\omega t + \varphi)$ et $a \cos x + b \sin x$; exemples

simples de fonctions composées à partir de fonctions circulaires, en particulier du type u^n et $\sqrt[n]{u}$.

Calcul approché des racines d'une équation.

Equations différentielles simples (Cf. M.E., p. 252).

Fonctions de plusieurs variables ; courbes $x = C^t$ ou $y = C^t$.

VI. Cinématique (Cf. M.E., p. 256, § 7).

La Commission des Programmes.

B. Un projet détaillé pour Sciences Expérimentales.

(également conçu pour un horaire de 6 h. par semaine).

Vocabulaire et symboles : Voir programme de la classe de Mathématiques Élémentaires.

Arithmétique, algèbre et notions d'analyse.

I. Les nombres. Extensions successives de la notion de nombre.

Note préliminaire.

1° Aucune question d'ordre théorique ne devra être posée, aux épreuves écrites et orales du baccalauréat, sur les diverses notions qui font l'objet de ce chapitre I.

2° Ces notions sont destinées uniquement à conduire l'élève à repenser les règles du calcul algébrique élémentaire appris dans les classes antérieures, à en améliorer et à en confirmer la pratique.

3° Les trois premiers paragraphes qui suivent donnent un exemple de ce qui peut être fait dans cet esprit et n'ont qu'une valeur indicative destinée surtout à préciser comment limiter des exposés théoriques à une efficacité purement pratique.

1° Ensemble des entiers naturels. Extension, par prolongement de la règle de position, à l'ensemble des nombres décimaux (à développement décimal limité), utilisés dans la pratique des calculs arithmétiques. Comparaison, à vue, de deux nombres décimaux.

2° Addition dans cet ensemble. Propriétés. Existence d'une soustraction dans certains cas. Règle des parenthèses, des crochets, des accolades et règle de combinaison des signes + et —. Extension au groupe additif des nombres décimaux relatifs.

3° Multiplication dans l'ensemble des nombres décimaux arithmétiques. Propriétés. Existence d'une division dans certains cas. Règle d'économie des parenthèses et règle de combinaison des signes $\times$ et : ou barre de fraction. Extension au groupe multiplicatif des fractions naturelles généralisées (numérateurs et dénominateurs décimaux).

Nécessité, en général, de l'introduction du symbole fraction pour exprimer exactement un quotient. Expression décimale limitée d'un quotient de deux nombres décimaux dans l'ensemble des nombres décimaux arithmétiques.

Fractions égales à l'unité, fractions égales entre elles, nombre rationnel.

4° Combinaison de l'addition et de la multiplication. Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Multiplication et division des entiers et décimaux relatifs. Addition et soustraction des fractions. Corps des nombres rationnels relatifs.

Exponentiation et racines d'indice rationnel relatif. Distributivité de ces opérations par rapport à la multiplication et à la division et non distributivité par rapport à l'addition et à la soustraction.

Nécessité, en général, de l'introduction du symbole $\sqrt{\quad}$ pour exprimer exactement une racine. Expression décimale limitée d'une racine de nombre décimal dans l'ensemble des nombres décimaux arithmétiques.

Nombre réel, nombre algébrique, nombre transcendant.

5° Pratique du calcul algébrique. Règles de priorité nécessitées par les économies de parenthèses et l'emploi des barres de fraction. Transformation et simplification d'expressions algébriques pouvant se présenter dans le programme de la classe.

VI. Arithmétique.

Les nombres entiers. Division à une unité près, quotient entier, reste. Congruence modulo n .

Divisibilité ; diviseurs et multiples communs à deux entiers. Nombres premiers. P.G.C.D., P.P.C.M.

Numération ; base et changement de base ; étude des bases dix, douze, sept et deux.

Progressions arithmétiques, progressions géométriques.

Calculs approchés, encadrement, marge d'incertitude. Valeurs approchées d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance, d'une racine de nombres dont on connaît des valeurs approchées.

III. Dénombrements et calcul des probabilités.

1° Dénombrements.

Combinaisons, arrangements, exponentielle de base entière à exposant entier. Binôme de Newton.

2° Calcul des probabilités. Cas finis.

Événement et éventualité.

Probabilités simples ; probabilités totales ; probabilités composées.

Espérance mathématique d'une variable aléatoire numérique. Lien avec le calcul barycentrique.

Première loi des grands nombres ; inégalité de Bienaymé et Tchébychev. Epreuves répétées et indépendantes dans le cas de deux éventualités dont les probabilités sont constantes : théorème de Bernoulli.

IV. Fonctions d'une variable réelle.

1° Représentation graphique dans un repère cartésien orthonormé ou simplement orthogonal non normé.

2° Changement de variable et changement d'axes de coordonnées :

$$x = x_0 + X, y = y_0 + Y.$$

Application aux formes réduites canoniques :

$$aX^2 + b, aX^2 + bX + c, a + \frac{b}{X}, aX + b + \frac{c}{X} \text{ et } a\sqrt{X}.$$

Application à l'étude locale d'une fonction et de son graphe au voisinage d'un de ses points x_0, y_0 , par le changement de variable $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Etudes locales des formes réduites précédentes et de aX^n pour n rationnel relatif.

3° Sens de variation sur un intervalle. Maximum, minimum en un point.

Notions sur les limites. Énoncé (sans démonstration) des propriétés élémentaires des limites : unicité, somme, produit, quotient, puissances et racines, cas d'indétermination.

Continuité. Définition en un point d'un intervalle à l'aide des équations locales $\Delta y = f(x, \Delta x) \cdot \Delta x$. Continuité d'une fonction composée (fonction de fonction). Existence et continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue (sans démonstration).

4° Différentielles et dérivées.

Étude des équations $\Delta y = f(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x$ lorsque Δx tend vers zéro. Si $f(x_0, \Delta x)$ tend vers une limite K , on appellera différentielle le produit $K \cdot \Delta x$ et on le notera $dy = K \cdot dx$, en admettant, sans démonstration, qu'il est possible de poser $\Delta x = dx$

par simple convention d'écriture. On fera remarquer que la valeur de K peut s'obtenir sans diviser par Δx lorsque les fonctions considérées sont algébriques. Identification du coefficient différentiel K et de la dérivée en un point. Notation $\frac{dy}{dx}$. Interprétation géométrique et exercices numériques.

Révision des questions figurant au programme des classes de 1^{re} A' CM M'. Différentielle et dérivée d'une constante, d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance, d'une racine. Interprétation géométrique et exercices numériques. Equation de la tangente en un point de la courbe représentative.

On admettra que l'existence d'une dérivée entraîne la continuité de la fonction.

Dérivée et différentielle d'une fonction composée, justification de la convention $\Delta x = dx$. Dérivée et différentielle d'une fonction réciproque. Interprétation géométrique et exercices numériques. Définition des dérivées successives.

Dérivées et différentielles de x^n et de u^n pour n rationnel relatif.

Dérivées et différentielles des fonctions circulaires et des fonctions composées à partir de fonctions circulaires. Dérivées successives d'un polynôme, de $\sin(ax + b)$, de $\cos(ax + b)$.

5° Application des dérivées à l'étude des fonctions déjà étudiées sous forme réduite canonique et de quelques autres fonctions algébriques ou composées à partir de fonctions circulaires, à choisir parmi celles qui peuvent se présenter dans la suite du cours.

6° Fonctions primitives (Cf. V, 8° et 9°, du programme de M.E.).

7° Fonctions logarithmiques, exponentielles (Cf. VI, 3° et 4°, M.E.), écriture différentielle. Utilisation de la différentielle logarithmique pour la révision et la pratique de certains calculs d'erreurs. Calculs logarithmiques. Usage des graphes à échelle logarithmique.

8° Dérivées partielles et différentielle totale d'une fonction de deux variables indépendantes. Interprétation géométrique et exercices numériques.

V. Equations et inéquations.

1° Transformations élémentaires d'équations. Changement d'inconnue. Interprétations graphiques.

2° Etude des inéquations ramenées à des discussions de signes.

3° Equations et inéquations du 1^{er} et du 2^e degrés et qui s'y ramènent. Interprétations graphiques.

4° Résolution graphique d'équation et d'inéquation à une inconnue. Résolution numérique approchée par la méthode de Newton et par celle de Lagrange. Encadrement et marge d'incertitude des résultats à l'aide des graphes et des études locales numériques.

5° Recherche des fonctions une ou deux fois dérivables y de la variable x vérifiant les équations :

$y' = P(x)$, $y'' = P(x)$, $P(x)$ étant un polynôme en x , $y' = ay$, $y'' + \omega^2 y = 0$, (ω constante réelle).

On admettra, après avoir découvert les solutions de la forme

$$A \cos \omega x + B \sin \omega x,$$

que l'équation n'en admet pas d'autre.

On pourra également traiter certaines équations différentielles utilisables en cinétique chimique et étudier les fonctions solutions trouvées.

Tous les problèmes portant sur le 4° et le 5° devront être traités numériquement de façon complète ; en particulier dans le 5°, la détermination des constantes paramétriques en fonction des conditions initiales devra être achevée pour permettre l'établissement des graphes des solutions correspondantes.

VI. Cinématique.

Cf. programme de M.E., titre VII.

A. FOUCHÉ (Janson-de-Sailly).

C. Un projet pour la classe de Philosophie.

Avertissement. — Ce projet n'a de signification que dans une situation donnée dont les principaux caractères sont les suivants :

1° Ou bien les élèves de la classe de Philosophie proviennent des sections A ou B de Première dans lesquelles le programme de mathématiques n'a pas été réformé de façon profonde et reste, dans son esprit, un extrait des programmes de CMM' ; ou bien les élèves proviennent des sections C, M et M' et s'ils ont choisi la section Philosophie, c'est en général et au moins en partie en raison de mauvais résultats en mathématiques.

2° En attendant qu'il soit possible d'organiser un enseignement de mathématiques spécialement conçu pour toutes les classes non-scientifiques, il est permis d'envisager une telle réforme pour la classe de Philosophie, à l'occasion de la réforme ou de la réorganisation des classes terminales. Ce projet tient compte, ainsi, de l'accentuation du caractère scientifique de la section Sciences Expérimentales, ainsi que du fait probable suivant : beaucoup de futurs maîtres de l'enseignement du Premier Degré suivront les cours de la section Philosophie.

3° Sauf erreur de notre part et corrections dans certains détails, le projet suivant nous paraît susceptible de recueillir l'avis favorable de nos Collègues Philosophes. « Il y a longtemps, disent-ils, que nous avons réclamé un programme de Philosophie spécialement conçu pour les scientifiques ; nous approuvons donc a priori votre idée d'un programme de mathématiques spécialement conçu pour les classes non-scientifiques et en particulier pour celle de Philosophie. Quant à l'horaire, l'accord semble également facile pour deux heures hebdomadaires obligatoires et deux heures réservées pour une option qui serait spécialement souhaitée pour les futurs étudiants en sciences humaines ou en sciences économiques. Le renforcement de l'horaire de mathématiques en classe de Philosophie est également motivé par la suppression des classes dites de reconversion, décision certes regrettable mais que nous devons bien considérer comme un fait. »

4° Dans le présent projet, la partie I concerne le programme obligatoire ; on a fait en sorte que tout élève de Philosophie puisse y trouver un intérêt renouvelé pour les mathématiques, même si, auparavant, il n'a pas techniquement réussi. L'aspect nouveau que prend, à ce niveau, une axiomatique simple mais complète (cas des algèbres de Boole) doit servir d'illustration à certains chapitres du cours de Philosophie. La partie II développe, en les reprenant à la base, des éléments d'analyse et introduit des éléments de calcul des probabilités ; elle n'exige pas une vaste connaissance des programmes des années antérieures, mais devrait en favoriser l'approfondissement. Enfin, l'astronomie ne figure pas dans ce projet ; elle doit faire l'objet du même enseignement (et selon la même formule) que dans les autres classes terminales.

I. — 1. Éléments de la théorie des ensembles.

— Relation d'appartenance. Illustration à partir d'exemples tirés des connaissances mathématiques des élèves ou de situations proposées par la vie courante. Relation d'inclusion ; sous-ensemble ou partie d'un ensemble ; ensembles des parties d'un ensemble dans le cas d'un ensemble fini. Sous-ensembles complémentaires ; partie vide.

— Opérations d'intersection et de réunion sur les parties d'un ensemble ; partie neutre et partie absorbante pour chacune des opérations ; commutativité, associativité et double distributivité des deux opérations.

— Dualité des opérations intersection et réunion par passage aux complémentaires. L'inclusion définit un ordre partiel sur les parties d'un ensemble ; ordre dual défini sur les complémentaires de ces parties.

— Différence dissymétrique et différence symétrique de deux parties d'un ensemble. Application aux transformations d'expressions ensemblistes.

— Equations ensemblistes : après avoir démontré les équivalences
 $A = B \iff A' = B'$ et $A = B \iff (A \cap B') \cup (A' \cap B) = \emptyset$,
montrer que toute équation en $X \in \mathcal{P}_E$ se ramène à
 $(A \cap X) \cup (B \cap X') = \emptyset \iff B \subset X \subset A'$ (si $B \subset A'$).

2. Algèbre de Boole.

— Énoncé des axiomes d'une algèbre de Boole définie sur les éléments d'un ensemble E (la compatibilité des axiomes est justifiée par l'existence d'une algèbre de Boole sur l'ensemble des parties d'un ensemble). Exemple d'une telle formulation :

(A.1) Il est défini sur E deux lois de composition interne :

$$(a, b) \in E^2 \quad a|b = c \in E \quad a \circ b = d \in E.$$

(A.2) Ces deux lois sont commutatives.

(A.3) Pour chaque loi, il existe un élément neutre propre :

$$e, f \in E \quad e \neq f : \forall a \in E \quad a|e = a \quad a \circ f = a.$$

(A.4) Chaque opération est distributive par rapport à l'autre.

(A.5) Tout élément x de E a un complément x' tel que

$$x|x' = f \quad \text{et} \quad x \circ x' = e.$$

(A.6) Axiome de l'ordre : a est dit antérieur à b ($a < b$) si, et seulement si, $a \circ b' = e$.

Étude d'exemples d'algèbres de Boole à deux ou quatre éléments donnés par leurs tables opératoires.

— Théorèmes généraux : principe de dualité (sur les deux lois) ; loi d'absorption ($a|a = a$; $a \circ a = a$) ; $a|f = f$ et $a \circ e = e$; $a|(a \circ b) = a$ et $a \circ (a|b) = a$; les deux lois sont associatives.

— Propriétés des compléments ; en particulier

$$(a|b)' = a' \circ b' \quad \text{et} \quad (a \circ b)' = a'|b'.$$

— Structure d'ordre liée à une algèbre de Boole.

— Fonctions disjonctives normales ; fonction disjonctive normale complète ; fonctions égales et tables de valeurs des fonctions égales, fonction donnée par sa table de valeurs.

— Application à l'étude du calcul des propositions : opérations logiques élémentaires : négation, disjonction, conjonction, implication directe et implications conjuguées, équivalence logique. Vérification de la validité d'une proposition par le calcul de sa table des valeurs.

3. Correspondances.

— Produit cartésien de deux ensembles ; exemples, les deux ensembles étant finis ; définition d'une correspondance entre les éléments de E et ceux de F par la donnée d'une partie de $E \times F$. Définition d'une application, d'une bijection ; exemples.

— Graphe d'une correspondance, d'une application. Coordonnées cartésiennes orthonormées ou normées et obliques ou non-normées et obliques ; fonction linéaire, fonction affine.

4. Les nombres.

— L'ensemble des entiers naturels : la révision des connaissances des élèves quant aux opérations sur $\mathbb{N}$ permet de dégager un système d'axiomes de $\mathbb{N}$.

— Définition du groupe $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs (exemple de complétion d'un ensemble pour satisfaire une condition donnée) ; les axiomes du groupe $\mathbb{Z}$ suggèrent

de rechercher d'autres exemples de groupes parmi les théories antérieurement étudiées ou parmi celles qui le seront.

— La multiplication dans $\mathbf{Z}$; exemple d'une structure d'anneau.

— La division euclidienne dans $\mathbf{Z}$; classes d'équivalence selon un module m positif ; opérations sur les classes résiduelles et exemples d'anneaux ayant des diviseurs de zéro ou de corps finis.

— Définition du corps des rationnels $\mathbf{Q}$ par complétion de $\mathbf{Z}$. Opérations sur les rationnels. Résolution dans $\mathbf{Q}$ des équations entières en $abc \in \mathbf{Z} \quad ax + b = c$.

— La résolution dans $\mathbf{Q}$ des équations entières $ax^2 + bx + c = 0$ montre la nécessité de compléter $\mathbf{Q}$; principes de la définition de $\mathbf{R}$ (axiomes de $\mathbf{R}$) (énoncé ; applications et révision des opérations sur les réels).

5. Arithmétique.

— Divisibilité ; diviseurs et multiples communs à deux entiers relatifs.

— Nombres premiers.

— Numération ; base et changement de base ; étude des bases dix, douze, deux, etc...

II. — 1. Polynômes.

— Fonctions polynômes ; addition, multiplication des polynômes, anneau des polynômes.

— Formule du binôme.

— Fractions rationnelles ; transformations.

2. Fonctions d'une variable réelle.

— Définition générale sur des exemples classiques :

$$x \rightarrow \frac{ax + b}{a'x + b'} ; \quad x \rightarrow x^n ; \quad x \rightarrow \sqrt{x + a}.$$

— Règles sur le calcul des limites.

— Différentielles des fonctions algébriques ; dérivée.

— Continuité. Dérivée des fonctions continues. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance.

— Fonction réciproque d'une fonction continue monotone ; dérivée de la fonction réciproque.

— Application des dérivées à l'étude de quelques fonctions.

— Primitives d'une fonction (on admet que les primitives d'une fonction identiquement nulle sont les fonctions constantes) ; primitives d'une somme de fonctions ;

application au calcul d'aires et de volumes ; notation $\int_a^b f(x) dx$.

— Fonction logarithme (comme primitive particulière de $\frac{a}{x}$, $x > 0$, $a > 0$) ; fonction exponentielle.

— Fonctions circulaires.

3. Dénombrements. Calcul des probabilités (Cf. plus haut la partie III du projet B, p. 59. — Nous empruntons, Fouché et moi, cette rédaction à M. Barbut ; emprunt sans espoir de retour...).

G. W.

Classe de 1^{ère} A' C M M'

..... 18 NF

Un certain nombre de notions envisagées en Seconde A', C, M, M' sont révisées et complétées : équations, inéquations, fonctions élémentaires et surtout débuts de la géométrie de l'espace réel R^3 .

La **géométrie affine** et la **géométrie métrique euclidienne** sont bien séparées ; les propriétés affines et les propriétés métriques des figures sont nettement mises en évidence ; la **trigonométrie** est largement traitée.

Les idées de **continuité**, de **limite**, introduites par la notion de **voisinage**, permettent l'étude de la **dérivation** et des **variations des fonctions**. Les **aires** des surfaces, planes et gauches, les **volumes** des solides sont présentés simplement. Les polygones réguliers mènent au périmètre du cercle, c'est-à-dire ramènent à la notion de limite.

De nombreux problèmes, judicieusement choisis, sont traités complètement et constituent deux leçons très importantes.

Classe de 1^{ère} A B

On trouvera dans ce manuel le développement du programme de mathématiques des classes de Première A et B : programme obligatoire et programme complémentaire.

Après une révision approfondie de l'étude du **trinôme du second degré**, des **fonctions symétriques de deux variables**, l'étude du **plan affine R^2** et du **plan métrique euclidien** a été reprise.

La notion de **voisinage** est utilisée pour introduire les idées de limite et de continuité.

Le manuel se termine par une leçon de problèmes.

Classe de 2^e A' C M M' (Livre du maître ; 1^{er} fascicule)

..... 11 NF

Ce livre contient les corrigés des 1.121 premiers exercices et problèmes du manuel de Seconde A', C, M, M', c'est-à-dire ceux relevant de la théorie des ensembles, des nombres, des fonctions polynômes et des équations.

Ces corrigés sont précédés d'un important développement sur la théorie des ensembles et la théorie des fonctions.

l'école

11, rue de Sèvres, Paris (6^e)

« Les Mathématiques sont une adaptation volontaire et intelligente de la pensée aux choses. »

Emile BOUTROUX.

LE FREINAGE DES SATELLITES

Le problème du freinage des satellites, en vue de leur récupération, semble avoir été l'un des plus délicats de la balistique de l'espace.

Ce problème avait une première solution rudimentaire dont on a parfois tiré parti, encore qu'assez difficilement. Elle consistait en un ralentissement assez faible mais raccourcissant suffisamment la trajectoire pour qu'elle rencontre la surface de la Terre. Donnons un exemple : soit un satellite sur une orbite circulaire à 300 km du sol, c'est-à-dire à 6 670 km du centre de la Terre. Sa vitesse est donnée par la

formule $v^2 = \frac{K}{d}$ (la constante $K = 398\,000$ si les unités sont le kilomètre et la

seconde). On trouve $v = 7,726$ km/s. Supposons qu'on obtienne, par un procédé adéquat, un ralentissement assez brusque de 0,5 km/s. Le satellite se trouve alors en A (fig. 1) avec une vitesse horizontale de 7,226 km/s. Une formule de la mécanique classique relie la vitesse v à l'apogée (en A), la distance d de cet apogée et le demi grand axe a de l'orbite elliptique :

$$a = \frac{K}{\frac{2K}{d} - v^2}$$

Soit ici $a = 5\,920$ km. On en déduit le périégée fictif $OB = 2a - OA = 5\,170$ km, puis l'angle $AOM = \theta$ (en utilisant l'équation polaire de l'ellipse) :

$$\frac{2}{r} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right) \cos \theta$$

$p = OA = 6\,670$ $p' = OB = 5\,170$ $r = 6\,370$; on trouve $\theta = 48^\circ$. Cela correspond, sur la Terre, à un arc HM de 5 200 km. Mais on devine la difficulté

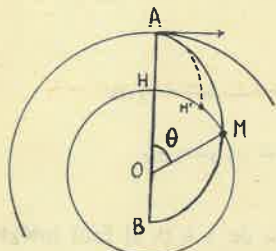


FIG. 1

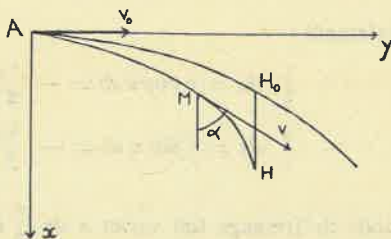


FIG. 2

de prévoir le point de chute à une telle distance. D'autant que s'ajoutent les effets du freinage atmosphérique, du parachutagé final. Nous avons, d'autre part, supposé le freinage initial exactement opposé au mouvement ; si la force a une composante perpendiculaire à la vitesse en A, la chute devient problématique et, en tout cas,

plus difficile encore à bien prévoir. Or il s'est avéré plus difficile de bien diriger le freinage que l'accélération initiale (sans doute en raison de la difficulté de fixer l'orientation du satellite par rapport à sa trajectoire) ; cette difficulté a entraîné les seuls échecs avoués par les Russes.

Depuis ils ont résolu le problème en obtenant un freinage total, ce que nous allons maintenant étudier de façon approchée.

Supposons le satellite lancé horizontalement en un point A où l'accélération de la pesanteur est γ ($\gamma < g$). Supposons la force de freinage exactement opposée à la vitesse et se traduisant par une décélération égale à $n\gamma$ (n ne peut dépasser quelques unités pour les satellites habités). Assimilons enfin le champ de pesanteur au voisinage de A à un champ uniforme (l'axe Ax étant la verticale descendante) ; le champ de pesanteur a pour composantes γ et 0. A l'instant t , le satellite est venu en M ; sa vitesse v fait l'angle α avec la verticale. Les composantes de la vitesse sont :

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \alpha \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \alpha.$$

Les composantes de l'accélération sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -n\gamma \cos \alpha + \gamma \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -n\gamma \sin \alpha.$$

Les équations du mouvement sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} \cos \alpha - v \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = -n\gamma \cos \alpha + \gamma \\ \frac{dv}{dt} \sin \alpha + v \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} = -n\gamma \sin \alpha. \end{array} \right.$$

On en déduit : $\frac{dv}{dt} = -n\gamma + \gamma \cos \alpha \quad v \frac{d\alpha}{dt} = -\gamma \sin \alpha$ (1)

et par conséquent : $\frac{dv}{v} = \frac{n - \cos \alpha}{\sin \alpha} d\alpha,$

soit enfin : $v = v_0 \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^n \frac{1}{\sin \alpha}.$

En posant $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = u$: $v = \frac{v_0}{2} (u^{n-1} + u^{n+1}).$

La formule (1) permet d'exprimer : $dt = -\frac{v_0}{2\gamma} (u^{n-2} + u^n) du.$

Soit finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} dx = v \cos \alpha dt = -\frac{v_0^2}{4\gamma} (u^{2n-3} - u^{2n+1}) du \\ dy = v \sin \alpha dt = -\frac{v_0^2}{2\gamma} (u^{2n-2} + u^{2n}) du. \end{array} \right.$$

La période de freinage fait varier α de $\frac{\pi}{2}$ à 0, soit u de 1 à 0. Il faut intégrer entre ces bornes pour calculer t , x et y . On trouve :

$$t = \frac{v_0}{\gamma} \frac{n}{n^2 - 1} ; \quad x = \frac{v_0^2}{4\gamma} \frac{1}{n^2 - 1} ; \quad y = \frac{v_0^2}{\gamma} \frac{2n}{4n^2 - 1}.$$

Toutefois le calcul de x ne répond pas au vrai problème pratique. Ce qu'il est intéressant de connaître, c'est la hauteur de chute H_0H (voir fig. 2) par rapport à la

trajectoire sans freinage. Celle-ci serait une parabole, au lieu de la trajectoire (circulaire ou elliptique) du vrai mouvement newtonien ; mais l'erreur qui résulte de cette approximation (due à l'hypothèse du champ constant) est de l'ordre du kilomètre. On trouve alors pour abscisse de H_0 :

$$x_0 = y^2 \times \frac{\gamma}{2v_0^2} = \frac{v_0^2}{\gamma} \times \frac{2n^2}{(4n^2 - 1)^2},$$

ce qui donne pour hauteur de chute :

$$x - x_0 = \frac{v_0^2}{4\gamma} \left[\frac{1}{n^2 - 1} - \frac{8n^2}{(4n^2 - 1)^2} \right].$$

Prenons comme exemple celui du satellite sur orbite circulaire à 300 km du sol ; alors $v_0 = 7\,726$ m/s $\gamma \neq 9$. Voici, suivant les valeurs de n , un tableau de quelques valeurs :

n	2	3	4	5
temps de freinage	9 mn 30 s	5 mn 22 s	3 mn 49 s	3 mn
distance horizontale parcourue (km) ..	1 770	1 140	840	670
hauteur de chute (km)	314	110	57	35

On voit que la distance de freinage reste assez importante, mais il n'y a aucun moyen de la réduire. Par contre, la hauteur de chute est faible et on peut, selon la force utilisée, amener le satellite à avoir une vitesse nulle très près du sol ou à une hauteur encore importante. De toutes façons, le freinage par parachute n'aura à intervenir que dans la chute libre verticale alors que les risques de déviation et aussi d'échauffement seront relativement faibles.

Voici pour terminer des formules approchées simples dans l'hypothèse de satellites sur orbite basse et avec freinage important ($n \geq 3$) : temps de freinage

(en secondes) $\frac{900}{n}$; distance de freinage (en kilomètres) $\frac{3\,300}{n}$; hauteur de chute

(en km) $\frac{850}{n^2}$.

Ch. TÉNOT.

UN CERCLE SCIENTIFIQUE AU LYCEE TECHNIQUE D'ARLES

Depuis janvier 1961, j'anime dans mon lycée un cercle scientifique de vingt-cinq membres (classes de 4^e). Le projet a pris naissance autour d'une bibliothèque scientifique : parmi les premiers lecteurs réguliers de cette bibliothèque, quatre à cinq ont prêté une oreille attentive à ce projet de cercle scientifique. Convoquée à leur initiative, une réunion de futurs responsables se tenait fin décembre, et le cercle vivait sa première assemblée le 8 janvier avec 18 participants.

Pourquoi un cercle scientifique ?

Une telle activité permet de familiariser les élèves avec les grandes idées relatives à la science : je pense à cet écrit de Paul Langevin reproduit dans *l'Enseignement des sciences*. Une telle activité permet aussi (et professionnellement c'est là source de joies) de développer chez certains le goût et le sens des responsabilités, de l'initiative.

Pour faire de ces principes une réalité, j'ai été conduit à enrichir progressivement la vie du cercle, à la rendre complexe.

La base première des activités est la *bibliothèque scientifique*. Les travaux

prennent source et aide dans son contenu. Les membres du cercle ont d'ailleurs un intérêt certain pour les lectures scientifiques. Intérêt parfois superficiel, qu'il importe de préciser. La bibliothèque comprend une trentaine de volumes.

La 2^e activité est constituée par des *exposés scientifiques* du professeur. Les thèmes sont choisis avec les responsables du cercle, et l'actualité impose souvent les siens. C'est là le moyen principal d'accroître l'intérêt que portent naturellement les élèves à la science vivante, aux techniques nouvelles. Quelques exemples :

- Deux exposés sur l'histoire des Mathématiques.
- Un exposé sur l'éclipse du 15 février 1961, préparant l'observation du phénomène par les membres du cercle.

- Un ensemble d'exposés sur l'Astronautique (notions d'Astronomie, notions historiques d'Astronautique et notions théoriques les plus simples, exposé sur le bilan des recherches cosmiques et regards sur l'avenir...).

L'exploit de Youri Gagarine a été l'occasion d'une assemblée extraordinaire et très enthousiaste.

Mais l'exposé n'est pas une fin : il est le centre et la source (parfois indirecte) d'une activité propre des membres du cercle. Sur la base des thèmes développés, des groupes de travail se forment, munis de cahiers de « *Travaux de recherche* ». Quelques exemples là encore :

- la symétrie dans les travaux des hommes ;
- science et magie au cours des siècles (là encore, « l'Enseignement des Sciences » publiant les lettres de Mersenne sur la sorcellerie m'a donné un outil de discussion) ;
- construction et utilisation d'une lunette astronomique ;
- construction d'un tableau représentant les progrès de la conquête du cosmos ;
- carnet de bords de Vénusik, etc... ;
- la journée du 12 avril 1961.

Ces travaux, réalisés par les groupes, sont la source de discussions (il existe des « Assemblées de questions » spécialement consacrées à cela) ; ils sont présentés et exposés par les chefs de groupes. On voit surgir dans ces cerveaux de 14-15 ans des problèmes, des idées, des questions passionnées sur la science, son avenir, sur les savants, des questions plus précises sur telle ou telle technique ou découverte... Questions parfois embarrassantes pour le professeur, mais le seul fait qu'elles lui soient posées n'est-il pas déjà motif de joie ?

Bien entendu, d'autres activités seraient nécessaires : la possibilité d'utiliser un petit atelier, des rencontres avec savants et ingénieurs, des visites. Je n'ai pas réussi à concrétiser dans ce domaine, mais 1961-62 permettra sans doute d'avancer. Encore que se pose là le problème des moyens matériels, des crédits (inexistants). Ce regard jeté sur le cercle scientifique du Lycée technique d'Arles serait incomplet si je ne parlais pas de l'organisation même du cercle. Ce qui touche plus à la pédagogie qu'à l'enseignement scientifique.

Une bonne organisation est la condition d'une activité régulière et suivie. Elle permet ensuite, je l'ai déjà dit, de développer chez certains élèves ces qualités qui font d'eux des responsables.

J'ai attaché une grande importance à l'existence du *groupe des responsables* : un secrétaire, les responsables du journal et de la bibliothèque, les responsables de classes. Ce groupe a acquis une unité, des caractères. Chez certains, le sens de leur responsabilité s'est affirmé : il faut voir l'importance qu'ils attachent au journal, à la bibliothèque, à l'exposition de fin d'année, le sérieux avec lequel ils pèsent le choix des nouveaux membres du cercle, leur souci en fin d'année d'un redémarrage rapide et prometteur en septembre.

En tête du groupe, le *secrétaire* joue un grand rôle : il convoque les assemblées, tient le fichier de documents, assure la liaison avec le professeur, impulse la vie du cercle. Le groupe se réunit, élabore les plans trimestriels, discute du journal, des travaux de recherche...

Ce journal dont je viens de parler est une pièce maîtresse de la vie du cercle. Il est devenu pour les participants le témoignage de leur activité. Il contribue avec d'autres éléments (valeur des cahiers de Travaux, exposition de fin juin) à leur donner la fierté en l'œuvre entreprise.

Le groupe de responsables, le secrétaire animent la vie de ce collectif que doit être le cercle. J'ai obtenu, avec leur aide, la réalisation d'une discipline effective. A chaque assemblée, dans les discussions, je rendais familières les perspectives d'activité. Je crois que cela contribue à donner au cercle l'élan nécessaire. Ce dernier trimestre, plusieurs participants présentaient eux-mêmes l'exigence de réunions plus fréquentes, d'assemblées de questions plus nombreuses. Quelques-uns, certes (4 à 5), sont restés depuis le début dans une douce passivité. Mais voici que la plupart, en ces derniers jours, affirment leur volonté de poursuivre l'an prochain la même aventure. C'est, pour moi, le plus simple des encouragements.

Voici ce bilan de six mois de vie. J'aimerais pouvoir présenter d'une façon plus explicite, au travers du journal du cercle et de certains cahiers de travaux, ces signes de l'intérêt porté par ces jeunes de 14-16 ans aux problèmes scientifiques. Il est possible de leur donner, devant la science et ses problèmes, l'attitude juste et confiante. L'aventure de la science les attire, dans ses aspects les plus enthousiasmants. Il serait vain et nuisible de leur cacher cet aspect. Il est utile de les aider à dépasser cet attrait parfois superficiel.

Enfin, je dois dire que le professeur retire beaucoup de satisfaction du travail fait par l'animateur du cercle scientifique. Pour certains élèves surtout, il est net que le travail du cercle aide, justifie, le travail de classe. Qu'il le complète.

Je tenais à apporter cette petite expérience. Peut-être servira-t-elle.

J. BONNET.

CALENDRIER ASTRONOMIQUE

Certains phénomènes remarquables, faciles à observer, sont signalés (en temps universel et pour Paris) ; mais, pour plus amples détails, il est recommandé de consulter *L'Astronomie*, revue de la S.A.F., ou les annuaires.

Automne 1962.

Equinoxe le 23 septembre à 12 h 35 mn 27 s.

Planètes : *Mercury* a une élongation Ouest maximum de $18^{\circ}12'$ le 22 octobre. Ce jour, le Soleil se couche à 16 h 47 (à Paris). *Vénus* est visible le soir en octobre ; éclat maximum le 8 ; conjonction inférieure avec le Soleil le 12 novembre 20 h (cf. trajectoire de Mariner II lancé le 26/8). *Mars*, visible dans la 2^e partie de la nuit, se lève de plus en plus tôt, 22 h 44 le 16/10, 21 h 47 le 21/11, 20 h 42 le 15/12, Mars en quadrature orientale le 4/11 ; *Jupiter*, au contraire, bien observée pendant l'été, se couche de plus en plus tôt, à 1 h 46 le 16/10, à 23 h 24 le 21/11, à 22 h 05 le 15/12 ; Jupiter stationnaire le 29/10 puis en quadrature occidentale le 26/11. *Saturne*, un peu à l'Ouest de Jupiter, est stationnaire le 9 octobre, en conjonction avec la Lune le 4/11 (âge de la Lune : 7,2 jours ; à Paris, occultation de la planète, immersion 19 h 18, angle au pôle 16° , émergence 19 h 57, angle au pôle 312°).

Constellations à faire observer : le grand carré de *Pégase* qui sert de repère pour trouver *Andromède* et la célèbre nébuleuse (bien visible dans jumelle $\times 8$ de 3 cm d'ouverture). *Persée* ; la *Baleine* dont l'étoile « merveilleuse », *Mira* est la première étoile variable cataloguée comme telle, par David Fabricius (1596), période 331, 6 jours.

Lune : dates favorables pour l'observation de la lumière cendrée, le soir : 30, 31 octobre, 29 et 30 novembre, 28 et 29 décembre.

ALCOR et MIZAR.

Encyclopédie Visuelle



diapositives couleurs pour l'enseignement

ASTRONOMIE

collection publiée sous la direction de **G. WALUSINSKI**
Agrégré de Mathématiques, Professeur au Lycée de Saint-Cloud

Le mouvement diurne

La carte du ciel

La Terre et les planètes

La Lune

Le Soleil

La Galaxie

Les galaxies

Présentation par série de 10 vues - chaque série : 11 NF
co-édition armand colin - véronèse

DOCUMENTATION GRATUITE SUR SIMPLE DEMANDE

armand colin - 103, Bd St-Michel - PARIS V^e

Pour s'initier à la logique mathématique.

A l'intention des professeurs désireux de s'initier à la logique moderne, nous sommes en mesure de donner des indications précises qui s'appuient sur une étude comparative de la presque totalité des ouvrages français, anglais, allemands.

Nous avons retenu seulement les ouvrages susceptibles d'être utiles pour une première étude à un professeur du secondaire ou à un étudiant.

1) Français :

Le seul livre disponible est :

Introduction à la logique, par TARSKI (Gauthier-Villars)

Il s'agit de la traduction depuis l'anglais d'un ouvrage dont la première édition polonaise remonte à 1936. L'éminent auteur cherche davantage à fournir une information sérieuse qu'à offrir un manuel de travail approfondi, malgré de bons exercices.

Cela peut être une « première marche ».

Chez Dunod, on annonce la publication de : *Eléments de logique mathématique*, par NOVIKOV (collection Lichnerowicz).

2) Anglais :

La littérature anglo-saxonne présente, depuis quinze ans, un foisonnement de manuels de logique. Deux tendances se manifestent : les uns cherchent l'efficacité immédiate pour le mathématicien ; les autres se concentrent davantage sur les opérations et structures logiques.

L'ouvrage le plus représentatif de la première tendance est :

Introduction to logic, by SUPPES (Editeur : Van Nostrand, Princeton)

Huit chapitres de logique orientés vers les applications mathématiques simples et quatre chapitres d'application à la théorie des ensembles. (A noter du même auteur et chez le même éditeur une suite à ce livre : *Axiomatic set theory*).

Parmi les ouvrages de la seconde tendance :

Methods of logic, by WILLARD QUINE (Editeur : Holt and C°, New-York)
se détache nettement.

D'apparence modeste, ce livre est un chef-d'œuvre de pénétration, d'élégance et de simplicité. Esprit d'une rare clarté, Quine pourchasse la confusion. Mais il le fait naturellement, sans s'appuyer sur toute une machinerie de vocabulaire et de symboles.

Son exposé se développe autour de la notion d'interprétation : il l'enrichit progressivement, il en montre toute l'importance, il en fait un instrument de compréhension profonde.

En conclusion, si le livre de Suppes peut apporter beaucoup au professeur de mathématiques, il ne le fera pas pénétrer au cœur de la logique moderne comme le livre de Quine. L'idéal serait d'étudier Quine, puis Suppes.

3) Allemand :

La littérature allemande se présente sous un jour très différent. La vieille boutade qu'aux U.S.A. les Universités sont faites pour les étudiants et en Allemagne pour les professeurs, se vérifie concrètement.

Derrière les récents ouvrages monumentaux de Schmidt, Schütte ou Scholz, se profile le Herr Professor !

Mais, actuellement, il n'y a pas d'ouvrage d'initiation comparable à Suppes ou Quine.

Nous pouvons cependant conseiller :

Einführung in die Mathematische Logik, de ASSER (Editeur : Teubner, Leipzig)

Tome 1 : *Calcul des propositions*. Tome 2 : *Calcul des prédicats*

Ce sont de petits livres d'un prix abordable (11 DM). L'exposé porte la marque des méthodes ensemblistes de l'école de Münster.

Les ouvrages classiques de Hilbert et Ackerman (Springer, Berlin) et de Carnap (Springer, Wien) sont dépassés en tant qu'ouvrages d'initiation.

Par contre, à l'intention des passionnés de logique mathématique, nous mentionnerons :

Gesetze der mathematischen Logik, de SCHMIDT (Editeur : Springer, Berlin)

Tome 1 : *Aussagenkalkül*. Tome 2 : *Prädikatenkalkül* (en préparation).

Le tome 1 débute par une « Algebra der Logik » développée à partir des axiomes des treillis distributifs. C'est une véritable somme des classiques de la logique. Un seul inconvénient : 79 DM par tome.

**

En conclusion générale, les ouvrages allemands sont plutôt des traités pour spécialistes ; la logique y est une fin en soi ; au contraire, les ouvrages américains cités sont conçus à l'intention de ceux qui se serviront de la logique comme d'un instrument permettant de réaliser avec sûreté une déduction formalisée simple.

G. LECONTOUR.

Dans les revues.

— Le *Bulletin* de la Société des Professeurs d'histoire et de géographie de l'enseignement public, n° 175 de février 1962, publie une étude de M. Carbonell sur les moyennes, par discipline, obtenues aux épreuves du baccalauréat en 1961. Je note, pour chaque section, la moyenne en histoire-géographie puis celle de mathématiques : 1 A) 8,5 et 5,1 ; 1 B) 8,7 et 5,7 ; 1 C) 9,3 et 7,8 ; 1 M) 7,8 et 5,3 ; 1 M') 7,8 et 5,6 ; 1 T) les résultats manquent ; Philo) 8,3 et 7,8 ; S.E.) 8,5 et 7,2 ; M.E.) 8,5 et 7 ; M.T.) 9,2 et 6,5. Je remarque que la moyenne, en mathématiques, est toujours parmi les deux notes les plus faibles (l'histoire, jamais).

— *La Revue de l'Enseignement Philosophique* (avril-mai 62) publie un premier travail d'une commission formée par nos Collègues pour élaborer un « dictionnaire philosophique par les textes ». Voilà qui intéressera nos camarades du Dictionnaire A.P.M. Il s'agissait du mot *définition* ; en mérite-t-il une ? En tout cas, voici quelques citations : « Il ne dépend pas de nous de former les définitions puisqu'il faut y employer des notions qui soient possibles et compatibles, et [que] par conséquent toute définition réelle peut passer pour un théorème ou démontrable ou évident contenant la possibilité de son sujet ; quoique après cela il dépende de nous d'imposer un nom à la chose. » (Leibniz).

« Une définition est une notion suffisamment éclaircie et déterminée. » (Kant).

« La seule définition réelle est le développement de la chose même, mais ce développement n'est plus une définition. » (Engels).

Livres et documents pour enseigner l'astronomie

La réforme de l'enseignement élémentaire de l'astronomie qui débute cette année en Matélem peut-elle coïncider avec une rénovation de cet enseignement ? Cela dépend pour beaucoup, comme toujours, des maîtres qui auront à transformer la lettre d'un arrêté ministériel en une réalité vivante. Il faut aussi tenir compte du fait que la réforme actuelle n'est qu'une étape ; il faut espérer que très rapidement sera réalisé l'étalement de cette initiation astronomique en Seconde, Première et classes terminales.

Quoi qu'il en soit, cet enseignement, plus qu'aucun autre, pose la question des livres à recommander aux élèves et de ceux que les maîtres devraient pouvoir consulter, soit dans leur bibliothèque personnelle, soit dans celle des lycées et collèges. La bibliographie présentée ci-dessous n'a pas la prétention d'être complète ; elle représente un choix et donne de brefs éléments d'appréciation.

I. Pour les élèves. — 1) *Manuels* dits de « cosmographie » : l'abandon de ce terme désuet ne rend pas périmés les ouvrages qui étaient déjà utilisés en Matélem ou en Sciences Expérimentales. — 2) *Lectures complémentaires : Science et Vie* (n° 59) vient de publier un numéro spécial qui, pour un prix très modique (3 NF), donne une vaste documentation actuelle et de bonne qualité. — P. Couderc a écrit de nombreux ouvrages dont certains sont à recommander aux jeunes gens : « Parmi les étoiles » (Bourrellier) pour les moins de 15 ans ; les « Que sais-je ? » sur « Les étapes de l'astronomie », « Le calendrier », « Les éclipses » et « L'astrologie » (en particulier pour les élèves des classes terminales) ; pour les plus savants, on doit recommander, dans la même collection, « La Relativité » et « L'Univers ». — Dans la collection « Encyclopédie essentielle » (Delpire éditeur), les grands (et leurs professeurs) trouveront des faits, des idées et des documents intéressants dans : « Le Soleil » par Etienne Lalou, « Le temps » par F. Le Lionnais, « Le ciel » par J.-C. Pecker ; malheureusement, ces trois livres sont coûteux. — 3) *Revue, annuaires et guides* : On doit faire une mention spéciale à *L'Astronomie*, éditée par la Société Astronomique de France spécialement pour les étudiants (l'abonnement, 5 NF la première année, 3 NF les années suivantes ; C.C.P. Paris 1733, S.A.F., 28, rue Serpente, Paris, 5°) ; les abonnés reçoivent la brochure de J. Texereau : « Note pratique pour les observateurs débutants ». On doit regretter que cette revue ne soit pas plus abondamment diffusée parmi nos élèves : cela dépend de nous qui devons la leur faire connaître. A partir de cette année, le Bureau des Longitudes va éditer un *Annuaire* réduit spécialement conçu pour nos élèves (grâce à l'initiative et au travail de MM. Danjon, Paul Couderc et J. Kovalevsky) ; il contiendra les éphémérides du Soleil, de la Lune et des planètes ainsi que les principaux phénomènes et sera vendu à un prix modique (3 NF, je crois ; Gauthier-Villars édit.). — Le « Manuel pratique d'astronomie » de L. Rudaux et de Vaucouleurs (Larousse édit.) peut aussi être recommandé. — 4) *Cartes* : La carte du ciel boréal (et équatorial) éditée par l'I.G.N. (en vert) est en projection stéréographique ; elle permet des exercices de mesure. — La carte mobile *Planiciel* (éditée par J. Villette, 212, route de la Pyramide, Les Ponts-de-Cé (M.-et-L.) ; C.C.P. Nantes 835-68) permet de reconnaître rapidement les étoiles visibles à une date déterminée ; le prix est 3 NF l'exemplaire (remises de 10 % pour 25 exemplaires) ; un disque de coordonnées équatoriales complète utilement la carte (pour 1 NF) ; je recommande sans hésitation cette carte pour les élèves. — La carte du ciel éditée par *Facteur X* peut rendre également service (éditée sur fort bristol au prix de 2,80 NF : les Editions du Levier, 15, rue du Louvre, Paris, 1°, C.C.P. Paris 10 020-06).

II. Pour les professeurs. — Il est évident que les ouvrages précédents ne sont pas interdits aux plus de 18 ans ; il est même probable que nous serons nombreux à y puiser des renseignements. Mais il faut insister sur les ouvrages qui pour-

ront nous aider à préparer nos leçons. — 1) *Astronomie fondamentale* : Le manuel de « cosmographie » pour M.E., par A. Danjon, est difficile pour les élèves mais très utile pour les maîtres. — V. Kourganoff : « Astronomie fondamentale élémentaire » (Masson, 1961) est un cours pour le certificat Astronomie 1 ; il a l'avantage d'être récent, d'être particulièrement riche d'idées pédagogiques et d'être fort bien présenté. — On peut aussi consulter L. Picart : « Astronomie générale » et J. Delhaye : « Astronomie stellaire » (collection A. Colin). — Le cours « Astronomie générale » de A. Danjon (Gauthier-Villars) est l'ouvrage de référence qui devrait exister dans toutes les bibliothèques de lycée. — De même, la nouvelle *Astronomie Populaire Flammarion* (revue par A. Danjon) est à consulter souvent, en particulier pour les particularités des observations planétaires classiques et les renseignements historiques. — 2) *Astrophysique* : Un livre de E. Schatzman doit bientôt paraître dans la même collection que celui de V. Kourganoff cité plus haut et compléter ce cours de licence. — En attendant, on consultera : J. Dufay, « Introduction à l'astrophysique des étoiles » (coll. A. Colin) ou, du même, « Nébuleuses galactiques et matière interstellaire ». — Ouvrage de référence : « L'Astrophysique générale » de Pecker et Schatzman (Masson). — 3) *Lectures complémentaires* : On consultera « Le Ciel et la Terre », le tome II de l'Encyclopédie Française permanente. — Sur la relativité et ses conséquences : M. A. Tonnelat, « Les principes de la théorie électromagnétique et de la Relativité » (Masson) ; E. Borel, « L'espace et le temps » (P.U.F.) ; P. Couderc, « L'expansion de l'Univers ». — Sur divers sujets d'astrophysique : « Les planètes » par G. Bruhat et E. Schatzman (P.U.F.) ; de A. Dauvillier, « L'origine des planètes » (P.U.F.) ; de D. Barbier, « Les atmosphères stellaires » (Flammarion) ; de G. Bruhat et d'Azambuja, « Le Soleil » (P.U.F.) ; de E. Schatzman, « Origine et évolution des mondes » (A. Michel) ; de A. Dauvillier, « La poussière cosmique, les milieux interplanétaire, interstellaire et intergalactique » (Masson) ; de G. de Vaucouleurs, « L'exploration des galaxies voisines » (Masson). — Sur la radio-astronomie, deux ouvrages récents font le point, Lequeux (collection « Science et progrès », Dunod) ou Boischot (Masson). — Ouvrages en anglais : le classique manuel de Russell Dugan et Stewart, le plus moderne ouvrage de Otto Struve, « Elementary astronomy », très remarquable (New-York, Oxford University Press, 1959), le classique Edwin Hubble, « The realm of nebulae » (Dover) et le si beau Bok, « The milky way ». — 4) *Histoire de l'astronomie* : Comme ouvrages modernes, j'utilise l'édition anglaise de l'histoire de A. Pannekoek (Allen and Unwin) et les vastes ressources de l'Histoire générale des Sciences publiée sous la direction de Taton (P.U.F.). Ouvrages particuliers à signaler : A. Koyré, « La révolution astronomique » (Hermann) ; P. Brunet, « La vie de Clairaut ». En anglais, la vie de Newton par E. N. Andrade (Collins) est excellente et l'histoire de l'observatoire de Greenwich par Spencer Jones est à consulter ; J. B. Sidgwick avait écrit sur W. Herschel : « Explorer of the heavens », un livre agréable à lire (Faber et Faber). — 5) *Guides, revues et annuaires* : *L'Astronomie*, revue de la Société Astronomique de France, est la seule revue mensuelle française uniquement consacrée à l'astronomie (voir plus haut l'adresse et le C.C.P. ; pour les professeurs (ils reçoivent la revue complète), l'abonnement est de 25 NF à Paris, 18 NF en province). Pour la construction d'instruments, consulter Texereau : « La construction du télescope d'amateur » (Edition de la S.A.F.). Guide pour les observations : ou bien l'ancien Flammarion « Les Etoiles » (qui se trouve parfois d'occasion et qu'il ne faut pas laisser échapper), ou bien l'atlas publié par la S.A.F. et qui sera bientôt réuni en volume. On trouve aussi des renseignements divers dans W. M. Smart : « Some famous stars » (Longmans). — 6) *Photos et films* : Des photographies astronomiques de première qualité sont vendues par l'Observatoire de Paris ; A. Colin va éditer sept séries de dix diapositives qui reproduisent des documents astronomiques authentiques ; enfin, deux films peuvent être projetés : « Flammes du Soleil » (cinémathèque de la S.A.F.), « Eclipses » (cinémathèque de l'enseignement public). — 7) *Cartes* : Notre Collègue Berlatier a fait tirer des cartes grand format très claires, muettes ou non, très pratiques pour l'en-

seignement (la carte 8 NF, les deux hémisphères 15 NF. Berlatier, 40, bd des Arènes, Marseille).

Après cette longue liste très incomplète, rappelons qu'au-dessus de tout point de la Terre, il y a une demi-sphère céleste visible et que son observation reste la meilleure leçon d'astronomie.

G. W.

A. DONEDDU. — *Arithmétique générale*, Dunod, Paris, 1962 (16 × 25 cm., 442 p.).

Cet ouvrage, écrit pour les élèves des classes de Mathématiques élémentaires, de Propédeutique, et de Préparation aux grandes Ecoles, se place délibérément en marge des programmes officiels et représente un remarquable effort d'exposition axiomatique.

Il marque, avec quelques autres ouvrages français ou étrangers, un renouveau dans un domaine où la pédagogie se laissait trop bercer dans une somnolente routine.

L'introduction est constituée par le premier chapitre, *Ensembles et relations*. Viennent ensuite quatre parties : Les nombres naturels, - Les nombres rationnels, - Les nombres réels, - Les nombres relatifs.

Les nombres naturels sont construits à partir des axiomes de Péano. La construction est impeccable, sans être jamais pédantesque, sauf cependant au chapitre 5 sur les dénombrements. J'aurais aimé, pour ma part, qu'il y fût établi par récurrence, ce qui est relativement facile, que l'ensemble des antécédents d'un nombre naturel n'est équipotent à aucune de ses parties strictes.

La théorie de la numération, qui ne vient qu'après l'étude de l'addition, de l'ordre, des dénombrements et de la multiplication, est faite directement dans une base quelconque. La partie réservée plus particulièrement à la théorie des nombres : congruences, multiples et diviseurs d'un nombre, nombres premiers, est largement développée.

Les nombres rationnels sont introduits en tant que classes d'équivalences de couples de naturels. Au chapitre 17 sont introduits les nombres b -naires dont les décimaux ne sont qu'un cas particulier : « On appelle nombre b -naire tout nombre rationnel qui possède un représentant dont le dénominateur est une puissance entière de la base b du système de numération choisi. » Cette introduction permet une étude sérieuse des calculs numériques approchés et prépare la notion de nombre réel.

Pour construire l'ensemble des réels, l'auteur part d'un ensemble ordonné et fait apparaître les deux notions imagées de « trou » et de « lacune ». Un trou est un intervalle ouvert vide, une lacune est l'intersection vide d'un ensemble infini d'ouverts emboîtés. « L'absence de lacunes dans $\mathbf{R}^+$ se traduit en disant que $\mathbf{R}^+$ est complet. » En fait, et en toute rigueur, avant de parler de complétion, il faudrait signaler la structure de groupe archimédien de $\mathbf{R}$, car, dans le non-archimédien, les choses sont beaucoup plus compliquées que cela, et ce n'est pas pour rien qu'Hilbert énonce son axiome d'intégralité après l'axiome d'Archimède.

Mais la très légère faute de tactique de l'auteur est immédiatement réparée au chapitre suivant dans une remarquable étude sur la mesure des grandeurs, y compris celle des angles.

Enfin, la dernière partie de l'ouvrage, « nombres relatifs », contient une étude élémentaire très correcte, et très complète, de la fonction exponentielle et de la fonction logarithmique.

Les exercices qui terminent chacun des 23 chapitres sont tous intéressants et sont complétés en fin d'ouvrage par onze problèmes qui vont du niveau du baccalauréat à celui du C.A.P.E.S.

J. I.

Emma CASTELNUOVO. — *I Numeri, aritmetica pratica*, « La Nuova Italia », Firenze, 1962 (15 × 22 cm., 415 p., 16 hors-texte). Prix : 1.1400.

Le mieux est, pour rendre compte de cet ouvrage aux collègues français, de donner une traduction de larges extraits de la préface. Les voici :

Chers collègues, vous remarquerez tout de suite, en feuilletant ce livre, qu'il diffère par bien des aspects des textes traditionnels. Je me permets donc de vous exposer les considérations qui m'ont conduite à cette disposition, espérant qu'un traitement différenciant du classique pourra, une fois de plus, susciter une intéressante discussion sur l'enseignement de l'arithmétique...

Nous savons tous que les difficultés qu'il présente lorsqu'il est dispensé à des enfants entre 11 et 14 ans sont dues surtout au fort contraste entre la partie de caractère pratique et la partie théorique. Un tel contraste dépend évidemment du fait que les problèmes pratiques sont aussi anciens que l'humanité, alors que la systématisation théorique est relativement récente et est le fruit de profondes études critiques.

Voulant porter l'attention des élèves sur des questions tirées effectivement de la réalité — problèmes posés par la vie quotidienne, la technique, l'observation des phénomènes naturels —, j'ai accentué, comparativement aux textes traditionnels, les références au concret. D'autre part, j'ai donné au traitement théorique une importance plus grande que celle accordée en général, pensant opportun que les élèves connaissent les extensions successives des ensembles numériques et des concepts fondamentaux de la mathématique moderne.

Ce que je viens de dire pourrait faire croire que j'ai voulu accentuer encore davantage le contraste entre les deux aspects du nombre, le pratique et le théorique. Mais, en réalité, ce contraste est seulement superficiel et un examen plus approfondi de la question montre qu'entre les deux aspects existe un lien étroit, une harmonie intime, le théorique étant une conséquence nécessaire et naturelle du pratique. C'est ce lien, cette harmonie, que j'ai cherché à mettre en évidence en considérant l'évolution du concept de nombre au travers des siècles, éclairant le nombre par la lumière de l'histoire. Non, certes, l'histoire au sens chronologique, car les faits et les vicissitudes exposés dans le livre ne suivent pas une histoire proprement dite de la mathématique, mais se déroulent selon le profil d'une histoire sociale qu'aurait pu vivre, au cours des siècles, une humanité idéalisée, une humanité qui aurait réussi à étendre le domaine des nombres, sans essais aveugles et sans déviations, chaque fois que se serait présenté le besoin de résoudre les problèmes réels.

En affrontant l'examen des problèmes réels qui exigent une résolution mathématique, j'ai vu qu'il était opportun de les séparer en deux groupes : un qui a ses origines dans les nécessités imposées par la vie quotidienne, et un autre qui provient des observations sur le monde qui nous entoure et qui est né et s'est développé dans une société déjà plus évoluée, fascinée et intriguée par les multiples aspects et les phénomènes du monde de la nature. L'un est donc un « réel » qui nous vient de l'intérieur par nécessité pratique, l'autre un « réel » suggéré par l'observation des phénomènes, et ainsi suscité de l'extérieur.

Comme nous verrons, ces interprétations du mot « réel », rapportées aux problèmes mathématiques, conduisent, par des voies diverses, aux deux conceptions fondamentales de la notion abstraite de nombre, et mettent en évidence comment l'abstrait est, dans chaque cas, une conséquence naturelle du concret.

Nous commençons par la première conception et nous partons des entiers, construits par l'homme par itération de l'unité, dans un but pratique, comme par exemple compter les têtes d'un troupeau. Si nous les combinons par les quatre opérations nous sommes conduits, pour satisfaire aux nécessités de la vie pratique, aux extensions successives du concept de nombre. Le simple problème de devoir diviser trois pains entre quatre personnes conduit par exemple à la construction du symbole $\frac{3}{4}$ comme résultat d'une division. Et, facilement, nous pouvons faire

concevoir à nos enfants que le symbole des fractions a dû être créé pour effectuer des opérations imposées par les nécessités de tous les jours, et que — et cela est extrêmement suggestif — ce symbole a droit à être appelé nombre parce qu'il jouit de certaines propriétés que possèdent les nombres entiers. On arrive ainsi, *par voie synthétique*, c'est-à-dire constructive, à la notion de nombre.

Si l'on se réfère au contraire à la seconde conception, on note que l'observation du monde qui nous entoure fait apparaître le nombre comme une qualité commune à diverses choses : par exemple se dégage l'idée du nombre 2 en observant que chaque homme a deux mains, ou du nombre 10 en observant que dans les deux mains nous avons dix doigts (d'où le système binaire et le système décimal). De même le concept de rapport apparaît par l'observation des ombres d'un rectangle matériel éclairé par une source ponctuelle sur des plans qui lui sont parallèles. C'est ainsi que, *par abstraction*, nous arrivons au nombre. L'idée du nombre que nous nous formons de cette façon est due à l'analyse des situations concrètes qui frappent notre œil et notre esprit par quelque analogie, quelque caractère égal, quelque élément commun. C'est *par voie analytique* que l'on arrive à cet aspect du nombre.

Méthode synthétique et méthode analytique donc conduisent par des voies diverses au concept abstrait de nombre en partant, l'une, je le répète, de la considération des problèmes imposés par la vie sociale, l'autre, des problèmes soulevés par l'observation du monde...

Du chapitre IV au chapitre VII l'élève est conduit à l'étude des ensembles de nombres créés pas à pas et, dans chaque chapitre, on passe de l'étude théorique aux applications concrètes les plus variées. J'ai voulu mettre particulièrement en relief combien l'étude du plus simple ensemble numérique parmi ceux étudiés, celui des entiers, conduit par des considérations élémentaires que le jeune enfant est lui-même capable de faire, au concept de *structure*, fondamental dans la mathématique moderne ; et combien un *symbolisme* simple et naturel, au lieu de conduire à un langage aride et froid, peut ouvrir l'esprit aux plus géniales applications techniques...

L'observation des phénomènes de la nature fait apparaître le nombre sous une forme plus vive et plus variée (chapitres II et IX) : on y découvre les très grands nombres et les très petits, il y apparaît des rapports égaux dans des phénomènes divers, et il y apparaît qu'il n'y a pas un fait auquel ne soit lié quelqu'autre fait et qu'ainsi un nombre est très souvent lié à un autre nombre. Ce sont les phénomènes de la nature qui conduisent ainsi, spontanément, au concept de *fonction*, fondamental au point de vue mathématique et si fascinant et formatif pour l'intelligence d'un enfant.

On remarquera qu'il a été fait un large usage des diagrammes non seulement pour représenter graphiquement une fonction, mais encore pour « soutenir visuellement » la perception d'un fait ou un processus mental trop abstrait...

L'ensemble des exercices se distingue lui aussi notablement de la tradition. Dans les exercices de calcul... on a veillé à ce que l'élève ne perde pas de vue la valeur conceptuelle du nombre : aussi les exercices proposés sont-ils très simples. Je tiens en effet pour dénués de tout intérêt et même dangereux les longs exercices (comme la décomposition en facteurs premiers de grands nombres ou les expressions arithmétiques compliquées) parce qu'ils me paraissent enlever au nombre sa valeur de concept et le réduisent à un pur mécanisme technique...

Pour une traduction certifiée à peu près conforme.

J. I.

Expédition du Cours Revuz aux souscripteurs :

Si vous avez changé d'adresse récemment, lisez attentivement les notes p. 80 ou 98.

BORDAS

27 bis, rue du Moulin-Vert, Paris, 14^e

COLLECTION COSSART ET THERON
PREPARATION AUX MATHÉMATIQUES NOUVELLES

NOUVEAUTÉ

MATHÉMATIQUES

Classe de 3^e

P. THÉRON

Inspecteur Général
de l'Instruction publique

E. GALMARD

Professeur au Lycée
Janson-de-Sailly
Agrégée de l'Université

M. COUTURIER

Ancienne élève de l'E.N.S.
de Sèvres
Agrégée de l'Université

384 pages. Relié 9,80 NF

Rappel

Mathématiques 6^e, 344 p. 9,80 NF

Mathématiques 5^e, 448 p. 9,80 NF

Mathématiques 4^e, 392 p. 9,80 NF

A PARAÎTRE

Mathématiques 3^e mai 1963

Salle d'exposition - 93, rue de Seine, Paris, 6^e

HORAIRE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LES CLASSES DE SECONDE ET DE PREMIÈRE A', C, M ET M'

Le Ministre de l'Education Nationale,

Vu le décret n° 59-57 du 6 janvier 1959 modifié portant réforme de l'enseignement public, notamment son article 24 ;

Vu l'arrêté du 27 juin 1945 modifié relatif aux horaires de l'enseignement du second degré, ensemble l'arrêté du 2 mai 1961 relatif à l'horaire de l'enseignement des mathématiques dans les classes de Seconde et de Première A', C, M et M' () ;*

Le conseil supérieur entendu dans sa séance du 28 février 1962,

ARRÊTE :

Article premier. — L'article 2 de l'arrêté susvisé du 2 mai 1962 est modifié comme suit :

« *Art. 2 nouveau.* — L'horaire de l'enseignement des mathématiques dans les classes de Seconde et de Première A', C, M et M', est fixé à cinq heures par semaine. »

Art. 2. — Les dispositions de l'article précédent entreront en vigueur pour les classes de Seconde à la rentrée scolaire 1962 et pour les classes de Première à la rentrée scolaire 1963.

Art. 3. — Le directeur général de l'organisation et des programmes scolaires est chargé de l'exécution du présent arrêté.

Fait à Paris, le 2 août 1962.

Pierre SUDREAU.

(*) Cf. Bulletin 215, p. 425.

Décret n° 62-891 du 31 juillet 1962 portant création d'un diplôme d'études scientifiques générales dans les Facultés des Sciences

Le Premier Ministre,

Sur le rapport du Ministre de l'Education Nationale,

Vu le décret du 17 mars 1808 portant organisation de l'Université ;

Vu le décret du 28 décembre 1885 modifié relatif à l'organisation des Facultés et Ecoles d'Enseignement Supérieur ;

Vu la loi du 10 juillet 1896 relative à la constitution des Universités ;

Vu le décret n° 58-718 du 8 août 1958 modifiant le régime des études et des examens en vue de la licence ès sciences, modifié par les décrets n° 59-611 du 4 mai 1959 et n° 60-797 du 28 juillet 1960 ;

Vu le décret n° 61-441 du 5 mai 1961 tendant à favoriser la formation technique supérieure dans les Facultés des Sciences ;

Vu l'avis du Conseil de l'Enseignement Supérieur,

DÉCRÈTE :

Article premier. — Il est créé dans les Facultés des Sciences un diplôme d'études scientifiques générales.

Art. 2. — Le diplôme d'études scientifiques générales est délivré aux étudiants qui possèdent à la fois :

a) Le baccalauréat ou un titre admis réglementairement en dispense du baccalauréat en vue de la licence ès sciences ;

b) Un certificat d'études supérieures préparatoire de la licence ès sciences ou un titre admis réglementairement en équivalence de ce certificat ;

c) Deux certificats d'études supérieures de sciences appartenant à l'un des groupes figurant sur une liste établie par arrêté du Ministre de l'Education Nationale.

Art. 3. — Des textes ultérieurs fixeront des modalités d'application du présent décret.

Art. 4. — Le Ministre de l'Education Nationale est chargé de l'exécution du présent décret, qui sera publié au *Journal Officiel* de la République Française.

Fait à Paris, le 31 juillet 1962.

Georges POMPIDOU.

Par le Premier Ministre,

Le Ministre de l'Education Nationale :

Pierre SUDREAU.

Appel urgent aux souscripteurs du cours Revuz

- Si vous avez changé d'adresse depuis que vous avez souscrit, prévenez-nous **immédiatement**.
- Si votre domicile était en Algérie lorsque vous avez souscrit, nous attendrons pour vous envoyer le volume que vous nous ayez précisé votre adresse actuelle.

Ecrivez à Mlle AITOFF, 16, rue de l'Arbalète, Paris, 5^e.

Centres régionaux de formation des maîtres de C.E.G.

Recrutement des stagiaires. Régime des études des élèves-maîtres de 2^e année de formation professionnelle

La présente circulaire a pour objet de définir pour l'année scolaire 1962-1963 :

- les modalités de recrutement des stagiaires des centres régionaux de formation des maîtres de Collège d'enseignement général ;
- l'organisation des études des élèves-maîtres de 2^e année de formation professionnelle de ces mêmes centres.

I. — Recrutement des stagiaires

1^o Instituteurs.

Le contingent à recruter vous est indiqué par le tableau annexé à la présente instruction. Ce recrutement s'effectuera conformément aux dispositions du décret n° 60-1128 du 21 octobre 1960 et des circulaires du 31 mars 1961 et du 2 novembre 1961. Je rappelle que les candidatures des maîtres possédant déjà soit Propédeutique, soit l'un des certificats faisant partie d'une licence d'enseignement, ne seront pas acceptées. En effet, aux termes de l'arrêté du 11-7-1961 (annexe III), les titulaires de ces diplômes sont dispensés des épreuves théoriques du C.A.P. à l'enseignement dans les collèges d'enseignement général.

L'expérience du premier stage a montré la nécessité de fixer une limite d'âge : en principe, vous n'accueillerez pas les demandes présentées par des instituteurs ou institutrices âgés de plus de 35 ans.

Je saisis cette occasion pour vous rappeler que le stage dans les centres régionaux de formation des maîtres de collège d'enseignement général n'est pas un stage d'information, mais un moyen d'entreprendre et de mener à bien de véritables études supérieures. Aussi, je vous demande, chaque fois que ce sera possible, de convoquer les instituteurs ayant fait acte de candidature au chef-lieu du département, en vue d'un entretien avec une commission comprenant, par exemple, la directrice et le directeur de l'Ecole Normale, un ou deux professeurs d'Ecole Normale, un inspecteur de l'Enseignement primaire et les directeurs d'études lorsque leurs fonctions le leur permettront. L'appréciation portée par cette commission sera communiquée à l'Inspecteur d'Académie avant la réunion de la Commission Administrative Paritaire chargée d'émettre un avis sur les candidatures qui vous seront proposées.

2^o Elèves-maîtres.

Le recrutement des élèves-maîtres sera en principe numériquement égal à celui des instituteurs. Il s'effectuera conformément aux dispositions des circulaires du 31-3-1961 et du 2-11-1961.

Les candidatures des élèves-maîtres recrutés par le concours des bacheliers devront être examinées et retenues chaque fois que les intéressés présenteront des aptitudes spéciales pour l'enseignement supérieur.

Si la situation du personnel de votre académie ne vous permet pas de respecter les chiffres prévus au tableau annexé à la présente instruction, j'envisage de vous autoriser à reporter sur une catégorie de stagiaires les postes que vous n'aurez pu attribuer à l'autre. Cette autorisation devra m'être demandée dans les meilleurs délais.

Vos propositions définitives devront m'être parvenues pour le 15 juillet.

II. — Régime des études des élèves-maîtres de 2^e année de formation professionnelle

Ces jeunes gens enseigneront dans les C.E.G. Ils doivent donc acquérir une culture générale suffisante et une formation professionnelle complète. Ceux d'entre eux qui ont été reçus à l'examen de Propédeutique pourront préparer un deuxième certificat de licence. Liberté leur sera donnée de choisir le certificat qui correspond le mieux à leur goût et à leurs aptitudes. Il est toutefois entendu que ce certificat devra faire partie du groupe de la licence d'enseignement de leur spécialité. Ceux qui ont échoué à Propédeutique devront approfondir leur culture générale par l'assistance en Faculté aux cours que vous jugerez les mieux appropriés à cette fin. Ils assisteront également, à l'Ecole Normale, au cours que vous désignerez parmi ceux qui sont organisés à l'intention des stagiaires de 1^{re} année.

Chaque semaine, 15 heures seront consacrées à la formation professionnelle :

- sept pour la formation pédagogique générale,
- et huit pour la formation spécialisée exigée pour l'enseignement dans les collèges d'enseignement général.

Les stages seront organisés comme suit :

1^o du 15 septembre au 15 octobre (date approximative à laquelle reprennent les cours des Facultés), les élèves-maîtres devront accomplir un stage pratique dans les classes primaires et particulièrement dans une classe de cours moyen 2^e année ;

2^o en cours d'année, une journée ou deux demi-journées par semaine seront consacrées à un stage dans un C.E.G.

Ces dispositions s'appliquent à tous les élèves-maîtres stagiaires de 2^e année, quels que soient les résultats obtenus aux examens, à l'issue de la 1^{re} année de stage. Il est en effet indispensable que tous les élèves-maîtres qui, en vertu de l'arrêté du 23-8-1961, peuvent solliciter un poste dans un collège d'enseignement général, reçoivent une formation professionnelle appropriée.

Etant données les obligations faites aux stagiaires de 2^e année, il sera établi à leur intention un programme et des épreuves du C.F.E.N. adaptés à leur formation particulière. Ils vous seront communiqués en temps utile.

Je vous rappelle enfin que l'examen départemental de recrutement des maîtres de collège d'enseignement général est définitivement supprimé à dater de la fin de la présente année scolaire.

Pour le Ministre et par délégation,
*Le Directeur général de l'Organisation
et des programmes scolaires :*
J. CAPELLE.

CENTRES REGIONAUX DE FORMATION DES PROFESSEURS DE COLLEGE D'ENSEIGNEMENT GENERAL

Stagiaires — Année scolaire 1962-1963

Académies	Instituteurs	Elèves-maîtres	Total
Paris	240	240	480
Aix	125	125	250
Besançon	85	85	170
Bordeaux	125	125	250
Caen	130	130	260
Clermont	115	115	230

Dijon	90	90	180
Grenoble	110	110	220
Lille	190	190	380
Lyon	105	105	210
Montpellier	120	120	240
Nancy	100	100	200
Nantes (1)	—	—	—
Orléans (1)	15	15	30
Poitiers	120	120	240
Reims (1)	—	—	—
Rennes	125	125	250
Strasbourg	95	95	190
Toulouse	130	130	260
	2 020	2 020	4 040

(1) Tous les stagiaires des Académies de Nantes et de Reims et les stagiaires des sections littéraires de l'Académie d'Orléans seront reçus dans les Centres des Académies dont dépendait leur département avant le décret du 12-12-1961.

PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DES SECTIONS PRÉPARATOIRES AUX ÉCOLES NATIONALES D'INGÉNIEURS DES ARTS ET MÉTIERS

I et II. — NOMBRES REELS

I. — Nombres arithmétiques.

1. Rappel de la définition des nombres rationnels et des opérations sur ces nombres. Propriétés de ces opérations.

Rappel des propriétés des segments de droite. Axiome d'Archimède. Image d'un nombre rationnel sur une demi-droite.

2. Abscisse d'un point d'une demi-droite. Existence de points d'une droite autres que les affixes des nombres rationnels. Définition des nombres irrationnels.

3. Opérations sur les nombres irrationnels. Propriétés de ces opérations.

4. Définition de l'ensemble des nombres arithmétiques. Opération sur ces nombres. Propriétés.

Correspondance biunivoque entre les points d'une demi-droite et les nombres arithmétiques.

5. Ensemble dénombrable, ensemble continu.

Définition d'une grandeur. L'ensemble des valeurs d'une grandeur est ordonné. Grandeurs mesurables.

Grandeur discrète. Grandeur continue.

6. Valeur approchée d'une grandeur. Valeur approchée à 10^{-n} près. Intervalle d'incertitude. Incertitude absolue. Incertitude relative. Combinaison des incertitudes dans les opérations d'addition, soustraction, multiplication, division.

II. — Nombres relatifs.

1. Orientation d'une droite. Rappel de la définition des nombres relatifs. Opérations sur ces nombres.

2. Grandeurs orientées : mesure algébrique. Comparaison de deux grandeurs par différence. Comparaison de deux grandeurs par leur rapport ; grandeurs proportionnelles.

3. Ensemble des nombres réels.

III. — VECTEURS

1. Définition : segment de droite orienté. Equipollence ; vecteur libre, vecteur lié. Somme, différence, produit par un scalaire ; propriétés de ces opérations.

Décomposition suivant trois vecteurs. Repères composés de trois vecteurs. Changement de repère. Opérations sur les composantes scalaires. Condition de parallélisme. Barycentre.

2. Produit scalaire. Produit vectoriel. Produit mixte. Expression des produits scalaire et mixte, composantes du produit vectoriel dans un repère orthonormé.

3. Vecteurs glissants. Moments. Réduction.

4. Grandeurs vectorielles.

IV. — FONCTIONS ET EQUATIONS

1. Fonction d'une variable. Graphique ; échelles. Variation. Lissage.

2. Fonctions de deux variables. Surface représentative ; courbes de niveau. Fonctions de plusieurs variables. Fonction de point ; champ de scalaires ; champ de vecteurs. Champ de moments ; équiprojectivité.

3. Equations. Variables et constantes. Résolution. Fonctions implicites.

V. — NOMBRES COMPLEXES

1. Définition. Opérations. Propriétés de ces opérations.

2. Représentation d'un vecteur du plan par un nombre complexe. Le nombre i opérateur d'une rotation de $\pi/2$. Image d'un nombre complexe dans un plan. Interprétation géométrique des opérations sur les nombres complexes.

3. Formule de Moivre. Multiplication des arcs.

4. Représentation vectorielle et imaginaire des fonctions sinusoïdales. Amplitude, pulsation, phase. Impédance et transmittance d'un circuit.

VI. — GEOMETRIE

1. Déplacements. Translation. Rotation. Transposition.

2. Symétrie par rapport à un point. Symétrie par rapport à un plan. Produit de deux symétries.

3. Produit de deux transpositions.

4. Transformation reliant deux figures égales, deux figures symétriques. Caractères morphologiques des figures : périodicité ; centre de répétition, axe de répétition ; axe de symétrie, plan de symétrie ; centre de symétrie ; combinaisons de plusieurs des caractères précédents.

5. Homothétie. Similitude.

VII. — STRUCTURES

Structures de groupe, anneau, corps.

Groupes de transformations géométriques, algébriques.

Anneau des entiers, des polynômes entiers.

Corps des rationnels, des réels, des complexes.

VIII. — ANALYSE COMBINATOIRE. Formule du binôme

IX. — ALGÈBRE LINÉAIRE

1. Définition des matrices rectangulaires. Matrice d'une seule ligne, d'une seule colonne. Produit à gauche par une ligne, à droite par une colonne. Multiplication des matrices.

2. Vecteurs à n coordonnées (réelles ou complexes). Espace vectoriel à n dimensions. Bases. Sous-espaces : tout sous-espace peut être défini par des vecteurs indépendants ; en le complétant par d'autres vecteurs indépendants on peut obtenir une base de l'espace.

3. Matrice carrée régulière. Indépendance des lignes ; indépendance des colonnes. Déterminant d'une matrice carrée. Produit de matrices carrées, produit de deux déterminants.

4. Rang d'une matrice rectangulaire.

5. Formes linéaires. Opérations sur les formes linéaires. Représentation de ces opérations par des opérations du calcul matriciel.

Résolution formelle d'un système d'équations linéaires. Discussion.

6. Pratique du calcul matriciel.

Résolution numérique d'un système d'équations linéaires. Méthode de Gauss, Chio, Couffignal ; précision des résultats.

Méthode de relaxation de Southwell.

Lissage d'un relevé de mesures par la méthode de G. Coulmy.

Opérations sur les formes linéaires.

X. — GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. Coordonnées cartésiennes rectangulaires et obliques. Coordonnées polaires, cylindriques, sphériques.

2. Dans un repère orthonormé : distance de deux points ; paramètres directeurs d'une direction de droite ; cosinus directeurs d'une direction d'axe ; changement de repère ; angles.

3. Correspondance entre une courbe et son équation cartésienne. Représentation paramétrique.

4. Equations d'une droite dans le plan, d'une droite et d'un plan dans l'espace. Problèmes d'angles et de distances. Aire d'un triangle. Volume d'un tétraèdre.

5. Lieux géométriques dans le plan.

6. Equations d'un cercle dans le plan, d'une sphère, d'un cercle dans l'espace.

XI. — POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

1. Polynômes ordonnés (variables et coefficients réels ou complexes). Addition et multiplication.

Division des polynômes. Divisibilité par $x - a$. Identité de Taylor. Multiplicité d'un zéro.

Plus grand commun diviseur de deux polynômes.

2. Théorème de d'Alembert (admis sans démonstration). Relations entre les coefficients et les zéros d'un polynôme. Fonctions symétriques des racines (uniquement sur des exemples).

Polynômes à coefficients réels ; zéros imaginaires conjugués ; décomposition en facteurs réels du premier et du second degré.

3. Fractions rationnelles. Opérations.

Division des polynômes ordonnés suivant les puissances croissantes de la variable.

Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

4. Calcul numérique des zéros d'un polynôme. Séparation des racines (Méthode de Graeffe-Peltier, de Parodi). Vecteur propre d'une matrice carrée.

XII. — LIMITES

1. Définition. Somme. Produit. Quotient.
2. Limite d'une suite infinie de nombres réels.
3. Infiniment petits. Infiniment grands. Opérations.

XIII. — CONTINUITE

1. Continuité d'une fonction d'une variable en un point, sur un segment.
2. Fonction inverse. Fonctions inverses des fonctions circulaires, de x^m pour m rationnel.
3. Fonction de fonction.

XIV. — DERIVEE D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE

1. Définition. Calcul de la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction de fonction, d'une fonction inverse.
2. Formules des accroissements finis, de Taylor, de Mac Laurin. Développements limités. Formes indéterminées.
3. Variations de fonctions. Tangente à la représentation graphique. Pente (dans un repère orthonormé). Gradient scalaire (dans un repère orthogonal).
4. Calcul numérique des zéros d'une fonction par approximations successives : méthode de Newton, méthode de la corde, méthode d'itération.

XV. — FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

1. Continuité. Dérivées partielles.
2. Fonction composée et sa dérivée.
3. Formules de Taylor et de Mac Laurin.
4. Fonctions homogènes.
5. Fonction implicite d'une variable (on admet l'existence de la fonction implicite et celle de sa dérivée). Calcul de la dérivée.

XVI. — DIFFERENTIELLES

1. Définitions : différentielle, différentielle totale.
2. Changement de variable. Invariance de l'expression formelle de la différentielle.

XVII. — INTEGRALE DEFINIE

1. Définition (de Darboux).
2. Propriétés : linéarité, majorantes, formule de la moyenne. Permutation de l'intervalle d'intégration.
Dérivation : par rapport à la limite supérieure de l'intervalle d'intégration, par rapport à la limite inférieure, par rapport à un paramètre figurant dans l'intégrand.
Cas où une limite de l'intervalle d'intégration croît indéfiniment, où l'intégrand croît indéfiniment.
3. Fonction logarithmique (intégrale de $1/x$). Fonction exponentielle. Fonctions hyperboliques. Fonctions hyperboliques inverses.

XVIII. — QUADRATURES

1. Fonctions primitives.
2. Changement de variable.
3. Intégration par parties.

4. Calcul numérique d'une intégrale définie par une formule de Newton (trapèzes, Simpson, cotes), par une formule de Gauss.

XIX. — INTEGRALES CURVILIGNES

1. Définition. Réduction à une intégrale définie.
2. Intégrale de différentielle totale.

XX. — GEOMETRIE DIFFERENTIELLE ET CINEMATIQUE

1. Tangente à une courbe plane. Forme de la courbe au voisinage d'un point. Courbure.
2. Dérivées d'un vecteur fonction d'un scalaire.
3. Construction des courbes planes dont les équations sont de la forme $y = f(x)$; $x = x(t)$, $y = y(t)$; $r = f(\theta)$.
Construction des courbes d'équation $f(x, y) = 0$ (uniquement sur des exemples numériques de coniques et de cubiques).
4. Enveloppes. Développées. Développantes.
5. Courbes gauches : plan osculateur, courbure, torsion. Hélice circulaire.
6. Définition des vecteurs position d'un point dans un repère, vitesse, accélération.
7. Mouvements d'un solide. Champ des vecteurs vitesse. Etude de l'accélération dans le mouvement de translation et le mouvement de rotation.
8. Mouvement relatif. Composition des vitesses, des accélérations. Mouvement plan sur plan.
9. Réalisation matérielle des mouvements d'un solide : courbes (surfaces) pouvant glisser sur elles-mêmes ; réalisation des mouvements de translation, de rotation, de pivotement, hélicoïdal.
10. Nomographie. Echelles. Abaques à entrecroisement. Coordonnées parallèles, abaqués à points alignés. Exemples d'abaques à déplacements.
Tracé de familles de courbes orthogonales.

XXI. — EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1. Définition. Interprétation géométrique. Interprétations physiques.
2. Enoncé du problème de Cauchy. Théorème de Cauchy (sans démonstration).
3. Intégration formelle des équations du premier ordre : à variables séparables, homogènes, linéaires.
4. Intégration des équations du second ordre linéaires à coefficient constant.
5. Enoncé du problème de Picard pour les équations du deuxième ordre.
Exemples.

XXII. — SERIES

1. Définition des séries à termes positifs. Convergence. Règles de convergence : de l'ordre d'infinitude, de d'Alembert, de Cauchy.
2. Comparaison d'une série à une intégrale définie.
3. Séries à termes quelconques. Séries alternées. Séries à termes complexes.
4. Somme de deux séries. Produit de deux séries.
5. Calcul approché de la somme d'une série.
6. Séries entières. Séries à variables réelles ; intervalle de convergence. Séries à variables complexes ; cercle de convergence.
Exponentielle complexe. Interprétation physique.
7. Somme de deux séries entières. Produit de deux séries entières.
8. Dérivation. Intégration. (Sans démonstration).
9. Calcul approché de la valeur d'une intégrale définie et d'une solution d'une équation différentielle.

XXIII. — GEOMETRIE DESCRIPTIVE

Généralités sur les surfaces : plan tangent et normale. Surfaces circonscrites. Contour apparent d'une surface. Tangente à l'intersection de deux surfaces, à une section plane.

Cônes et cylindres. Représentation en se bornant au cas d'une directrice horizontale sans branche infinie. Intersection avec une droite. Section plane. Détermination d'une directrice horizontale. Développement.

Intersection de surfaces coniques et cylindriques, les surfaces étant définies par deux directrices horizontales. Méthode générale de recherche de l'intersection. Tangentes remarquables.

Exemples d'intersections de prismes, cylindres, pyramides, cônes. On se bornera au cas où les intersections n'ont pas de branches infinies.

Examiner des cas de pénétration et d'arrachement. Donner un exemple de développement.

Intersection de cônes et de cylindres du second degré dans le cas où l'intersection se décompose. On admettra qu'il en est ainsi quand les surfaces ont une section plane commune ou sont bitangentes. Exemples simples.

Sphère. Représentation. Section plane.

Intersection d'une surface cylindrique ou conique et d'une sphère.

CERTIFICATS DE PROPEDEUTIQUE SCIENTIFIQUE

N.D.L.R. — *De nombreux Collègues ont émis le vœu que le Bulletin publie des énoncés proposés aux examens de Mathématiques Générales et Physique (M.G.P.) ou de Mathématiques, Physique et Chimie (M.P.C.). En attendant de pouvoir fournir à tous nos Collègues de véritables Annales de Propédeutique, nous publierons quelques énoncés. Merci aux Collègues qui nous les ont fait parvenir.*

FACULTE DES SCIENCES DE STRASBOURG

(Session de juin 1962)

M.G.P. — 1^{re} épreuve de Mathématiques (durée : 4 heures).

N. B. — Dans tout le problème, n désigne un nombre entier, x un nombre réel et z un nombre complexe. On peut traiter n'importe quelle question, à condition d'admettre les résultats suggérés par l'énoncé des questions précédentes.

1) Donner avec précision les définitions des trois expressions soulignées dans le texte ci-dessous (cotation : 5/40).

2) On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n} - \log \frac{n}{n-1}$ ($n \geq 2$).

Etudier sa convergence, et en déduire que la suite de terme général :

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \quad (n \geq 1)$$

a une limite s .

3) Déterminer la limite de $\frac{\log(x+1)}{\log x}$ lorsque x tend vers l'infini.

4) On pose $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + \frac{1}{2}$, ..., $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$;

Calculer la limite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ (on pourra par exemple la déduire de 1) et 3)), et le rayon de convergence de la série de terme général $a_n z^n$. On désignera par f la fonction que définit cette série sur la portion de l'axe réel intérieure au cercle de convergence.

5) Énoncer avec soin (sans démonstration) les théorèmes impliquant que f est continue, et dérivable ; montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad (1-x)y' - y = \frac{1}{1-x}.$$

6) Intégrer l'équation (E) et en déduire $f(x)$.

7) Soit $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ la somme d'une série entière convergente pour $|z| < 1$. Développer la fonction $\frac{1}{1-z} g(z)$ en série entière ; en déduire à nouveau $f(x)$.

En déduire aussi la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) z^n$; quel est son rayon de convergence ?

2° épreuve de Mathématiques (durée : 3 heures).

Soit R^4 l'espace à quatre dimensions formé des vecteurs (a, b, c, d) à composantes réelles ; on notera $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ et $\vec{e}_4$ les vecteurs de la base canonique de R^4 . On note par ailleurs M_4 l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 4 à coefficients réels.

1) On définit une application f de R^4 dans M_4 par la formule :

$$f(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a & c & b & d \\ c & a & d & b \\ d & b & a & c \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une application linéaire ; on déterminera son noyau et les matrices $U_i = f(\vec{e}_i)$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. Soit V l'image de f ; déterminer une base de V et sa dimension.

2) Montrer que l'on a $U_1 = I$ (matrice unité), et que U_i est la puissance $(i-1)^e$ de $A = U_2$ pour $i = 2, 3, 4$. Calculer A^4 . En déduire que le produit de deux matrices appartenant à V est une matrice appartenant à V .

3) Soit t un nombre complexe. On résoudra l'équation :

$$(1) \quad A \cdot \vec{x} = t \cdot \vec{x}$$

où $\vec{x}$ est un vecteur inconnu à quatre composantes complexes ; discuter suivant les valeurs de t . En déduire l'existence d'une matrice S inversible et d'une matrice diagonale D (que l'on déterminera) telles que $A = S \cdot D \cdot S^{-1}$.

4) Déduire de 2) et 3) la formule :

$$(2) \quad f(a, b, c, d) = S \cdot (a \cdot I + b \cdot D + c \cdot D^2 + d \cdot D^3) \cdot S^{-1}.$$

Utiliser cette formule pour calculer les valeurs propres et le déterminant de la matrice $f(a, b, c, d)$.

M.P.C. — Epreuve théorique (durée : 3 heures).

- 1) Calculer les intégrales :

$$f_n(t) = \int_0^1 \cos \pi x \cos n\pi(x+t) dx \quad n \geq 0.$$

(on distinguera le cas n pair du cas n impair).

- 2) Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = f_n\left(\frac{1}{4}\right)$.

- 3) Développer en série entière $\frac{1}{x^4 + 1}$ et $\frac{x^2}{x^4 + 1}$ en déduire que pour

$-1 < x \leq 0$, on a :

$$\sum_0^{+\infty} \left(\frac{x^p}{4p+1} + \frac{x^p}{4p+3} \right) = \frac{1}{y} \int_0^y \frac{dt}{t^4 + 1} + \frac{1}{y^3} \int_0^y \frac{t^2 dt}{t^4 + 1}$$

où $y = \sqrt[4]{-x}$.

- 4) Montrer que la fraction rationnelle $\frac{t^2 + i}{t^4 + 1}$ où i est le symbole des imaginaires peut se mettre sous la forme :

$$\frac{at + b}{P(t)} + \frac{ct + d}{Q(t)}$$

où a, b, c, d sont des nombres complexes, P et Q étant des polynômes du second degré à coefficients réels, sans racines réelles.

- 5) En déduire la valeur des intégrales :

$$I = \int_0^y \frac{t^2 dt}{t^4 + 1} \text{ et } J = \int_0^y \frac{dt}{t^4 + 1} \text{ (on calculera pour cela } I + iJ).$$

- 6) En admettant que la formule de la 3^e question soit encore valable pour $x = -1$, que peut-on en conclure ?

Epreuve pratique (durée : 2 heures).

- 1) Intégrer l'équation différentielle :

$$xy' - y = x^3 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x.$$

- 2) On désigne par $f(x)$ la solution de l'équation précédente telle que $f'(0) = 0$. Ecrire le développement en série entière de $f(x)$ et préciser son intervalle de convergence.

- 3) En utilisant le développement en série trouvé dans la question précédente calculer l'intégrale :

$$\int_0^{1/2} f(x) dx$$

avec cinq décimales exactes.

N. B. — On attachera une grande importance à la façon dont seront conduits les calculs et à leur justification théorique.

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD - GRENOBLE

9, Grande Rue - Téléphone 44.01.96

6 bis, rue de l'Abbaye - Tél.: ODE 60.90 - PARIS

COURS DE MATHÉMATIQUES

par ROUX et MIELLOU
Professeurs au Lycée de Grenoble

TARIF JUIN 1962

Taxe locale incluse

Arithmétique 6°	épuisé
Dessin géométrique 6° et 5°	1,88 NF
Arithmétique 5°	épuisé
Géométrie 5° et 4° - Programme 1958	7,35 NF
Arithmétique et Algèbre 4° - Programme 1958	5,70 NF
Arithmétique et Algèbre 3° - Programme 1958	7,13 NF
Géométrie 3° - Programme 1958	6,52 NF
Géométrie 5°, 4°, 3° - Programme 1958	13,90 NF
Algèbre 2° A.B.C.M. - Programmes 1947	9,18 NF
Compléments de mise à jour au 18 juillet 1960, Algèbre 2° C.M.	1,62 NF
Géométrie 2° A.B.C.M. - Programmes 1947	9,18 NF
Compléments de mise à jour au 18 juillet 1960, Géométrie 2° C.M.	6,12 NF

NOUVEAUTÉS :

ALGÈBRE 2° A'CM et M' - Progr. 18 juillet 1960	10,18 NF
GEOMETRIE 2° A'CM et M' - Progr. 18 juill. 60	15,— NF
ALGÈBRE et TRIGONOMETRIE 1 ^{re} - Toutes sections	12,24 NF
GEOMETRIE 1 ^{re} A'CM et M' - Progr. 2 mai 1961	10,20 NF
GEOMETRIE 1 ^{re} A.B. - Prog. 2 mai 1961	5,60 NF

QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU
BACCALAUREAT, 1^{re} partie, A.B.C.M. 5,14 NF

NOUVEAUTÉS :

L'Epreuve de Mathématiques au Baccalauréat.

(Résumés - Applications - Problèmes).

Fascicule I - Algèbre, Trigonométrie, Cinématique, 15 octobre.

Fascicule II - Géométrie, Géométrie analytique, janvier 1963.

N. B. — Il n'existe pas de corrigés d'exercices pour ces ouvrages

RENTRÉE 1962

COURS DE MATHÉMATIQUES : R. MAILLARD

Conforme aux nouveaux programmes, ce nouveau cours se propose de renouveler la matière de l'enseignement tant par l'exposé des leçons que par le choix des sujets de travaux pratiques et des problèmes qui intéressent l'élève par l'actualité de leurs sujets. Après les 6^e, 5^e, 4^e, 3^e, 2^e voici :

Viennent de paraître :

Classes de 1^{re} A'CMM' par G. GIRARD et A. LENTIN.

Géométrie

Un volume 16 x 24 cm de 272 pages, illustré, cartonné, plastifié.

Algèbre. Trigonométrie et notion d'analyse

Un volume 16 x 24 cm de 336 pages, illustré, cartonné, plastifié.

Classe de 2^e AB, par R. CAHEN.

Mathématiques

Un volume 16 x 24 cm de 288 pages, illustré, cartonné, plastifié.

Pour paraître prochainement :

Classes de Mathématiques élémentaires : par G. GIRARD et A. LENTIN.

Arithmétique - Algèbre - Notions d'Analyses
Programmes 1962

Tome I :

Les nombres

Extensions de la notion de nombre
arithmétique

**CLASSIQUES
HACHETTE**

**79, Bd St Germain
Paris**

Réunion du Bureau, 13 juin 1962

Présents : GILBERT, VISSIO, RAMIS, Mlle LONJARET, ROSSAT-MIGNOD et WALUSINSKI ; *excusés* : Mlle FÉLIX, CHAZAL.

1) Après le Comité du 13 mai 1962, le Président a aussitôt écrit au Ministre de l'Education Nationale pour lui demander audience. A cette date, aucune réponse n'avait été obtenue. Le Bureau décide d'adresser une nouvelle lettre et de chercher toutes les interventions utiles pour obtenir un contact avec le Ministère sur nos revendications urgentes : a) les 5 heures en Seconde et Première A' CM M' ; b) des mesures pour employer à l'enseignement les professeurs qui n'enseignent pas (en particulier ceux qui font leur service militaire) et pour favoriser le recrutement ; c) des mesures concrètes pour aider les professeurs qui font l'effort de poursuivre leur formation scientifique.

Dans le cas désastreux où nous n'aurions satisfaction sur aucun point, l'édition d'un supplément au *Bulletin* qui paraîtrait avant la rentrée alerterait les Collègues.

2) Parmi les Commissions, celles du dictionnaire et des programmes fonctionnent ; le *Bulletin* publiera leurs travaux. La tâche de la Commission sur la formation des maîtres dépendra de la suite qui sera donnée par le Ministère à notre projet de « Commission Nationale de l'Enseignement Mathématique ».

3) La répartition des tâches entre les membres du Bureau est précisée, ainsi que cela est indiqué sur la page 2 de la couverture.

Mlle Lonjaret fait remarquer que la Trésorerie est un peu serrée : l'augmentation des dépenses provient de la hausse des prix d'impression, du volume croissant de nos publications, et de l'augmentation des frais de gestion maintenant que l'effectif de l'A.P.M. dépasse 4 000. Il faut envisager, pour les années suivantes, une révision du taux de cotisation.

Cela apparaît d'autant plus utile qu'à la lumière des remarques précédentes, le Bureau se voit contraint de répondre par la négative à une proposition pourtant très intéressante de la Librairie Vuibert, qui offrait de nous servir les *Annales de Propédeutique*.

Pour le *Bulletin*, compte tenu du travail encore important qui reste à faire pour le volume Revuz, il est décidé de publier le n° 224 à une date aussi voisine que possible du 30 septembre ; ce sera le premier *Bulletin* de la 42^e année ; son sommaire sera spécialement conçu pour servir à la propagande auprès de nouveaux adhérents : on s'efforcera d'y faire figurer la plus grande variété d'articles. Le *Bulletin* 225 sera consacré aux énoncés des concours.

Audiences ministérielles (12 juillet 1962)

Il serait oiseux de relater les nombreuses démarches que les membres du Bureau, et en particulier le Président, durent entreprendre pour obtenir enfin, le 12 juillet à 17 h. 30, audience du Ministre. Vissio et Walusinski accompagnaient le Président.

Dès l'abord, et alors que nous souhaitions présenter les demandes a, b, c (rappelées plus haut) dans leur ensemble, le Ministre nous a interrompus pour dire qu'il venait de refuser de signer l'arrêté des 5 heures. Ses raisons ne nous ont pas

convaincus : il ne faut pas faire de réformes partielles, il ne faut pas surmener les élèves. Nous savons bien qu'on ne fait pas non plus de réforme générale (faute de moyens matériels, entre autres motifs) ; quant au surmenage scolaire, nous ne pensons pas qu'il soit accru lorsque les élèves disposent de 5 heures au lieu de 4 pour étudier un programme donné. Deux remarques importantes : au sujet des 5 heures, le Ministre n'a pas fait allusion à la pénurie de professeurs ; d'autre part, il nous a déclaré n'avoir eu connaissance du problème que depuis le matin de ce 12 juillet où il avait refusé de signer l'arrêté préparé par la Direction générale de l'organisation scolaire et des programmes.

Nos Collègues croiront sans peine que nous avons insisté, malgré l'opposition du Ministre, sur l'unanimité de leurs avis quant à ces 5 heures. Le Président avait en main le lourd paquet des bulletins de notre référendum.

Le Ministre a fait meilleur accueil à notre seconde demande. En particulier, il nous a mis en rapport avec son Directeur de Cabinet, spécialement chargé des rapports avec le Ministre des Armées. Il est légitime d'espérer que pour tous les jeunes mobilisés qui le désireront (pour cela, qu'ils se fassent connaître et, par conséquent, qu'on se le dise), certaines mesures d'affectation spéciale, voire de démobilisation anticipée, pourront leur permettre d'enseigner.

Enfin, quant à notre troisième demande, le Ministre nous a dit qu'il désirait également entreprendre une action positive en faveur de l'enseignement scientifique. Il nous a proposé de lui faire des propositions précises, par écrit, pour la rentrée, afin de constituer cette Commission Nationale de l'Enseignement Mathématique.

Pour conclure, et alors que nous revenions sur le sujet des 5 heures, il nous a invité à voir sans tarder M. Capelle, Directeur général de l'Organisation scolaire et des Programmes.

M. le Directeur général a bien voulu nous recevoir peu après (entre-temps, il avait vu le Ministre) ; il nous a confirmé que, depuis plusieurs semaines, il avait soumis le problème des 5 heures au Ministre ; pour lui, un aspect délicat de la question est la grave pénurie de professeurs et les charges déjà considérables de ceux qui sont en exercice. M. le Directeur général nous a toutefois assurés que la question serait suivie de près par lui-même.

CHRONIQUE DES REGIONALES

Clermont.

La Régionale de Clermont de l'Association des Professeurs de Mathématiques s'est réunie le jeudi 24 mai, sous la présidence de M. Blanc, Professeur à la Faculté des Sciences, pour étudier le nouveau programme de la classe de Mathématiques.

Elle constate avec satisfaction que ce programme donnera aux élèves un premier contact avec les structures algébriques fondamentales et les illustrera par des exemples pris tant en géométrie qu'en algèbre, que le travail des élèves poursuivant leurs études scientifiques sera facilité par une connaissance plus précise et plus étendue des fonctions d'une variable réelle, et que ceux-ci seront familiarisés avec les premières notions de géométrie analytique.

Toutefois, de nombreux Collègues craignent que l'horaire traditionnel de 9 heures ne permette pas, malgré les suppressions faites dans l'ancien programme, de traiter à fond le nouveau. Cette année surtout, faute de manuels, certaines parties du cours devront être dictées et il en résultera un retard appréciable.

Les Collègues présents à la réunion proposent donc que les chapitres suivants ne fassent l'objet, en 1963, d'aucune question au baccalauréat :

1) Dans Arithmétique, algèbre et analyse :

— Théorème de Rolle et des accroissements finis (dans V, 7).

2) Dans Géométrie et cinématique :

- Géométrie descriptive (tout le chapitre I).
- Déplacements et symétries dans l'espace (V, 4, 5, 6).
- Mouvement de translation d'un solide (VII, 6).

L'Assemblée demande au Président de l'A.P.M. de bien vouloir soumettre cette proposition à l'Inspection générale, et le remercie à l'avance de sa démarche.

Bordeaux. Résumé des activités durant l'année scolaire 1961-62 :

- 19 oct. 61 : Echange de vues sur les horaires et programmes des classes de 1^{re} et 2^e.
- 23 nov. 61
7 déc.
11 jan. 62
25 jan.
22 fév.
15 mars
29 mars
- Conférences sur les rationnels.
- Conférences sur les entiers.
- 10 mai : Etude du nouveau programme de Math.-Elém.
Préparation de l'année 62-63.
- 14 juin : Remerciements à M. Colmez.

Tenu à l'écart de ses occupations pendant plusieurs mois, notre Secrétaire Signoret, actuellement tout à fait rétabli, vient de reprendre en main les activités de la Régionale, ayant ainsi présidé à la mise en train du programme 61-62 en octobre dernier et à la préparation de l'année 62-63 lors de nos dernières réunions.

M. Colmez, Professeur à la Faculté des Sciences, avait bien voulu accepter de poursuivre ses Conférences sur la construction des entiers et des rationnels. Au total, sept exposés extrêmement intéressants ont été suivis par les Collègues attirés par ces questions.

Les horaires et programmes des classes de 1^{re} et 2^e ont fait l'objet d'un échange de vues lors de la rentrée scolaire, de même que, au mois de mai, le nouveau programme de Math.-Elém. A ce sujet, beaucoup de Collègues regrettent profondément, face à des services de plus en plus chargés, de ne pouvoir se « recycler » aussi complètement et rapidement qu'ils le souhaiteraient. Il semble qu'il y ait là un problème important et délicat.

Pour 1962-63, une enquête est en cours auprès des soixante Collègues inscrits cette année. Chacun est invité à préciser les thèmes qu'il aimerait approfondir (ou même exposer).

Le Secrétaire adjoint : SEM.

Lettres ou imprimés.

● **A propos des travaux pratiques.** D'une lettre d'un Collègue de l'Académie de Besançon : « Est-il vrai que tout travail mérite salaire ? Nos administrateurs ont demandé dans tous les établissements une réponse à un questionnaire sur les travaux pratiques en Mathématiques. Et quel questionnaire ! Un professeur de l'établissement a dû rédiger la réponse (7 heures m'ont été nécessaires). Le Ministre a reçu, de ce fait, plusieurs mètres cubes de papier ! Alors, que pensez-vous de ma première question ? »

Je répondrai à notre Collègue qu'à un si vaste questionnaire, il ne fallait sans doute répondre que partiellement et sur les points sur lesquels on avait certainement quelque chose à dire ; ensuite, que ce quelque chose, adressé au *Bulletin de l'A.P.M.*, aurait été le bienvenu. Mais il est malheureusement évident que l'A.P.M. n'aurait pas mieux payé que l'Administration. Pas moins non plus, dans ce cas.

● **Ecoles Normales et Matélem.** D'une lettre de notre Collègue Mme Le Goff (E.N. d'Institutrices de St-Germain-en-Laye), nous tirons les remarques suivantes : 1° Le concours d'entrée à l'E.N., en 1962, a permis d'admettre 88 élèves ; il y avait 490 candidates ; il y a certainement plus de dix candidates qui auraient pu faire de bonnes Normaliennes, mais qui n'entreront pas faute de place. Nous disons 10 pour être prudents ; or, le Ministère dit qu'il manque de maîtres ! — 2° Nous avons déjà signalé (*Bulletin* 217, p. 105) que, l'an dernier, sur 17 candidates orientées par les professeurs vers Matélem, seules 10 candidates avaient été acceptées par le Ministère. Ces 10 candidates ont toutes été reçues en juin à la 2° partie Mathématiques, dont deux avec la mention *Bien*. Est-il présomptueux de penser que, parmi les sept autres candidates, certaines auraient pu obtenir des résultats analogues ? — 3° Pourquoi l'Ecole Normale de St-Germain ne reçoit-elle pas un plus grand nombre d'élèves ? Pourquoi l'Ecole est-elle toujours privée d'une classe de Matélem ? On dit que le département de Seine-et-Oise serait choisi par l'Education Nationale comme département pilote ; un tel département peut-il avoir une Ecole Normale sans classe terminale Mathématiques ? Le Colosse de Rhodes tenait en sa main droite une lanterne pour guider les pilotes ; faudrait-il penser que la lanterne de notre Administration est mal éclairée, ou que le grand maître de l'Université n'a rien d'un colosse ?

● **Annuaire de l'Education Nationale 1962.** A la page 138, dans la liste des chaires de la Faculté de Droit et des Sciences Economiques de Paris, à la suite des *Mathématiques*, de l'*Econométrie* et des *Mathématiques applicables à l'Econométrie*, nous trouvons : *Physiologie et Pathologie obstétricales*.

Voilà une branche des Mathématiques appliquées dont la parturition sera facilitée !

Le carnet de la Rédaction.

● **A propos des 5 heures.** Inutile de revenir sur certains aspects des déclarations du Ministre lors de l'audience qu'il a accordée au Bureau de l'A.P.M. ; l'essentiel est que l'arrêté ait finalement été signé. On peut toutefois se demander pourquoi la mesure ne sera applicable en Première qu'en septembre 63 ; espère-t-on, d'ici-là, trouver tous les professeurs nécessaires ?

Quoi qu'il en soit, pour les élèves qui entrent en Première en septembre 62, rien ne viendra remédier aux inconvénients qui résultent de l'horaire en vigueur l'an dernier en Seconde. Pourquoi, dans tous les cas où le professeur de Première accepterait de faire une heure supplémentaire, ne pas autoriser, y compris financièrement, cette réalisation dès septembre 62, de ce qui sera officiellement réglementaire un an plus tard ? En l'absence de notre Président (en voyage à l'époque), j'ai présenté cette suggestion à M. le Directeur de l'Organisation scolaire. Voici sa réponse : « *Il me paraît difficile de laisser s'instituer des inégalités dans la préparation des candidats en autorisant des horaires différents selon les possibilités des établissements.* » Opinion irréfutable, si le baccalauréat devient un concours et si le principe de l'égalité devant la loi reste aussi bien respecté demain... qu'il l'a toujours été dans notre République...

● **Finances de l'A.P.M.** Notre Trésorière entretiendra nos Collègues, mieux que je ne saurais le faire, des divers aspects de la question. La nécessité d'augmenter la cotisation a paru évidente au Bureau, dans sa réunion de juin dernier. Mais il était trop tard pour cette année 1962, le prochain Comité ne se réunissant qu'en octobre. Il va donc falloir, en 62-63, assurer une « navigation au plus près ».

On notera en effet que, pour la somme de 10 NF, chaque adhérent aura reçu en 1962 quatre *Bulletins* ordinaires (total de 380 pages) et trois *Annales*. Et c'est une année « maigre », en raison du décalage du *Bulletin* d'énoncés retardé de sep-

tembre à novembre (grâce à quoi nous pensons « sortir » le 224 très peu après la rentrée). Ces arguments financiers seront encore plus éclatants lorsque la Trésorière aura précisé, par exemple, le prix de revient d'un *Bulletin* tel que ce n° 224.

Les retards de publication, en 1961-62, ont été, à l'époque, expliqués par la publication des brochures 4, 5 et 7. Et, pour ces travaux d'édition, il faut reconnaître que nous sommes des amateurs, non des professionnels !

Il faudra donc proposer un taux de cotisation plus élevé. A titre indicatif, voici les taux pratiqués par quelques Associations comme la nôtre : Union des Physiciens (5 bulletins annuels), 15 NF ; Union des Naturalistes (bulletin trimestriel), 20 NF ; Société des Professeurs d'Histoire et de Géographie (5 bulletins par an), 15 NF ; Associations des Professeurs de Philosophie (4 bulletins de 48 pages), 7,50 NF. En Grande-Bretagne, la nouvelle et dynamique Association of Teachers of Mathematics édite le trimestriel *Mathematics Teaching* et la cotisation est £ 1 (soit environ 14 NF).

● **Sommaires à venir.** Je ne répéterai pas les vastes projets présentés dans le n° 223 (p. 375). Mais il faut bien insister un peu sur la nécessité pour *tous* les Collègues de nous adresser des matériaux pour la rédaction. Et que personne ne se vexe si nous n'utilisons pas *immédiatement* ce qu'on nous envoie. Un vieil ami comparait la composition d'une revue à la préparation d'un repas ; si vous recevez une crème délicieuse alors que vous êtes en train de « sauver » une mayonnaise, la crème devra attendre, elle n'en sera pas moins savourée ultérieurement.

Rappelons que le *Bulletin* devrait publier de nombreux énoncés originaux et des solutions. Qui n'en a pas une réserve dans la musette ?

Ce n° 224 donne quelques avis sur des nouvelles questions au programme de Matélem ; les deux rédacteurs réclament la contradiction ; pensez à eux.

● **Les brochures de l'A.P.M.** Qu'il s'agisse du volume Revuz ou des autres publications de l'A.P.M., je ne saurais trop insister sur la nécessité de lire attentivement l'annonce p. 31.

Le bloc-notes de l'A.P.M.

● **Les « Bulletins ».** Ce *Bulletin* 224 de septembre-octobre 1962 est le premier numéro de la 42^e année. Le programme de publication en 1962-63 est le suivant : *Bulletin* 225 (novembre), contenant les énoncés de concours ; 226 (décembre), *Bulletin* normal, suite du 224 ; 227, 228 et 229, pour les Annales du B.E.P.C. et du Baccalauréat ; 230, février ; 231, avril, et 232, juin, soit six *Bulletins* et trois « Annales ».

La Rédaction s'efforcera de *tenir* ce programme ; elle le réalisera plus facilement avec l'aide de tous (voir *Le Carnet de la Rédaction*).

● **Le Cours de l'A.P.M.** Malgré la période des congés, — notre imprimeur, heureusement, y a droit comme tout le monde —, la correction du tome I du Cours Revuz a progressé. Nous espérons que l'expédition pourra être faite dans le courant d'octobre. La confection des étiquettes pour cette expédition (environ 1 500 adresses !) a commencé le 28 août. Nos souscripteurs seront donc enfin récompensés de leur longue patience. Quant à ceux qui n'ont pas souscrit, qu'ils se reportent à l'annonce spéciale à ce sujet, p. 31.

● **Les brochures de l'A.P.M.** Si les finances de l'A.P.M. le permettent, nous espérons recueillir en volume les études de M. Huisman (*Bull.* n°s 223, 224 et suivants), avec quelques compléments. Cela constituerait une sorte de lecture prélimi-

naire au Cours de Revuz. Quant aux autres brochures de l'A.P.M., consultez à ce sujet l'annonce spéciale, p. 31, et passez vos commandes selon la voie recommandée.

• **Les réunions du Comité.** On sait que, traditionnellement, le Comité se réunit aux environs du 15 octobre et du 15 janvier. Tous les Collègues ayant des suggestions ou critiques à présenter doivent donc s'adresser avant ces dates soit à un membre du Bureau, soit à un membre du Comité.

Appel urgent aux souscripteurs du cours Revuz

- Si vous avez changé d'adresse depuis que vous avez souscrit, prévenez-nous **immédiatement**.
- Si votre domicile était en Algérie lorsque vous avez souscrit, nous attendrons pour vous envoyer le volume que vous nous ayez précisé votre adresse actuelle.

Ecrivez à Mlle AITOFF, 16, rue de l'Arbalète, Paris, 5^e.

COURS DE MATHÉMATIQUES

par **Pierre BOUTIN**

Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure
Professeur agrégé au Lycée Janson-de-Sailly

NOUVEAUTE

Géométrie, cl. de 2^e C.M.

RAPPEL

Classe de sixième	10,00 NF
Classe de cinquième	9,50 NF
Classe de quatrième	11,00 NF
Classe de troisième	11,50 NF

Editions DE GIGORD, 15, rue Cassette, PARIS-VI^e

MASSON et C^{ie}, Éditeurs à PARIS

COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES

G. CAGNAC

L. THIBERGE

Inspecteurs généraux de l'Instruction Publique

NOUVEAUTE :

ALGÈBRE

2^e

E. GILET

Censeur des Etudes du Lycée J.-B.-Say

A', C, M et M'

Y. CROZES

Professeur agrégé au Lycée Henri-IV

Programmes 1960

Un volume de 402 pages, avec figures et nombreux exercices ; cartonné .. **19 NF**

EN PREPARATION :

GÉOMÉTRIE

2^e

E. GILET

Censeur des Etudes du Lycée J.-B.-Say

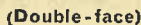
A', C, M et M'

Y. CROZES

Professeur agrégé au Lycée Henri-IV

Programmes 1960

Un volume, avec figures et exercices ; cartonné début 63



Possibilités de calculs étendues avec un minimum de manipulations.



CHEZ VOTRE FOURNISSEUR

MATÉRIEL COLLECTIF

d'Enseignement des Mathématiques

J. MARVILLET, R. GIRARD, A. ADAM

Matériel recommandé par l'I.P.N., sous le N° d'agrément : M. 58 875

LES NOUVEAUX CORPS GÉOMÉTRIQUES TRANSPARENTS

Les volumes (au nombre de 22)

L'octaèdre inscrit dans le cube avec différentes droites remarquables. — Le dodécaèdre. — L'icosaèdre, etc...

Les coniques (au nombre de 8).

Le Théorème de Dandelin :

Cas du cône avec section elliptique et sphères de Dandelin.

Cas du cône avec plans sécants.

Cas du cylindre avec section elliptique et lignes caractéristiques, etc...

La Géométrie descriptive — Projections et tracés (au nombre de 13).

Représentation des projections de points, de droites et de points ayant même projection. — Epure d'une droite quelconque et de droites perpendiculaires à un plan de projection, etc.



(En co-édition avec M. Pierron, Sarreguemines).

Envoi sur demande de la notice de description.

Armand COLIN, 103, Boulevard Saint-Michel - Paris (V°)

ARISTO

-SCHOLAR

0903
0903 LL
0903 VS

La règle à calcul appropriée aux besoins de l'Elève

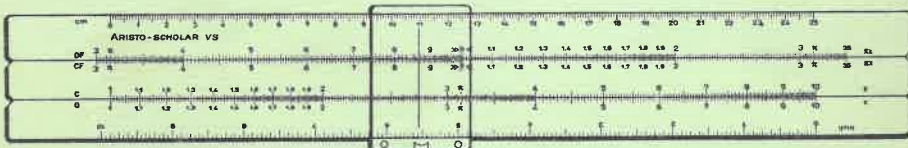


ARISTO-Scholar 0903



ARISTO-Scholar 0903 LL

Recto semblable à celui de la 0903



ARISTO-Scholar 0903 VS-2

Recto semblable à celui de la 0903

De nombreux Professeurs préfèrent à la règle à calcul ARISTO-Scholar 0903 modèle standard, l'ARISTO-Scholar VS pour les avantages que lui procurent ses échelles décalées et leur disposition extrêmement claire.

Certains débutent en utilisant l'ARISTO-Scholar 0903 LL afin de pouvoir se servir de cette même règle à calcul à 2 échelles exponentielles dans les classes supérieures.

Il existe un grand modèle de démonstrations pour le tableau noir de chaque règle à calcul.

Agence générale pour la France:

LA DIFFUSION GÉNÉRALE FRANÇAISE

17, rue du Colisée · PARIS 8ème · ELYsées 95—31

DENNERT & PAPE · ARISTO-WERKE · HAMBURG