

AGREGATION MASCULINE DE MATHÉMATIQUES CONCOURS DE 1961

Rapport de M. l'Inspecteur général Dontot, Président du Jury

Le jury était composé de M. Dontot, Inspecteur général de l'Instruction publique, président ; de M. Couchet, professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier, vice-président ; de M. Roseau, professeur à la Faculté des Sciences de Lille ; de M. Lesieur, professeur à la Faculté des Sciences de Paris ; de M. Riche, professeur de Mathématiques Spéciales au lycée Saint-Louis ; de M. Chazel, professeur de Mathématiques Spéciales au lycée Louis-le-Grand.

Epreuves écrites

Elles ont eu lieu le lundi 15, mardi 16, jeudi 18 mai de 8 heures à 14 heures et le samedi 20 mai, de 8 heures à 12 heures. Pour la troisième fois, les épreuves écrites étaient celles prévues par les arrêtés du 31 juillet 1958, savoir :

- une composition de Mathématiques élémentaires et Spéciales ; durée : six heures ; coefficient 3 ;
- une composition d'Analyse ; durée : six heures ; coefficient 3 ;
- une composition de Mécanique ; durée : six heures ; coefficient 2 ;
- une composition de Mathématiques appliquées ; durée : quatre heures ; coefficient 2.

Cette dernière composition remplace les épreuves pratiques des concours antérieurs à 1959 : calcul numérique (coefficient 1) et épure (coefficient 1).

Le nombre des candidats inscrits est passé de 337 en 1960 à 383 en 1961 ; il a donc augmenté de 46 unités.

Le jury possède dans ses archives les résultats des concours depuis 1926. De 1926 à 1931, le nombre des candidats inscrits oscille entre 84 et 104 ; il dépasse 200 à partir de 1936. Retombé à 169 en 1952, il remonte lentement jusqu'à 234 en 1957, puis, plus rapidement, passe à 250 en 1958, 253 en 1959, 337 en 1960 et 383 en 1961. Il est possible qu'il avoisine 450 en 1962.

En 1926, le nombre des candidats qui renonçaient à subir les épreuves écrites, ou qui abandonnaient avant la fin de ces épreuves, était négligeable ; il n'en est plus de même actuellement pour des raisons que nous avons analysées dans le rapport de 1960.

Dans les trois dernières années, 18 % des candidats inscrits ont, chaque année, ou bien renoncé à se présenter aux épreuves écrites (12 % environ), ou bien abandonné au cours de ces épreuves. En 1961, il y avait 383 inscrits ; les correcteurs de la première composition ont reçu 337 copies et les correcteurs de la quatrième composition 314 copies seulement ; ces nombres correspondent aux pourcentages de défaillants habituels.

Entre 1959 et 1961, le nombre des inscrits à l'Agrégation masculine de Mathématiques est passé de 253 à 383, en augmentation de 130 unités ; le nombre de ces inscrits, qui ont remis au moins une composition, est passé de 225 à 337, il a donc augmenté de 112 unités, et celui des candidats, qui ont remis les quatre compositions

* Voir les énoncés des épreuves écrites, *Bulletin* 216 (p. 463).

écrites, est passé de 208 à 314, augmentant de 106 unités. Il n'est donc pas exagéré de penser que chacun des correcteurs recevra en 1962 une cinquantaine de copies à corriger de plus qu'en 1961. Avant de leur parvenir, ces copies sont centralisées au ministère où se fait le contrôle des copies, leur numérotage pour en assurer l'anonymat, l'envoi aux correcteurs ; ce travail délicat requiert des soins minutieux, de nombreux contrôles et vérifications et, par conséquent, demande d'autant plus de temps qu'il y a plus de copies à classer. Lorsque la correction est terminée, les notes attribuées à des copies jusque-là connues par leur seul numéro, c'est au jury qu'incombe un autre travail tout aussi délicat, nécessitant aussi des contrôles et des vérifications, pour reconstituer les listes nominatives des candidats et les notes méritées par chacune de leurs compositions. La signature de la liste des admissibles par M. le Ministre, la rédaction des convocations aux épreuves orales, la préparation de celles-ci demandent aussi beaucoup de temps et retardent d'autant plus la date des épreuves orales que le nombre des candidats est plus grand.

En 1961, les épreuves orales ont pu commencer le 29 juin ; l'effort demandé aux correcteurs s'est révélé trop considérable ; les marges de sécurité sont trop réduites. Il faudra vraisemblablement, en 1962, fixer une date beaucoup plus tardive pour le début des épreuves orales. Or, il existe pour l'Agrégation masculine de Mathématiques, et pour elle seulement, un problème très particulier de dates qui risque de rendre impossible l'organisation de ces épreuves. Les candidats normaliens de la rue d'Ulm se présentent à l'Agrégation à la fin de leur troisième année d'école et non à la fin de la quatrième année ; or, à la fin de cette troisième année, les élèves de la rue d'Ulm sont convoqués par l'autorité militaire pour une période I.M.O. (Instruction Militaire Obligatoire) et, en 1961, cette convocation les appelait dans les camps ou écoles aux dates des 10, 15 ou 16 juillet. Il n'a pas été possible, malgré les interventions de M. le Ministre, d'obtenir le changement de ces dates de convocations. Les candidats normaliens admissibles ont donc été convoqués pour les épreuves orales avant ces dates, ce qui n'a été possible que parce que les oraux ont commencé le 29 juin.

A cette difficulté majeure s'ajouterait naturellement celle qui serait due à la prolongation des épreuves orales jusqu'à une date imprévisible dans le courant du mois d'août. Pour ces deux raisons, nous avons le devoir de demander que le problème pratique de la répartition dans le temps de la correction des épreuves écrites et de l'organisation des épreuves orales soit mis d'urgence à l'étude. Le président du jury n'a pas les pouvoirs nécessaires pour le résoudre à lui seul.



Nous définirons, comme dans les rapports des années précédentes, les pourcentages caractérisant le concours de 1961, en ne dénombrant que les candidats ayant subi la totalité des épreuves écrites. Leur nombre a été de trois cent quatorze (314) en 1961 et de deux cent soixante-dix-sept (277) en 1960. Il a donc augmenté de 37 unités.

Cette augmentation porte sur les catégories suivantes :

	1960	1961	+	—
Professeurs en exercice dans les lycées	121	146	25	
Assistants et étudiants	46	74	28	
Elèves de l'E.N.S. Ulm	17	23	6	
Elèves de l'E.N.S. Saint-Cloud	21	17		4
Elèves de l'E.N.S.E.T.	16	13		3
Elèves des I.P.E.S. et C.P.R.	56	41		15
	277	314	59	22

On constate cette fois que l'augmentation du nombre des candidats résulte surtout de l'augmentation (25) du nombre des professeurs en exercice et du nombre des assistants et étudiants (28). Nous soulignons chaque année le double caractère de l'Agrégation, concours de recrutement proprement dit d'une part pour les élèves des Ecoles Normales Supérieures, les étudiants, assistants, élèves des I.P.E.S. et C.P.R., c'est-à-dire en 1961 pour 168 candidats et, d'autre part, concours de changement de catégorie pour les 146 professeurs en exercice qui s'y présentent. Nous nous étions inquiétés en 1960 du fait que le nombre des professeurs en exercice (121) allait en diminuant chaque année. Nous constatons qu'il tend de nouveau à augmenter. C'est un symptôme rassurant car il serait, à notre avis, regrettable que l'Agrégation ne demeure pas un concours accessible aux professeurs en exercice. Nous ne cessons de plaider pour l'amélioration, pour ces professeurs, des conditions de la préparation (cf. rapports des années précédentes).

*
**

Le jury s'est réuni pour la première fois au lycée Saint-Louis le lundi 26 juin 1961. Il a effectué le classement des candidats ayant remis au moins une copie.

La moyenne sur 20 exigée pour l'admissibilité avait été en 1960 de 7. Nous avons constaté que les totaux obtenus par des candidats de même rang en 1960 et en 1961 différaient en moyenne de 10 points sur 100 (la différence oscille entre 8 et 13 unités) ; les totaux les plus forts étant ceux de 1961. Il est donc vraisemblable que les sujets des compositions écrites ont été en 1961 mieux adaptés aux possibilités des candidats ; nous souhaitons évidemment que cette mise au point, cette humanisation du concours permettent à l'avenir d'exiger d'un candidat à l'Agrégation qu'il ait la moyenne aux épreuves écrites pour être admissible.

Nous n'en sommes pas encore là et le jury a proposé pour l'admissibilité les 107 candidats ayant obtenu au minimum 7,9 sur 20 pour l'ensemble des quatre compositions écrites. Le pourcentage des admissibles a donc été, comme en 1960, de 34 %. Parmi ces admissibles, on dénombre 22 professeurs en exercice et 85 étudiants. Le pourcentage des professeurs en exercice admissibles est de 15 % seulement (25 % en 1959, 23 % en 1960) et celui des étudiants de 50 % comparable aux pourcentages de 1960 (44 %) et de 1959 (53 %). Nous n'insisterons pas à nouveau sur les difficultés que trouvent les professeurs en exercice sur le chemin de l'agrégation ; ces difficultés augmentent tous les jours, parce que le recrutement des professeurs de lycées étant de plus en plus difficile, les tâches de ceux qui demeurent sont de plus en plus accablantes.

Un seul candidat a réclamé le bénéfice de l'ordonnance du 19 octobre 1958 prévoyant des mesures destinées à favoriser l'accès des Français musulmans d'Algérie à la fonction publique ; il a subi l'épreuve facultative de langue arabe, obtenu une majoration de points malheureusement insuffisante pour assurer son admissibilité.

Epreuves orales

La liste d'admissibilité ayant été publiée le 26 juin dans la soirée, les examens oraux ont pu commencer le 29 juin. Au cours de celles-ci, deux candidats nous ont fait connaître que, pour des raisons de santé, ils renonçaient à subir les épreuves orales. Les 105 candidats restants ont été répartis en quatre séries dont les appels ont eu lieu le 29 juin, le 6, le 13 et le 20 juillet au lycée Saint-Louis. Un candidat a renoncé, malgré nos avis, à subir les épreuves orales après avoir pris connaissance du texte de sa première leçon. Il n'y a eu aucun incident.

Nous renvoyons au rapport de 1960 pour tous renseignements sur l'organisation des épreuves orales en séries. Cette réforme a eu pour objet principal de réduire à une semaine la durée du séjour obligatoire à Paris de chaque candidat (au lieu d'un mois).

Résultats définitifs

Ils ont été proclamés au lycée Saint-Louis le mardi 25 juillet à 17 h. 30 et affichés aux lieux habituels. La liste des candidats nommés agrégés comportait 66 noms, parmi lesquels ceux de 22 anciens admissibles.

Trois candidats n'ont pas subi les épreuves orales : deux excusés pour cause de maladie et un troisième qui a renoncé après avoir pris connaissance du texte de sa première leçon. Les totaux des candidats admissibles ayant subi toutes les épreuves oscillent entre 117 et 315 (resp. en 1960 entre 117 et 318). Ont été proposés pour le titre d'agrégé tous ceux (66) dont le total était égal ou supérieur à 190.

Seize admissibles classés à l'écrit avec des numéros supérieurs à 66 (nombre des agrégés) figurent sur la liste des agrégés. Il y en avait 15 en 1960. Nous avons, dans les rapports antérieurs, commenté ce résultat, au caractère permanent, qui témoigne de l'importance, dans de nombreux cas décisifs, des épreuves orales dans le concours d'agrégation. Il est normal qu'il en soit ainsi ; un professeur, qu'il se destine à l'Enseignement ou à la Recherche, doit pouvoir faire un exposé clair, intelligemment composé et par conséquent limité, sur un sujet connu de lui, après une préparation suffisante. Il est regrettable de constater que certains candidats, ayant des connaissances très suffisantes, continuent à croire que c'est aux auditeurs à mettre de l'ordre dans les vérités qu'ils soumettent en vrac à leur attention ; l'une des tâches du professeur est de dégager d'un exposé l'essentiel, qui seul bien souvent a des chances d'être retenu.

*
**

La question des Agrégations et, d'une façon plus immédiate, le problème de la place des agrégés dans l'Enseignement et la Recherche sont à l'ordre du jour. Nous n'avons pas à l'examiner dans un rapport destiné à rendre compte à M. le Ministre des résultats du concours de 1961. Les problèmes du présent sont encore, et pour la dernière fois, de notre compétence ; les problèmes de l'avenir, lorsque les données en auront été précisées, seront de la compétence de nos successeurs.

Ce que nous pouvons dire, en conclusion de ce rapport, en conclusion aussi des huit rapports précédents que nous avons signés, c'est que le classement des agrégés, obtenu bien entendu par une addition qui traduit très brutalement les opinions plus nuancées des membres du jury, ne cause pas de surprise ; les bons candidats sont toujours à peu près aussi nombreux. D'une année à l'autre, les totaux pour un rang donné sont comparables ; en 1961, nous l'avons signalé, l'écrit a été jugé avec plus de libéralité ; il en résulte un décalage d'une dizaine de points entre ces totaux et, de ce fait, un allongement de la liste des agrégés.

Les modifications que des circonstances diverses ont obligé d'apporter aux conditions techniques du concours : nature et coefficients des compositions écrites, suppression de l'épure et du calcul numérique, institution de séries d'oral, ont parfois compliqué les tâches du jury, inspiré quelques regrets, mais n'ont pas altéré la précision du classement. La suppression de l'obligation jadis faite aux candidats de séjourner à Paris pendant toute la durée des épreuves orales a reçu une approbation unanime. Nous regrettons par contre l'obligation qui nous a été faite par l'augmentation du nombre des admissibles de constituer deux demi-jurys, l'un examinant les candidats en Mathématiques élémentaires, l'autre en Spéciales. Pour porter un jugement rassurant sur un candidat, il faut l'avoir entendu dans toutes les épreuves orales. Nous souhaitons donc très vivement que, s'il y a une réforme technique de l'Agrégation de Mathématiques, elle propose une autre solution du problème de l'oral.

Nous voulons, une dernière fois, exprimer notre gratitude d'abord aux membres des divers jurys que nous avons présidés depuis 1953, dont la confiance et l'amitié nous ont soutenu ; nous voulons aussi rendre hommage aux animateurs des excel-

lentes préparations organisées dans les Facultés sans oublier celle qui rend d'immenses services aux moins favorisés, organisée par le Centre National d'Enseignement par correspondance et Télévision, et enfin exprimer notre reconnaissance à l'Association des Professeurs de Mathématiques qui prend à sa charge les soucis et les frais de l'impression de nos rapports.

Statistique des résultats de l'agrégation masculine de Mathématiques
(Candidats ayant remis les quatre compositions écrites)
Session 1961

Professeurs en exercice

	CANDIDATS	ADMISSIBLES	REÇUS	Situation des agrégés au 1 ^{er} octobre 1961					
				E.N.I.	Lycées	Lycées techniques	S.M. Congés	C.N.R.S. 4 ^e année	Assistants
Ens. élém. et comp.	2	1	0						
Ens. moderne et class	109	11	7		6		1		
Enseign. Techn.	25	7	2			2			
S.M.	7	3	1				1		
Candid. étrangers.	3	0							
Totaux	146	22	10		6	2	2		

Etudiants - Assistants - C.P.R.

	CANDIDATS	ADMISSIBLES	REÇUS	Situation des agrégés au 1 ^{er} octobre 1961					
				E.N.I.	Lycées	Lycées techniques	S.M. Congés	C.N.R.S. 4 ^e année	Assistants
E.N.S. Ulm	23	23	21		3			10	8
E.N.S. St-Cloud ..	17	14	8	1	4			2	1
E.N.S. E.T.	13	10	4			4			
C.P.R.	41	4	3		2		1		
Etudiants. Congés	27	13	8		6		2		
Assistants	47	21	12		2				10
Totaux	168	69	56	1	17	4	3	12	19

	CANDIDATS	ADMISSIBLES	RECUS	E.N.I.	Lycées	Lycées techniques	S.M.	C.N.R.S. 4 ^e année	Assistants
Etudiants, Assist., C.P.R. I.P.E.S. Congés	168	85	56	1	17	4	3	12	19
Prof. en exercice.	146	22	10		6	2	2		
Totaux	314	107	66	1	23	6	5	12	19

RAPPORTS ANNEXES

A) COMPOSITIONS ECRITES

I. -- Composition de Mathématiques et Spéciales

(Rapporteur : M. Riche)

La première partie de cette épreuve comportait l'étude d'une famille de paraboles de foyer donné et admettant deux points donnés pour points conjugués. L'étude d'un problème corrélatif faisait l'objet de la deuxième partie. La troisième partie, consacrée à la géométrie projective, conduisait, par des moyens détournés, à la considération d'une famille de coniques, circonscrites à un triangle fixe, admettant deux droites données pour droites conjuguées.

Dans la première partie, l'équivalence des propriétés concernant les points A et B et leurs projections P et Q sur Δ a généralement été établie par le calcul. Neuf candidats sur dix ont correctement traité cette première question. En revanche, l'équivalence suivante, concernant les triangles ABC et A'B'C', n'a été présentée de façon convenable que dans une copie sur dix. Beaucoup de candidats ont réussi à montrer que si ABC est conjugué par rapport à la parabole, A'B'C' est pour celle-ci un triangle circonscrit. Les plus habiles ont vu là une conséquence immédiate du résultat précédent. D'autres ont formé l'équation de B'C' et l'ont « identifiée » à celle de la tangente au point de la parabole situé sur la parallèle, menée par A, à l'axe de cette parabole. Aucun de ceux qui ont utilisé cette dernière méthode n'a pu établir la réciproque. Dans la démonstration de cette réciproque, s'est généralement glissée une regrettable confusion de notations : ABC étant obtenu en menant par chaque sommet du triangle A'B'C' la parallèle au côté opposé, il s'agissait, par exemple, de vérifier que les symétriques de F par rapport aux côtés du triangle circonscrit A'B'C' étaient les projections orthogonales, sur Δ , des points A, B, C — projections notées antérieurement P, Q, R. Il était donc incorrect et dangereux de désigner, par ces mêmes lettres P, Q, R, les symétriques de F par rapport aux côtés du triangle A'B'C'. D'autres erreurs proviennent de l'emploi fantaisiste des symboles d'implication. A titre d'exemple, citons la faute suivante relevée dans de nombreuses copies :

BC est la polaire de A $\iff$ B'C' est tangente à la parabole.

Enfin, signalons que deux candidats ont su rattacher ces propriétés à celles des faisceaux linéaires tangentiels.

L'étude des paraboles φ faisait intervenir l'équivalence des propriétés suivantes :

- { A et le point I à l'infini de D sont conjugués par rapport à une parabole
 { de foyer F et de directrice Δ .

— { La projection orthogonale de A sur Δ appartient à la perpendiculaire X
 } menée par F à D .

Il s'agissait là d'une extension banale de l'équivalence mentionnée au début du premier paragraphe.

Dans le cas * où $A \notin X$, Δ enveloppe la parabole π , de foyer A , admettant X comme tangente au sommet. Evidemment, X et la perpendiculaire en F à FA sont des positions particulières de Δ auxquelles correspondent deux coniques impropres qui méritaient d'être signalées. Peu de candidats se soucient du cas exceptionnel où $A \in X$. L'enveloppe de Δ est alors impropre. On peut regretter que des questions aussi simples aient été pour certains l'occasion d'inquiétantes digressions sur les « faisceaux ». Les paraboles φ ne constituent ni un faisceau linéaire ponctuel, ni un faisceau linéaire tangentiel.

Le lieu du pôle de D a généralement été étudié par le calcul, notamment par ceux qui avaient déjà recherché l'enveloppe de Δ par ce procédé. Malgré la note et les recommandations préliminaires, peu de candidats tentent de situer ce lieu par rapport aux données. Quelle que soit la méthode utilisée, il convient ici encore de mentionner le cas où A appartient à X . Le lieu devient alors la conique impropre constituée par X et la parallèle à D menée par F .

Dans l'hypothèse où les droites FA et FB ne sont pas orthogonales, les directrices des paraboles θ apparaissent immédiatement comme tangentes à la conique, de foyers A et B , dont le cercle principal passe par F . L'orthogonalité des droites FA et FB entraîne une dégénérescence de l'enveloppe.

La deuxième partie comportait quatre questions. Le libellé de la dernière indiquait assez nettement qu'il convenait de traiter « directement » les trois premières.

Beaucoup de candidats ont reconnu le caractère projectif des propriétés concernant les triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ et, utilisant les coordonnées trilineaires, ont montré que si le triangle $\alpha\beta\gamma$ est conjugué par rapport à la conique ω , les points α' , β' , γ' appartiennent à ω . Malheureusement aucun n'a su, par une méthode analogue, démontrer la proposition réciproque. En fait, il convenait de dégager d'emblée une remarque importante : les triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ sont homologues. L'absence de cette remarque est presque toujours la cause de démonstrations lourdes qui tournent à la confusion dès que certaines lettres de l'énoncé prennent sous la plume du candidat des significations différentes de celles qui leur avaient été assignées. Ainsi, certains appellent α' le point d'intersection de b' et de la droite $F\alpha$ alors que, d'après l'énoncé, α' désigne le point commun aux droites b' et c' !

Pour montrer l'existence d'une infinité de cercles σ , on pouvait soit utiliser F_1 et déduire de β , pris arbitrairement sur a , les points α' , β' , γ' pour montrer finalement que les droites $F\alpha'$ et $\beta'\gamma'$ se coupaient sur b , soit extraire du faisceau d'axe radical b et de point de Poncelet β , pris arbitrairement sur a , un cercle passant par F . On mettait ainsi les cercles σ en correspondance bi-univoque avec les points de a , par exemple. Alors b' enveloppe la parabole de foyer F_1 tangente à a et à c' . La droite c enveloppe l'hyperbole, transformée de cette parabole par l'homologie mentionnée dans la question précédente. La représentation précise de cette hyperbole ne figure dans aucune copie. Peu de candidats se sont intéressés au lieu du centre du cercle σ . On pouvait géométriquement déterminer les asymptotes de ce lieu. Enfin, une transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle de centre F mettait en correspondance la famille des cercles σ et une famille de paraboles θ .

Peu de candidats ont abordé la troisième partie. Dans les deux premières questions, il s'agissait de vérifier des résultats explicitement mentionnés par l'énoncé. « En écrivant que... on trouve » est le mode d'expression trop souvent utilisé pour justifier ces résultats.

* La Rédaction s'excuse de devoir employer ce symbole défectueux $\notin$ pour exprimer « n'appartient pas à ».

La condition $BC(AA' - B^2) \neq 0$ ne figure, correctement expliquée, que dans cinq copies. Pour certains candidats, deux plans sont conjugués si (et seulement si !) tout point de l'un est conjugué de tout point de l'autre !

Il est douteux que plus de deux ou trois candidats aient réussi à former l'équation tangentielle de R sans le secours du résultat indiqué par l'énoncé. En l'absence d'idée directrice, quelque élimination providentielle conduit finalement au résultat. Ainsi, un candidat qui avait écrit que les plans polaires de deux points distincts de a contenaient b obtient l'équation de R après deux pages de calculs. La troisième question a donné lieu à quelques résultats exacts. Aucun candidat n'a abordé les deux dernières questions.

Résultats généraux

337 copies (au lieu de 291 en 1960) ont été soumises à correction. Ce nombre semble très voisin de celui à partir duquel il conviendra d'envisager un allongement de la période consacrée aux corrections.

La présence d'un lot important de copies mal présentées ou mal rédigées a rendu particulièrement pénible la tâche du correcteur qui, faute de temps, devra bientôt renoncer à déchiffrer les « brouillons » qui lui seront remis.

Les copies de tête ne sont qu'assez bonnes. Pour assurer un meilleur échelonnement des notes et conserver à l'épreuve l'importance que lui confère son coefficient, nous nous sommes imposé de répartir ces notes entre 0 et 54 (sur 60). Ainsi, soixante copies méritèrent une note supérieure ou égale à 30. Les meilleures notes (54, 51 et 48) sont suivies de 10 notes supérieures ou égales à 42, puis de 47 notes supérieures ou égales à 30. La moyenne générale est légèrement supérieure à 18. Celle des admissibles est voisine de 30.

II. -- Composition d'analyse

(Rapporteur : M. Lesieur)

Le problème comportait quatre parties dont le texte avait été rédigé pour qu'elles puissent être résolues, dans une large mesure, indépendamment les unes des autres. Les candidats ont en général suivi l'ordre proposé, ce qui était raisonnable. Parmi ceux qui ont commencé par la partie IV, on distingue aisément ceux qui ont effectivement travaillé cette question en premier lieu et qui ont pu obtenir des résultats honorables, et ceux qui ne l'ont abordée qu'en désespoir de cause après avoir échoué sur tout le reste. Dans ce rapport, je vais donner quelques indications sur les questions demandées et sur les résultats obtenus ; je n'entreprendrai pas la tâche de relever les bourdes des candidats notoirement insuffisants, mais je signalerai quelques fautes plus ou moins fréquemment commises.

I. La première partie est purement algébrique. Il s'agit d'étudier l'application linéaire définie dans l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée x et à coefficients réels, par :

$$P \rightarrow B_n(P) = \sum_{k=0}^{k=n} P \binom{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

1° a) Pour montrer que les polynômes :

$$E_k = x^k (1-x)^{n-k} ; k = 0, 1, \dots, n$$

forment une base de l'espace vectoriel P_n des polynômes de degré $\leq n$, il suffit de remarquer que la dimension de P_n est $n+1$, que les E_k sont en nombre $n+1$, et de démontrer qu'ils sont linéairement indépendants. La démonstration directe est ici la mieux accueillie, les résultats de la partie b venant seulement, si on y tient, en donner une confirmation par le calcul d'un déterminant.

On se contente souvent de démontrer l'indépendance linéaire des E_k sans noter qu'ils sont en nombre $n+1$: or, il ne suffit pas de prendre deux vecteurs indépendants d'un espace vectoriel de dimension 3 pour obtenir une base. A l'opposé, on

démontre souvent que les E_k sont indépendants et qu'ils forment un système de générateurs : ceci est en effet la définition d'une base, mais le fait que les vecteurs sont en nombre égal à la dimension dispense agréablement de l'une de ces propriétés, au choix. Enfin, fait beaucoup plus grave rencontré même dans des copies valables pour le reste : l'indépendance linéaire de $n + 1$ vecteurs n'est pas démontrée par l'indépendance linéaire de ces vecteurs pris deux à deux, trois vecteurs colinéaires distincts ne constituant pas une base de R^3 .

b) La formation de la matrice qui permet d'exprimer la base $\{E_k\}$ en fonction de la base $e_p = x^p$ s'obtient immédiatement en développant $(1 - x)^{n-k}$ par la formule du binôme. La matrice inverse s'obtient aussi facilement par le développement de $(1 - x + x)^{n-p} = 1$, suivi d'une multiplication par x^p . A défaut de la formule du binôme, il suffit de résoudre par rapport aux e_p le système qui donne les E_k en fonction des e_p . On trouve alors la matrice du triangle arithmétique de Pascal (renversé). L'application au cas $n = 3$ (et non au cas $n = 2$ comme certains étourdis le font) permettrait de voir si les formules générales avaient été comprises.

On apprécie ceux qui donnent des formules propres, en précisant bien la signification des lignes et des colonnes de la matrice, la disposition pouvant varier avec les auteurs. La formation de la matrice inverse a donné du souci à bien des candidats, et beaucoup ne l'ont pas trouvée, même en invoquant déterminants et cofacteurs.

2° a) On demande l'expression de $B_n(P)$ pour $P = 1, x, x^2$. Les deux premiers se calculent au moyen de la définition et on constate qu'ils sont invariants. Pour le troisième, il est déjà utile d'appliquer la formule (2) donnant $B_n(xP)$ en fonction de $B_n(P)$ et de sa dérivée. On demande aussi de vérifier la formule (3), utile dans la suite, et qui s'obtient aisément au moyen de $B_n(x)$ et $B_n(x^2)$.

Ces calculs ont été bien faits en général. On doit signaler cependant trop de longueurs dans certaines copies. Il est permis de trouver *au brouillon* le résultat $B_n(1) = 1$ au bout d'une page de calculs, mais je n'ai que faire de ce brouillon sur la copie définitive et il faut en rédigeant trouver une solution meilleure. Redisons à cette occasion que la rédaction et la présentation matérielle jouent un rôle important dans le jugement porté sur les candidats. Ce qui est bien compris s'énonce clairement et doit être présenté proprement. Je pense qu'un effort certain a été réalisé dans cette voie par la moitié des candidats. Mais il en reste encore un trop grand nombre dont la présentation est inacceptable : absence de marges, ponctuation omise, orthographe de hasard, saleté, gribouillages indignes de futurs professeurs et insolents pour les correcteurs.

b) Pour montrer que la restriction de l'application linéaire B_n à l'espace vectoriel P_d des polynômes de degré $\leq d$ est une application linéaire de P_d sur lui-même si $d \leq n$, l'important est de montrer qu'un polynôme de degré $\leq d$ se transforme en un polynôme de degré $\leq d$. Cette propriété n'est pas une conséquence immédiate de la définition, mais une application intéressante de la formule (2). On vérifie ensuite que le noyau de l'application est nul, ce qui démontre que l'application est injective. Il en résulte, l'espace étant de dimension finie, qu'elle est surjective et qu'elle réalise un automorphisme de l'espace vectoriel P_d , et une surjection de P_d sur P_n pour $d > n$.

Quelques-uns donnent une démonstration selon ces lignes directrices. D'autres démontrent directement que l'application est surjective, ce qui est très correct. Mais beaucoup oublient l'essentiel, qui est de démontrer que l'application se fait dans P_d et, parmi les autres, on omet souvent les précisions supplémentaires demandées par le texte.

II. La deuxième partie est de nature topologique, en introduisant l'espace C des fonctions réelles $f(x)$ définies et continues sur $[0, 1]$, considéré comme espace vectoriel sur R , normé par $\|f\| = \max |f(x)|$. On y étudie l'application B_n définie pour une fonction par extension de la formule donnée pour un polynôme.

1° a) La première question est une majoration charitablement proposée aux candidats pour les aider dans la question suivante, plus difficile. Elle a été généralement bien faite et on a constaté avec plaisir que certains expliquent bien ce qu'ils font en justifiant les inégalités écrites par le fait que les termes de la somme sont tous *positifs* ou nuls. L'interversion typographique de k et n dans la formule C_n^k ne pouvait gêner personne à cause des détails donnés dans le contexte sur la signification de k et n .

b) En s'aidant des résultats précédents, on démontre que, pour $f(x)$ donné, $B_n(f)$ converge vers f quand n augmente indéfiniment, uniformément par rapport à x . Cette question, et la façon dont elle a été présentée, opère à elle seule une sélection très valable des candidats. Certains observent à juste titre qu'elle fournit une démonstration du théorème de Weierstrass sur l'approximation uniforme d'une fonction continue sur $[0, 1]$ par une suite de polynômes. Un seul tente un essai valable pour établir la propriété demandée au moyen du théorème de Weierstrass, ce qui est parfaitement possible.

2° Les questions demandées ici avaient pour but de contrôler les notions de continuité dans les espaces métriques.

a) Le nombre φ de la majoration :

$$\|B_n(f)\| \leq \varphi \|f\|$$

peut être pris égal à 1.

b) La définition et les propriétés des applications φ et ψ précisées dans le texte ont en général été données correctement par ceux qui ont voulu s'en donner la peine.

c) Pour vérifier que les images par ψ des points de R^{n+1} qui satisfont à l'égalité $\text{Max}|a_k| = 1$ forment un sous-ensemble compact de P_n , il suffit de noter que l'image continue d'un compact dans un espace séparé est un compact. Cela a été fréquemment souligné. Pour montrer que ψ est un homéomorphisme de R^{n+1} sur P_n , il faut démontrer que ψ^{-1} est continue. Ceci est plus difficile et n'a été bien fait que par un petit nombre de candidats, soit directement, soit en faisant appel à leurs connaissances : si E et F sont deux espaces vectoriels normés sur R et si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.

III. Dans la partie III, on considère le cas particulier d'une fonction f continue et à variation bornée.

1° Si f est monotone non décroissante, il en est de même de $B_n(f)$. Cette propriété résulte immédiatement de la formule (5) donnée dans le texte, et par suite démontrée coûte que coûte par tous ceux qui ont eu le temps de l'aborder.

A cet endroit s'arrêtent un grand nombre de copies honnêtes gravitant autour de la note 10 sur 20 (voir statistique à la fin). Le barème donnait d'ailleurs un peu plus d'importance aux parties I et II qu'aux parties III et IV, de sorte qu'un candidat pouvait avoir la moyenne avec les deux premières parties traitées correctement, même avec quelques lacunes. Cela situe par conséquent le niveau des résultats du concours pour l'épreuve d'Analyse.

2° Une fonction continue à variation bornée sur $[0, 1]$ est la différence de deux fonctions continues f_1 et f_2 monotones non décroissantes sur $[0, 1]$. Comme les polynômes $B_n(f_1)$ et $B_n(f_2)$ sont monotones non décroissants (III, 1°) et convergent uniformément vers f_1 et f_2 quand n tend vers l'infini (II, 1°), toute fonction continue à variation bornée est la *différence des limites uniformes* de deux polynômes monotones (et également la *limite uniforme de leur différence*). La réciproque n'est vraie que sous la première forme, et le texte comportait à cet endroit une erreur de rédaction. Un certain nombre ont interprété la réciproque sous la forme correcte ; d'autres ont laissé fort justement la question en suspens. Naturellement, la partie directe a donné à elle seule le maximum des points du barème normal pour la question complète, les considérations sensées sur la réciproque ayant été payées à titre supplémentaire.

3° Dans cette question, on veut comparer la variation totale V_n relative à $B_n(f)$ à la variation totale V relative à f . Le sujet proposait comme méthode de prendre V_n sous la forme

$$V_n = \int_0^1 \left| \frac{dB_n(f)}{dx} \right| dx,$$

ce qui donne par application de la formule (5) fournissant $\frac{dB_n(f)}{dx}$:

$$V_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} n C_{n-1}^k I_k \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|$$

avec :

$$I_k = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-1-k} dx.$$

L'intégrale I_k se calcule par parties : $I_k = 1/n C_k^{n-1}$; d'où :

$$V_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq V.$$

Une dizaine de candidats ont pu mener ce calcul à bonne fin. Très peu ont su en déduire correctement que V est la limite de V_n pour n infini ; il fallait introduire un partage convenable P de $[0, 1]$, ainsi que la convergence uniforme de $B_n(f)$ vers f . Mais l'attention était dès lors tournée vers la partie IV.

IV. Cette partie pouvait être abordée directement, mais elle n'était pas cependant sans rapport avec les parties précédentes. Il s'agit cette fois d'une application linéaire de l'ensemble des suites, définie par :

$$s_n \rightarrow \sigma_n = \varphi_\lambda(s_n) = \sum_{k=0}^n C_n^k \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} s_k,$$

où λ est un nombre réel tel que $0 < \lambda \leq 1$.

1° Cette application fournit un procédé de convergence qui respecte la convergence ordinaire. Afin de l'établir, on proposait d'abord de vérifier :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} = 0.$$

Cela ne nécessite pas de grands moyens comme la formule de Stirling, mais une simple majoration de C_n^k par $n^k/k!$, ou encore l'étude de la série de terme général $C_n^k \lambda^k (1-\lambda)^{n-k}$ par la règle de d'Alembert. Je dois mentionner une démonstration erronée basée sur la relation (utile dans la suite) :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} = 1$$

et disant de façon vague : si une somme de termes est égale à 1 et si leur nombre augmente indéfiniment, chacun d'eux tend vers 0.

La convergence de s_n vers s entraîne celle de σ_n vers la même limite s . Il fallait en donner une démonstration irréprochable au moyen d'une majoration de $|\sigma_n - s|$. La convergence de σ_n n'entraîne pas celle de s_n ; le contre-exemple couramment donné est celui de la suite $s_n = (-1)^n$. Exceptionnellement, j'ai rencontré d'autres exemples, vrais ou faux.

2° Soit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^{k+1}.$$

En posant :

$$x = \frac{\lambda y}{1 - (1 - \lambda)y}$$

on peut développer x^{k+1} en série entière en y par élévation de $1 - (1 - \lambda)y$ à la puissance $-(k + 1)$ au moyen de la série du binôme. En portant dans la série qui donne $f(x)$ et en réordonnant en y , on obtient formellement

$$f(x) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n y^{n+1}.$$

Ce raisonnement est justifié par la *convergence absolue de la série double* de terme général :

$$u_{k,n} = \lambda C_n^k \lambda^k (1 - \lambda)^{n-k} y^{n+1} s_k$$

dans les conditions indiquées : $|y| < \frac{R}{\lambda + (1 - \lambda)R}$.

3° Les substitutions $y \rightarrow x = \frac{\lambda y}{1 - (1 - \lambda)y}$ forment, lorsque λ varie en res-

tant non nul, un groupe multiplicatif isomorphe au groupe multiplicatif R^* des nombres réels non nuls. En se limitant aux nombres réels λ vérifiant $0 < \lambda \leq 1$, on obtient un semi-groupe (et non un groupe !) laissant d'après la question précédente invariante la série convergente $f(x)/\lambda$. Il en résulte pour les applications φ_λ la relation :

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_{\lambda'} = \varphi_{\lambda\lambda'}$$

puis l'isomorphisme demandé. Quelques candidats, parmi les meilleurs, ont d'ailleurs remarqué que cet isomorphisme s'étend à un isomorphisme de groupe en considérant tous les réels non nuls, l'invariance de la série $f(x)/\lambda$ étant alors celui d'une série formelle. Enfin, ces excellentes copies ont su en déduire l'application demandée au cas $\lambda' \leq \lambda$; il suffit d'appliquer la relation $\varphi_{\lambda'} = \varphi_{\lambda'/\lambda} \circ \varphi_\lambda$ à s_n , ce qui donne $\sigma'_n = \varphi_{\lambda'/\lambda}(s_n)$ et par suite $\lim \sigma'_n = s$.

Statistique : La moyenne générale est de 7,2 sur 20. Les notes des 328 copies corrigées se répartissent conformément au tableau suivant dans lequel la première ligne désigne les intervalles de notes prises de 2 en 2 de 0 à 20 et la deuxième le nombre de copies ayant une note située dans cet intervalle :

notes :

0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----

nombre de copies :

23	60	59	56	37	36	25	17	9	6
----	----	----	----	----	----	----	----	---	---

Cette distribution fait apparaître une centaine de notes ≥ 10 , ce qui est sensiblement le nombre des admissibles, ainsi qu'un étalement suffisant pour affirmer que le problème a permis de classer les candidats.

III. -- Composition de Mécanique générale

(Rapporteur : M. Roseau)

Le problème de mécanique générale, présenté cette année à la curiosité de 317 candidats, comportait trois parties. Les deux premières proposaient quelques problèmes simples relatifs à des systèmes comportant plusieurs solides, soumis à des liaisons indépendantes ou dépendantes du temps, unilatérales ou non, avec ou

sans frottement, avec asservissement, etc... ; l'accent était mis sur la formation des équations du mouvement, et pour en faciliter l'écriture exacte et permettre de juger au mieux la qualité des connaissances mises en œuvre par les candidats, les difficultés de calcul avaient été volontairement très réduites.

La dernière partie, sensiblement plus difficile, prenait prétexte de l'étude d'un mécanisme comportant un grand nombre de pièces mobiles pour introduire un problème d'algèbre des matrices que nulle part on n'a vu abordé dans le cas général.

En dépit d'un barème indulgent, ayant notamment pour effet de ne tenir nul compte de la partie algébrique, les résultats obtenus sont dans l'ensemble fort modestes ; les meilleures notes sont 13 (3), 12 (4), 11 (5), 10 (10) sur un total maximum de 20.

De ces 22 candidats ayant obtenu une note supérieure ou égale à la moyenne, 20 ont été déclarés admissibles. La moyenne générale de l'épreuve est 4,2 sur 20.

M. ROSEAU.

IV. -- Composition de Mathématiques appliquées

(Rapporteur : M. Chazel)

Le sujet proposé consistait, dans une première partie, en une courte étude de convergence d'intégrales généralisées, d'existence de dérivées et de développements limités. La recommandation faite aux candidats de ne pas trop s'attarder sur ces questions indiquait clairement qu'elles devaient être traitées par des moyens très simples, mais non au préjudice de la précision et de la rigueur.

Dès le début, on note quelques accidents sérieux et une tendance à la complication ; certains, heureusement rares, semblent tout ignorer de la nature des inté-

grales $\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha}$; d'autres, par des intégrations par parties maladroites, introduisent des symboles qui n'ont pas de sens. La continuité, l'existence des dérivées successives de $f_\lambda(t)$ et $g_\lambda(t)$ sont assurées pour tout $t \neq 0$, puisque ces fonctions sont produits de fonctions indéfiniment dérivables ; une étude locale pour $t = 0$ suffit donc. Les développements en série entière de ces deux fonctions se révèlent un obstacle redoutable ; ils peuvent être obtenus soit en intégrant terme à terme les développements de $v^\lambda \sin vt$ et $v^\lambda \cos vt$, dont la convergence uniforme est presque évidente, soit, tout aussi simplement, par la formule de Mac Laurin, suggérée par le calcul, qui précède, des dérivées successives ; mais il ne faut pas oublier, ce qui est le cas neuf fois sur dix, d'étudier le terme complémentaire ; les connaissances des candidats sur ce point paraissent fragmentaires ; on se désintéresse même de la convergence.

Ces préliminaires trouvent leur emploi dès le début de la seconde partie. La variété des formes de $f(t)$, soulignée par l'énoncé, invite à quelque souplesse dans les calculs ; il faudra donc faire ses choix et de bons choix, et non suivre le premier chemin venu. On trouve ainsi des maladresses dès le 2°, alors que sur la première forme donnée, l'encadrement de $f(t)$ est presque évident, et que les conséquences sur les comportements de $f(t)$ et de $f'(t)$ pour t infini, sur les signes de $f(n\pi)$ et $f'(n\pi)$

en résultent sans phrase. La voie proposée pour déterminer le signe de $\varphi\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$,

donc celui de $f\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, n'est pas la seule, mais paraît la plus abordable. On obtient :

$$\varphi\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S_n(u) \cdot \sin u \, du, \text{ avec } S_n(u) = \sum_{i=0}^n \alpha_i$$

où $\alpha_0 = \sqrt{u}$ et, pour $p \geq 1$, $\alpha_p = (-1)^p [\sqrt{p\pi + u} - \sqrt{p\pi - u}]$.

On vérifie facilement que S_1 est positif si $u \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$, qu'il en est de même de $S_2, S_3, \dots, S_n$, enfin que $\forall n \in \mathbf{N}, \varphi \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) > 0$.

D'assez nombreuses inexactitudes entachent le calcul de $S_n(u)$; quand il est exact, les conclusions sont souvent hâtives, voire incorrectes; certains affirment, sans broncher, que le signe de $\varphi \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right)$ dépend de la parité de n .

La question suivante n'offrait pas de difficulté sérieuse, mais exigeait quelque attention; $f(t)$ et $f'(t)$ prennent chacune des valeurs de signes contraires aux bornes de tout intervalle $I_n = [n\pi, (n+1)\pi]$ (n entier > 0); $f(t)$ a le signe de $\varphi(t)$ monotone dans chacun de ces intervalles; $f'(t) = \frac{1}{t^{5/2}} \int_0^{\pi/2} v^{3/2} \cos vt \, dv = \frac{1}{t^{5/2}} \psi(t)$, celui de $\psi(t)$, monotone dans chaque intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right]$. En particulier $f' \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right)$ a le signe de $(-1)^n$. On en déduit que $f(t)$ a un zéro t_n dans tout intervalle I_n , que $f'(t)$ en a un aussi θ_n , et que :

$$n\pi < n\pi + \frac{\pi}{2} < t_n < \theta_n < (n+1)\pi \quad \text{si } n \text{ est impair}$$

$$n\pi < t_n < n\pi + \frac{\pi}{2} < \theta_n < (n+1)\pi \quad \text{si } n \text{ est pair}$$

Enfin, des conditions : $\sin \theta_n = \frac{3}{2} f(\theta_n)$ et $0 < (n+1)\pi - \theta_n < \frac{\pi}{2}$, on conclut que

$(n+1)\pi - \theta_n$, comme $f(\theta_n)$, tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. Cette étude est en général mal réussie, sauf peut-être en ce qui concerne le signe de $f(t)$; les maladroites sont fréquentes, les fautes de raisonnement aussi; il vaut mieux avouer, comme certains l'ont honnêtement fait, qu'on admet certains résultats partiels; mais il n'est pas possible, dans ce cas, d'obtenir, en le justifiant, le classement demandé.

Le calcul approché de $f \left(\frac{\pi}{2} \right)$ et de $f(\pi)$ était presque insignifiant, puisqu'il suffisait pour les obtenir, avec l'approximation voulue, de conserver les quatre premiers termes du développement de $f(t)$; il a pourtant été presque délibérément sacrifié; les candidats qui ont accepté d'y consacrer quelques instants se sont ainsi acquis un avantage de points qui n'était pas négligeable. Mieux vaut ne pas parler des tracés des courbes Γ, Γ_1 ou Γ_2 ; le peu que nous en avons vu était à peu près informe. La dernière question a été abordée par quelques candidats, traitée toujours de façon incomplète, mais partiellement valable.

En conclusion, les résultats de cette épreuve sont peu brillants, mais, à tout prendre, acceptables; la présentation est en général correcte; le style, très inégal, mérite plus d'efforts de la part de futurs professeurs ou même de professeurs en exercice. Attirons l'attention des candidats sur la nécessité de calculs propres et bien conduits, y compris le calcul numérique, au bas mot très négligé; insistons aussi sur la solidité des connaissances de base, particulièrement en analyse, où les notions de limite, de continuité, de convergence, de convergence uniforme ne devraient prêter à aucune faiblesse; il ne suffit pas d'user d'un langage savant, il faut en user à bon escient; tout faux pas en ce domaine ne peut qu'être sévèrement sanctionné.

314 copies ont été corrigées; la meilleure a obtenu 17 sur 20; suivent deux 16, un 15 1/2, deux 15; dix-neuf notes sont inférieures ou égales à 2; la plus fréquente est 8 (30 fois); la moyenne, 7,3.

B) EPREUVES ORALES

Leçons de Mathématiques Élémentaires

(Rapporteur : M. Riche)

Nous éviterons dans le présent rapport de présenter certaines observations ou de répéter les conseils qui figurent dans les rapports antérieurs. La plupart des observations qui suivent, comme celles qui font l'objet du rapport de 1960, sont relatives aux leçons de géométrie. Sans doute parce que la géométrie occupe, dans nos programmes, une place prépondérante mais aussi parce que, au niveau de la classe de Mathématiques, il n'est pas aisé, en cette matière, d'atteindre cette perfection à laquelle nous invitent les méthodes modernes.

— Quand il s'agit d'une leçon qui présente des difficultés certaines, le jury, porté à l'indulgence, peut tout de même exiger du candidat qu'il ait quelques idées précises sur l'enchaînement des axiomes et des théorèmes fondamentaux. Il est inadmissible de baser une théorie de l'orientation des trièdres sur la notion de déplacement quand on ignore tout des isométries.

— La présentation des isométries est délicate, mais celle des similitudes ne présente aucune difficulté théorique nouvelle. Néanmoins, les leçons relatives à la similitude plane ont été médiocres. Une similitude dans le plan π est une application bijective f telle que $\forall a, b \in \pi, d[f(a), f(b)] = k d(a, b)$, k étant une constante positive et $d(a, b)$ désignant la distance du point a au point b . Il existe de telles transformations puisque les isométries et les homothéties précédemment étudiées sont bien des similitudes. Les similitudes forment un groupe et l'on montre sans peine que toute similitude peut être considérée comme le produit d'une homothétie et d'une isométrie (ou comme le produit d'une isométrie et d'une homothétie).

a, b, a', b' étant quatre points donnés ($a \neq b, a' \neq b'$), il existe deux similitudes f telles que $a' = f(a), b' = f(b)$. Les « réductions » classiques des deux types de similitude résultent de cette importante proposition.

— La leçon relative aux faisceaux de cercles, elle aussi, embarrasse les candidats. Outre que le cas des cercles concentriques est généralement oublié, la définition que l'on donne est souvent hésitante et parfois incorrecte. Par exemple, le candidat qui appelle « faisceau d'axe radical D » tout ensemble de cercles tel que deux quelconques des cercles de cet ensemble admettent D pour axe radical ne semble pas soupçonner qu'un tel ensemble pourrait être fini. Il est commode, pour définir ce que l'on entend par faisceau d'axe radical D, d'introduire dans l'ensemble E des cercles du plan une relation R définie de la façon suivante : deux cercles vérifient la relation R, soit s'ils sont confondus, soit si, étant distincts, ils admettent D pour axe radical. On montre que cette relation binaire est une relation d'équivalence. On définit alors un faisceau d'axe radical D comme élément de l'ensemble quotient E/R . Bien entendu, on peut imaginer d'autres définitions. Par exemple, étant donnés deux cercles distincts, concentriques ou non, on peut appeler faisceau l'ensemble des cercles lieux de points dont le rapport des puissances aux deux cercles donnés est constant. Cette définition, moins souple que la précédente, n'oblige plus à traiter séparément les faisceaux de cercles concentriques et souligne le caractère « linéaire » de la famille.

— L'étude des cercles C orthogonaux à un cercle donné et tangents à une droite ou à un cercle donné doit faire ressortir le fait que ces cercles C sont généralement tangents à un autre cercle (ou droite) fixe. La recherche du lieu du centre doit constituer l'essentiel de la leçon. Si le temps le permet, on peut donner quelques indications sur les différentes manières de considérer une conique comme lieu de centres de cercles orthogonaux à un cercle donné et tangents à un cercle ou à une droite donnée.

— Dans une étude de la correspondance homographique sur un cercle, un candidat démontre l'existence de l'axe d'homographie lorsque les points doubles sont

réels et distincts. Il admet cette existence dans les autres cas. Rappelons que dans tous les cas cette existence peut être déduite du théorème de Pascal : Etant donnés six points cocycliques $ABCA'B'C'$, les points $\alpha = BC' \cap B'C$, $\beta = CA' \cap C'A$ et $\gamma = AB' \cap BA'$ sont alignés. Pour obtenir ce dernier résultat, il suffit de couper les faisceaux de droites (de même birapport) $[B'A, B'B, B'C, B'A']$ et $[C'A, C'B, C'C, C'A']$ respectivement par les droites AB et $A'C$: on obtient les divisions homologiques $(\gamma\beta\nu A)$ et $(\beta\nu CA')$.

— La détermination des tangentes et des asymptotes d'une hyperbole H définie par un foyer F , la directrice correspondante Δ et l'excentricité e , a été l'occasion d'explications confuses et de calculs peu convaincants dans la mesure où ils semblaient dépendre de cas de figures. Puisqu'il s'agit de limites d'éléments géométriques, il convient tout d'abord de choisir un paramètre.

Pratiquement, il semble commode d'utiliser les correspondances biunivoques, entre les points de Δ et ceux de H , obtenues en assujettissant la droite qui joint les points homologues à passer par un point fixe de l'hyperbole. Si l'on recherche la tangente en M_0 , ce point fixe est M_0 . S'il s'agit de la recherche d'une asymptote, ce point fixe est à l'infini. Il n'est pas question, en classe de Mathématiques, d'étudier la stabilité des limites obtenues par changement de paramètre.

— Les leçons concernant l'hyperbole « rapportée à ses asymptotes » ont toutes débuté par l'application d'un théorème de Poncelet au point T où la tangente en M coupe une asymptote pour finalement faire intervenir un quadrangle harmonique. Sans chercher à minimiser les vertus d'une telle méthode, nous voudrions attirer l'attention sur une présentation plus modeste qui semble ignorée bien qu'elle ne soit pas nouvelle. M étant un point de l'hyperbole de foyers F et F' ($MF - MF' = 2a$), soient H et H' les points de contact d'une tangente commune aux cercles de centres F et F' qui passent par M . On vérifie aisément qu'une asymptote est médiatrice de HH' et que $HH' = 2b$. I désignant le milieu de HH' et I' son symétrique par rapport à la droite FF' , $\overline{MI} \cdot \overline{MI'} = -b^2$, on établit facilement la réciproque, puis l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes. L'étude minutieuse de cette figure conduit à de nombreux résultats.

— Logiquement, la définition d'un faisceau harmonique de droites, en géométrie élémentaire, devrait suivre le théorème selon lequel la perspective d'une division harmonique est harmonique. On éprouve un certain malaise devant un énoncé tel que : « Si un faisceau est harmonique, il reste harmonique. »

— Enfin, signalons que dans une leçon sur les droites et plans parallèles, il convient de dégager les notions de direction (de droite ou de plan). Le parallélisme de droites doit pouvoir être considéré comme une relation d'équivalence. Une direction de droites est une classe d'équivalence.

— En ce qui concerne les leçons d'« algèbre », nous ne présenterons que peu d'observations nouvelles. Nous nous contenterons de deux remarques. La première est relative à l'étude des congruences dans l'ensemble N des entiers naturels. $a \equiv a' \pmod{p}$ signifiant que $a - a'$ ou $a' - a$ est divisible par p , l'explication des propriétés $a \equiv a'$ et $b \equiv b' \implies a + b \equiv a' + b'$ et $ab \equiv a'b'$ n'est pas aisée. En revanche, les démonstrations de ces mêmes propriétés ne présentent aucune difficulté si l'on remplace N par Z .

Notre deuxième remarque concerne l'équation $a \cos x + b \sin x + c = 0$. Après avoir examiné les cas particuliers $a = 0$ et $b = 0$, un candidat suppose $a \neq 0$ pour pouvoir introduire un angle α tel que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$, puis trouve la condition d'existence des solutions ($c^2 \leq a^2 + b^2$) sans remarquer qu'elle est encore valable si $a = 0$ et $b \neq 0$. En fait, il est préférable de supposer $a^2 + b^2 > 0$. Cette dernière hypothèse entraîne l'existence de α et de ρ tels que $a = \rho \cos \alpha$, $b = \rho \sin \alpha$ ($\rho \neq 0$) et l'équa-

tion peut alors s'écrire $\cos(x - \alpha) + \frac{c}{\rho} = 0$. Elle n'admet de solutions que si

$$\left| \frac{c}{\rho} \right| < 1.$$

— On observera que ce rapport contient plus de suggestions que de critiques. Il ne tend nullement à imposer certaines idées ou certaines méthodes. Son but serait atteint s'il pouvait constituer, pour les candidats aux prochains concours, une aide efficace dans leur préparation aux épreuves orales.

II. -- Leçons de Mathématiques Spéciales

(Rapporteur : M. Couchet)

Tout en recommandant aux candidats de lire attentivement les rapports antérieurs, nous rappellerons que beaucoup trop de leçons sont dépourvues d'exercices, pourtant, pédagogiquement indispensables. Nous soulignerons de plus que le choix de ces exercices et leurs solutions permettent très souvent aux candidats d'affirmer plus facilement leur maîtrise.

L'ordre suivi dans le présent rapport est celui du programme du concours.

— Une première leçon sur les nombres réels, exposée à partir des suites de Cauchy, a valu à son auteur une note honorable, elle aurait pu être excellente si les relations et les opérations sur les classes d'équivalences avaient été étudiées avec plus de précision. Dans la même leçon un autre candidat, qui a utilisé les coupures, a parlé aussi de la définition des nombres réels par les suites de Cauchy : son exposé lourd et incomplet a atteint péniblement la moyenne ; notons que l'on peut, dans cette leçon, signaler que le procédé employé pour définir les nombres réels à partir des nombres rationnels ne donne pas de nombres nouveaux quand on l'applique aux nombres réels. Enfin, parlant des ensembles des nombres réels, un candidat n'a pu démontrer correctement que tout ensemble majoré admet une borne supérieure et, quoique les applications aux suites monotones et aux intégrales impropres aient été acceptables, la note n'a pas atteint la moyenne.

— Si l'on veut parler de torseurs, dans l'étude des systèmes de vecteurs, il faut d'abord les définir d'une manière précise, passer à l'égalité de deux torseurs et alors seulement on pourra, sans risque de confusion, aborder les différentes opérations et aboutir à un espace vectoriel. Le candidat, qui a exposé cette question, a fait un mélange indigeste de toutes ces notions : la note a été inférieure à la moyenne.

— Etudier des applications de nombres complexes en se limitant à quelques exemples précis exige que chaque exemple soit traité complètement ; c'est ce que n'a pas fait un candidat qui, exposant cette leçon, a terminé en butant sur la condition nécessaire pour que quatre points soient sur une circonférence.

— En algèbre linéaire, le jury avait retenu onze leçons ; cinq ont été cotées nettement au-dessous de la moyenne car, tant sur le plan théorique que celui des applications, elles ne contenaient que peu de choses, telle cette première leçon sur les espaces vectoriels où le jury n'a pratiquement entendu que les définitions d'un espace et d'un sous-espace vectoriels. Cinq autres leçons, qui contenaient des exposés corrects mais de maigres exemples et quelques affirmations gratuites, ont valu à leurs auteurs des notes voisines de 12. Enfin, une très bonne leçon sur les formes linéaires qui, avec quelques exemples, aurait pu être excellente, a été cotée 17.

— La leçon sur le P.G.C.D. de deux polynômes aurait pu être très bonne si le théorème de Gauss avait été étudié ; mais comme le reste formait un ensemble correct, la note a été très honorable. Par contre, la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples a fait l'objet d'un exposé où les pôles imaginaires conjugués furent étudiés dans la confusion la plus complète et où les pôles multiples ne furent abordés que quelques minutes avant la fin de la leçon.

— La rubrique « Fonction d'une variable réelle » a fourni 25 leçons. Malgré les rapports précédents, les formes indéterminées n'ont pas fait l'objet de bons exposés. Les exemples, souvent sans liaisons, ont été traités d'une manière incertaine, un candidat a même passé une bonne partie de sa leçon à chercher par deux métho-

des la limite pour $x \rightarrow 0$ de $e^{\frac{1}{\sin^2 x}} - \frac{1}{\lg^2 x}$!

Dans un exposé sur les variations d'une fonction numérique d'une variable réelle, un candidat, qui a fait preuve de maladresse en dérivant plusieurs fois une expression algébrique dans le but d'étudier son signe (alors qu'après une mise en facteur évidente il suffisait d'une dérivation), a terminé en affirmant que cette expression changeait de signe quand la variable passait par un zéro ! Par contre, les leçons sur les fonctions continues sur un segment ont été traitées très convenable-

ment (14, 14, 16) et il en a été de même de l'étude de $\int_a^\infty f(x)dx$ (14, 15).

— L'étude des séries (douze leçons) a révélé de grandes faiblesses. Un candidat qui avait à étudier la série de Taylor a abandonné, après avoir cherché vainement à établir la formule correspondante. Dans le développement en série d'une fraction rationnelle, le rôle joué par les pôles a été à peine soupçonné et le candidat a abandonné l'étude d'un exemple simple alors que l'absurdité du résultat trouvé provenait d'une erreur dans le calcul des racines du dénominateur.

Par contre, une leçon sur la somme et le produit de deux séries absolument convergentes a été excellente. Le candidat a d'abord défini les opérations sur les séries pour aboutir à un anneau ; il a ensuite examiné le cas des séries convergentes puis absolument convergentes et, enfin, a fait l'application de la théorie aux séries entières.

— La recherche des enveloppes de circonférences d'un plan a fait l'objet d'une bonne leçon où, les définitions ayant été bien précisées, il a été facile de distinguer les points fixes et les courbes stationnaires ; la note très honorable aurait pu être excellente si les exemples donnés n'avaient pas été traités aussi superficiellement. Par contre, une leçon sur les enveloppes de droites n'a pas présenté les mêmes qualités et, comme les exemples traités l'ont été avec maladresse, $[(\lambda^2 + 1)x + (\lambda^2 - 1)y + 1 = 0$ dont le caractère linéaire n'a pas été soupçonné] : la note a été sévère.

— Un manque total de rigueur a marqué une leçon sur les coordonnées polaires faite par un candidat fort bien noté à l'écrit en Analyse : la note a été faible. Les exposés sur les branches infinies de $\rho = f(\theta)$ ont été corrects, mais la classification des différents cas n'a pas été assez nette.

— Les leçons portant sur la géométrie projective ont été assez faibles, c'est ainsi que le jury a pu entendre que « les correspondances involutives formaient un groupe » que « la correspondance homographique réduite à la forme $yy' = k$ (origines distinctes) était une inversion ». Heureusement, la leçon sur la notion d'espace projectif a été solide ; elle aurait été très bonne si l'étude du changement de base n'avait pas été aussi pénible.

— L'exposé sur la courbure des courbes planes a été médiocre : après avoir trouvé $\frac{d\vec{M}}{ds} = \vec{\tau}$, un candidat qui « dérive une deuxième fois pour voir ce que cela

va donner » cherchera, par la suite, la développée de l'ellipse en calculant le rayon de courbure. Sur la développée et les développantes d'une courbe plane, la leçon a été encore plus mauvaise (25 minutes de calculs maladroits pour obtenir la développée de la parabole) ; heureusement, la courbure des courbes gauches a été traitée avec méthode et précision par un candidat qui n'a péché que par manque d'exemples.

— En consacrant trente minutes à la construction de la strophoïde droite « qui n'a qu'un point double car son équation est du 3^e degré », un candidat n'a pu, mal-

gré un deuxième exemple, souligner les propriétés des courbes algébriques. Pour une courbe algébrique, l'ordre de la courbe, l'ordre d'un point ont des caractères projectifs, le candidat invité à parler des courbes algébriques planes en géométrie projective n'a pas semblé le soupçonner et s'est borné à une étude théorique très superficielle appuyée, une fois encore, sur l'exemple de la strophoïde droite.

— Dans la génération de coniques par l'intersection de droites en correspondance homographique, un candidat, qui a utilisé très longuement que par cinq points dont trois non alignés passe une conique non décomposée et une seule, n'a pu faire de réponse satisfaisante quand le jury lui a demandé la démonstration de la proposition utilisée. Par contre, la leçon sur la décomposition en carrés des formes quadratiques a été très bonne ; la partie théorique, basée sur l'étude des formes bilinéaires, a été très soignée, ce qui n'a pas empêché l'auteur de traiter, avec exemples à l'appui, tout ce qui est nécessaire à la pratique de la décomposition.

— Une leçon sur le changement du système de référence a été correcte dans sa partie théorique, mais n'a comporté comme application que le calcul de l'accélération en coordonnées polaires : c'est peu. Les candidats qui ont traité le mouvement plan sur plan n'ont pas souligné que le centre instantané de rotation est indépendant de la loi horaire. Signalons d'autre part qu'il est indispensable, dans l'étude de cette question, de distinguer trois points qui coïncident à l'instant t si l'on ne veut pas faire de confusion par la suite. Enfin, dans l'étude analytique, se référer toujours au plan fixe est une source de complications.

— La leçon sur les cônes circonscrits à une même sphère n'a pas eu de succès. Elle a été traitée une première fois par un candidat qui a seulement démontré que l'intersection était formée de courbes planes et si, la deuxième fois, le candidat a poussé un peu plus loin l'étude de cette intersection, ni l'un ni l'autre n'ont pu parler des bases de Monge.