

RAPPORT

SUR LA COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES *

(CLASSE DE PREMIÈRE)

AU CONCOURS GÉNÉRAL

DES LYCÉES ET ÉCOLES NORMALES EN 1961

On se reportera à l'énoncé (1) pour les notations et le numérotage des questions. Le sujet proposé consistait à étudier quelques propriétés de deux points M et N, situés sur la diagonale OI d'un cube et symétriques par rapport à I.

$$OI = a ; IM = IN = b, \text{ avec } b < a.$$

1°

Il est évident que les angles $\widehat{IOA}$, $\widehat{IOB}$, $\widehat{IOC}$ sont égaux et ont pour cosinus $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Enfin : $\cos \widehat{IOJ} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$

On démontre aisément que MR est parallèle à AI et que NS est parallèle à IB. Le triangle IAB étant équilatéral, l'angle aigu des droites MR et NS est donc égal à $\frac{\pi}{3}$.

2°

Les droites MR et NS se projettent orthogonalement sur le plan OAB suivant les droites RP et SQ respectivement. Celles-ci se coupent en T qui est la trace de (D) sur OAB.

— Le parallélisme de MP et de TF et les égalités :

$$MP = PR = OR = ST = TF$$

entraînent que MPTF est un rectangle. Il en est de même du quadrilatère NQTE ($NQ \parallel TE$ et $NQ = QS = OS = RT = TE$).

— Etude des triangles MFN, MEN, NEF et MEF.

$\widehat{MFN}$ se projette sur le plan OAB suivant l'angle droit $\widehat{PTQ}$. Or, MF est parallèle au plan de projection, donc $\widehat{MFN}$ est droit. Le triangle MFN est rectangle en F. De même, le triangle MEN est rectangle en E.

Le triangle NEF est évidemment rectangle en E et, en outre, $NE = EF$. Par suite, ce triangle est rectangle et isocèle. Il en est de même du triangle MEF (rectangle en F et $MF = FE$).

Les triangles MFN et MEN sont égaux (hypoténuse commune MN et $MF = PT = QT = NE$). De même, les triangles NEF et MEF sont égaux (EF commun et $MF = NE$).

* Le jury était composé de M. Maillard, inspecteur général, président ; Mlle Lema-surier, professeur (E.N.S.I.) au lycée Claude-Bernard ; M. Benméraï, professeur (Mathématiques Supérieures) au lycée Louis-le-Grand ; M. Debey, professeur (Institut agronomique) au lycée Henri-IV ; M. Serruques, professeur (Navale) au lycée Saint-Louis.

(1) Voir *Bulletin de l'A.P.M.*, n° 216 (p. 546).

3°

I étant le milieu de MN, hypoténuse des triangles rectangles MFN et MEN, on a : $IM = IN = IF = IE$.

I est donc le *centre de la sphère circonscrite* au tétraèdre MNEF, le rayon de cette sphère est b .

Arêtes du tétraèdre : a) $NE = MF = EF$.

$$NE = MF = EF = PT = \frac{PQ}{\sqrt{2}} = \frac{MN}{\sqrt{3}} = \frac{2b\sqrt{3}}{3}$$

b) $NF = ME$.

$$NF = ME = PT\sqrt{2} = \frac{2b\sqrt{6}}{3}$$

c) $MN = 2b$.

Aires des faces :

$$\text{aire (MEF)} = \text{aire (NEF)} = \frac{MF^2}{2} = \frac{2b^2}{3}$$

$$\text{aire (MNE)} = \text{aire (MNF)} = \frac{NF \times MF}{2} = \frac{2b^2\sqrt{2}}{3}$$

Volume :

$$V = \text{aire (MEF)} \times \frac{QT}{3} = \frac{4b^3\sqrt{3}}{27}$$

4°

(Faire la figure dans le plan OAB).

L'égalité évidente des triangles JBS et JAR entraîne :

$$JS = JR \text{ et } \widehat{SJR} = 1 \text{ droit.}$$

Le quadrilatère JSJR est donc un carré.

Il en résulte que : $KJ = KR = KO$. Le point K, équidistant de O et de J, est situé sur AB. On démontre facilement que le lieu de K est le segment ωB (ω milieu de AB). Le lieu de T en résulte, puisque $\vec{OT} = 2 \cdot \vec{OK}$.

La droite IK appartient au plan IAB. La projection orthogonale de J sur la droite IK appartient donc au plan IAB et à la sphère de diamètre IJ et, par suite, au cercle d'intersection. Son lieu s'en déduit, en vertu du lieu de K.

5°

Les égalités : $KO = KJ' = KS = KT = KJ = KR$ prouvent que le cercle, de centre K et de rayon OK, contient les points : O, J', S, T, J et R. Son diamètre étant JJ', il passe aussi par L et T'.

$$\text{On a : } OK^2 = \frac{OT^2}{4} = \frac{OR^2 + OS^2}{4} = \frac{OP^2 + OQ^2}{8}$$

$$\text{Or : } OP = (a - b) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ et } OQ = (a + b) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Donc : } r^2 = OK^2 = \frac{a^2 + b^2}{6}$$

Enfin, les points K, G, R', S', L' sont alignés sur la diagonale S'L' du carré S'LL'S.

6°

$$IK^2 = IJ^2 + KJ^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2 + b^2}{6} = \frac{3a^2 + b^2}{6}.$$

La distance des centres des deux sphères est : $d = \sqrt{\frac{3a^2 + b^2}{6}}$.

Leurs rayons sont : b et $r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{6}}$.

La condition de contact est : $d = |b \pm r|$ ou $d = |b + \varepsilon r|$ (1),
avec : $\varepsilon = +1$ (contact extérieur) ou $\varepsilon = -1$ (contact intérieur).

Une première élévation au carré fournit :

$$2\varepsilon br = d^2 - b^2 - r^2 = \frac{a^2 - 3b^2}{3} \quad (2).$$

Une deuxième élévation au carré fournit :

$$36b^2r^2 = (a^2 - 3b^2)^2 \text{ ou } 6(a^2 + b^2)b^2 = (a^2 - 3b^2)^2$$

soit : $3b^4 - 12a^2b^2 + a^4 = 0$ (3).

On en déduit : $\frac{b^2}{a^2} = 2 + \frac{\sqrt{33}}{3}$, ou : $\frac{b^2}{a^2} = 2 - \frac{\sqrt{33}}{3}$.

La condition $b < a$ exige que l'on ne peut conserver que : $\frac{b^2}{a^2} = 2 - \frac{\sqrt{33}}{3}$.

On trouve alors que : $\frac{a^2 - 3b^2}{a^2} = \sqrt{33} - 5$ qui est positif. La relation (2)

prouve alors que $\varepsilon = +1$. Le contact est extérieur. Valeur approchée de $\frac{a}{b}$ (question non posée).

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2 - \frac{\sqrt{33}}{3}}. \text{ Or : } \sqrt{33} \simeq 5,7445626$$

$$2 - \frac{\sqrt{33}}{3} \simeq 0,0851458$$

On en déduit : $\frac{b}{a} \simeq 0,292$ par excès.

7° (a variable, b fixe, $b < a$)

K est aligné avec R' et S' (5°) et les points R' et S' sont fixes puisque

$$OR' = OS' = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

Le lieu de K est la demi-droite, portée par la droite R'S', d'origine S' et qui ne contient pas R'.

Les sphères (U) contiennent le cercle fixe :

dans le plan zOJ' ;

dont le centre est le milieu du segment R'S' ;

$$\text{dont le rayon est } \frac{OJ'}{2} = \frac{OS'}{\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{6}}.$$

Enfin, les plans KIJ passent par la droite menée par J' parallèlement à Oz.

Résultats et observations

1° 282 candidats ont pris part à l'épreuve. Le nombre est en augmentation sur celui du concours de 1960 qui était 226. Après une première et double correction, un lot de copies retenues a donné lieu à une nouvelle correction par l'ensemble du jury.

L'impression générale est bonne. Le jury a pu proposer 4 prix (dont le 3° *ex-æquo*) et 9 accessits. La copie classée 1^{re} a mérité 17,5 sur 20 et la 13° (9° accessit) 13,6 sur 20.

2° La bonne qualité du peloton de tête ne doit pas faire croire que l'ensemble des candidats est d'un niveau très supérieur à celui des années précédentes. Malgré les recommandations contenues dans le rapport du concours de 1960, une « proportion importante de copies nulles encombre inutilement le concours ». Le jury insiste encore pour que « la sélection soit faite avec plus de discernement par les professeurs et les chefs d'établissements ».

Une statistique sommaire donne les résultats suivants :

Notes entre	0 et 5	(sur 20) :	38 %	(dont quelques zéros)
—	5 et 10	:	39 %	
—	10 et 13	:	18 %	
—	13 et 17,5	:	5 %	

Il y a donc environ 40 % des candidats, au moins, qui ne sont pas dignes de se présenter au concours.

3° La présentation matérielle laisse encore à désirer : trop de ratures, marge inexistante.

4° Pour ce qui concerne le détail, il a été noté :

2° question. — On oublie de démontrer dans un grand nombre de copies que deux des triangles sont isocèles.

3° question. — Les calculs sont généralement exacts.

4° question. — Certains candidats ont fait appel, bien inutilement, à une représentation analytique pour la détermination des lieux de K et de T. Dans deux copies seulement, apparaît le souci de préciser, avec soin, le lieu de la projection de J sur IK.

5° question. — Les méthodes employées pour démontrer que huit points sont cocycliques (et que cinq autres sont alignés) sont souvent longues.

6° question. — Si l'équation fournissant $\frac{b}{a}$ est généralement obtenue dans les copies récompensées, le choix méthodique de la solution du problème fait, souvent, défaut.

7° question. — Cette question a été assez bien résolue (par les candidats qui l'ont abordée).

Pour terminer, le Président du Jury recommande aux professeurs d'attirer l'attention des élèves, qui seront désignés pour les concours futurs, sur la nécessité d'améliorer la présentation matérielle des copies :

- marge importante, tracée à la règle ;
- absence de ratures ;
- clarté et simplicité des figures, celles-ci devant être dessinées en face du texte correspondant ;
- précision du texte de la solution et rédaction de celle-ci en bon français.

Le jury, après cet avertissement, tiendra le plus grand compte de l'observation (ou de l'inobservation) de ces indications dans l'appréciation des copies des concours à venir.

L'Inspecteur général, Président du Jury,
R. MAILLARD.