

41^e année - N° 222 - Avril 1962

En lisant Gödel

Sur une étude du tétraèdre

Agrégation masculine 1961

Nouveaux programmes : classes
de Mathématiques et 1^{re} T.

N° 222 - Bulletin de l'

Association des
Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public

Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public.

29, rue d'Ulm - Paris (5°)

Présidents d'Honneur :

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN.

Bureau.

Président :

M. REVUZ, 16, rue de Rome, Les Essarts-le-Roi (S.-et-O.) (tél. 55) (*Affaires générales ; direction du « Bulletin » ; Conférences ; Enseignement Supérieur.*)

Vice-Présidents :

Mlle MASSON, 12, bd Desgranges, Sceaux (Seine) (*Enseignement du Second Degré.*)

M. CHAZAL, 2, rue Thimonnier, Paris, 9° (TRU. 61-11) (*Programmes.*)

Secrétaire général :

M. GILBERT, 33 bis, rue Champ-Lagarde, Versailles (S.-et-O.) (tél. 950-53-81) (*Administration de l'A.P.M. ; préparation des réunions ; Enseignement Technique.*)

Secrétaires :

Mlle AÏTOFF, 16, rue de l'Arbalète, Paris, 5° (*Commission du dictionnaire.*)

Mlle CLAVIER, 24, rue Linné, Paris, 5° (POR. 00-03) (*Commission des programmes.*)

Mlle LONJARET, 10, rue Pérignon, Paris, 7°. (*Correspondance ; Fichier.*)

Mlle MINOIS, Lycée de jeunes filles, Le Havre (Seine-Maritime) (*Enquêtes.*)

M. SCHAEFFER, 21, rue Colbert, Clermont-Ferrand (P.-de-D.) (*Enquêtes.*)

M. WALUSINSKI, 26, Parc de la Béragère, Saint-Cloud (S.-et-O.). (VAL. 29-09) (*Secrétariat de la rédaction du Bulletin ; publicité.*)

Trésorier :

M. NICOLAS, 57, rue Bucourt, St-Cloud (S.-et-O.).

N.-B. — Prière aux membres de l'A.P.M. d'adresser directement la correspondance au membre du Bureau compétent.

Comité de Rédaction.

Président : M. REVUZ ; *Secrétaire :* M. WALUSINSKI ; *Membres :* Mlle FÉLIX ; MM. CHAZAL, CHEVALLIER, CROZES, GENTILHOMME, HUISMAN, ITARD.

Commissions permanentes.

● *Dictionnaire :* Président : A. REVUZ.

● *Horaires, programmes, examens :* Président : M. CHAZAL.

Rapporteurs spécialisés.

Concours des Grandes Ecoles : M. CHAZAL.

Histoire des Mathématiques : M. ITARD.

Astronomie (liaison avec la Société Astronomique de France) : M. WALUSINSKI.

I. ETUDES.

J. BALIBAR : Un exemple d'abstraction, de formalisme et de métathéorie	155
R. ESTEVE : Sur une étude du tétraèdre	165

II. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES.

L. FÉLIX : Sur le diagramme de Venn	175
G. W. : Les mathématiques du jeune astronome	178
P. SAMUEL : Une propriété caractéristique des inversions et symétries ..	184
R. TOURNADRE : L'application des nouveaux programmes en Seconde A'CMM'	185
F. BRACHET : L'étude des arcs en Sixième	189

III. ENQUÊTES.

M. FRÉCHET : Au sujet des mathématiques dans les Facultés de droit et des sciences économiques	195
M. BARBUT : Projet de programme dans les classes non-scientifiques ..	196

IV. BIBLIOGRAPHIE.

A. KOYRE : La Révolution astronomique (J. Itard)	205
L. CROS : L'explosion scolaire (G. W.)	209
Brèves rencontres	211

V. DOCUMENTS OFFICIELS.

R. DONTOT : Rapport sur l'agrégation masculine 1961	213
L. THIBERGE et G. CAGNAC : Rapport sur le concours d'admission dans les C.P.R. (1961)	232
R. MAILLARD : Concours Général 1961 (classe de Première)	241
Nouveau programme de la classe de Mathématiques	245
Nouveau programme de la classe de Première T	257

VI. LA VIE DE L'ASSOCIATION.

Chronique des réformes	263
Chronique des Régionales	267
Bloc-notes de l'A.P.M.	268

Le coin du Trésorier

COTISATION. — Elle comprend l'abonnement au Bulletin, ainsi que les fascicules d'énoncés.

Cotisation normale 10 NF

Cotisation réduite (stagiaires C.P.R., élèves des E.N.S. et des I.P.E.S., jeunes gens accomplissant leur service militaire, retraités) 5 NF

ABONNEMENT (personnes n'appartenant pas à l'Enseignement Public, bibliothèques, etc...) :

France et Communauté : 12 NF - Autres pays : 15 NF

Le numéro : 3 NF

MODE DE PAIEMENT : Virement postal (adressé au centre de chèques du tireur) ou mandat-carte à l'adresse :

A.P.M. — 29, rue d'Ulm, Paris, 5^e — C.C.P. Paris 5708-21

RECOMMANDATIONS DU TRESORIER — Indications à porter sur le talon du chèque : 1^o Nom (en majuscules) et prénom. — 2^o Adresse où doit être envoyé le Bulletin. — 3^o Ancienne adresse en cas de changement. — 4^o Nom de l'établissement où l'on exerce. — 5^o Nom de l'établissement précédent en cas de mutation en fin d'année scolaire.

N.-B. — Toute nouvelle adhésion demandée en cours d'année scolaire compte à partir du 1^{er} octobre précédent. Elle donne droit à tous les bulletins déjà parus au cours de l'année scolaire, sous réserve qu'ils ne soient pas épuisés.

Comité.

Sortants en 1962 : MM. FAVRELLE (*Faidherbe, Lille*) ; KLEIN (*Charlemagne*) ; MAGNIER (*Louis-le-Grand*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; MM. NICOLAS (*E.N., Auteuil*) ; REVUZ (*Fac. Sc., Poitiers*) ; SCHAEFFER (*Pascal, Clermont-Ferrand*) ; Mlle CLAVIER (*Sèvres*).

Sortants en 1963 : MM. DEVIOSSE (*Lycée de Lillebonne*) ; CHAZAL (*Charlemagne*) ; Mme DUBOIS-VIOLETTE (*Fénelon*) ; MM. GIRARD (*Janson-de-Sailly*) ; LEGRAND (*Compiègne*) ; Mlle MINOIS (*Le Havre*) ; MM. POITOU (*Fac. Sc., Lille*) ; WALUSINSKI (*St-Cloud*).

Sortants en 1964 : MM. BRIANÇON (*Aix-en-Provence*) ; CHAZEL (*Louis-le-Grand*) ; CHOQUET (*Fac. des Sciences, Paris*) ; Mlle FÉLIX (*La Fontaine*) ; MM. FOUCHÉ (*Janson-de-Sailly*) ; GILBERT (*C.T. Versailles*) ; Mlle LONJARET (*Carnot*) ; M. RUFF (*Saint-Louis*).

Sortants en 1965 : Mlle AÏTOFF (*Montgeron*) ; CHEVALLIER (*Marcelin-Berthelot*) ; Mlle DEROO (*Racine*) ; DUMONT (*Montaigne, Paris*) ; FRENKEL (*Fac. Sc., Strasbourg*) ; MONJALLON (*St-Louis*) ; QUEYSANNE (*Janson-de-Sailly*) ; SIGNORET (*Montaigne, Bordeaux*).

Membres de droit

M. GIRAULT (*Janson-de-Sailly*) ; L. LECOEVRE (*Aix*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; Mme NICOURD (*Collège Marie-Vidalenc, Lyon*) ; M. POUX (*Saint-Cloud*) ; Mlle ROULET (*Victor-Hugo*) ; M. SÉNÉCAT (*Henri-IV*) ; M. WALUSINSKI (*Saint-Cloud*).

UN EXEMPLE D'ABSTRACTION, DE FORMALISME ET DE METATHEORIE *

La démonstration, par Kurt Gödel, de la compatibilité de l'axiome du choix
et de l'hypothèse généralisée du continu
avec les axiomes de la théorie des ensembles

par Jean BALIBAR
Professeur au Lycée Descartes (Tours)

III. DEFINITION D'UN MODELE

L'énoncé de l'axiome du choix ne fait intervenir que les tout premiers concepts de la théorie et peut être donné, comme nous l'avons vu, immédiatement après les autres axiomes. Il aurait même pu être donné à la suite des définitions qui précèdent le groupe d'axiomes B si on n'avait pas voulu le séparer nettement du système Σ . Il en va tout autrement de l'hypothèse du continu et de l'hypothèse généralisée dont on ne peut donner les expressions tant qu'on n'a pas développé la partie de la théorie qui concerne les notions d'ordinal et de cardinal. En outre, si la démonstration du résultat de Gödel est bien, pour l'essentiel, un raisonnement, d'ailleurs élémentaire, de la métathéorie, elle n'en exige pas moins qu'on ait développé d'abord une nouvelle partie de la théorie, celle qui concerne la notion de *constructible* et qu'on peut appeler commodément la théorie du *modèle* Δ . Il n'est pas inutile de redire que la théorie du modèle Δ est une partie de la théorie proprement dite au même titre que la théorie des ordinaux ou des cardinaux ; les objets (classes et ensembles) et les concepts (notions, opérations, etc.) du modèle, de même que les théorèmes, sont des objets, des concepts et des théorèmes de la théorie. Comme dans les autres parties de la théorie l'étude du modèle Δ est simplifiée grâce à l'introduction de notions métamathématiques. La notion même de modèle, telle qu'elle sera explicitée plus loin, est évidemment métathéorique, de même que l'utilisation du modèle à la démonstration des théorèmes de compatibilité.

Il est douteux qu'on puisse se faire une idée véritablement adéquate de la signification et de la portée des constructions intellectuelles, mathématiques et métamathématiques, qui constituent l'ouvrage de Gödel, et principalement de celles qui vont venir, par la seule esquisse qu'il est de notre propos de donner. En n'exposant que quelques points que nous jugeons importants, en résumant la plupart des développements, nous donnons à penser, à tort, que les choses sont plus difficiles quant au principe, plus simples dans leur organisation déductive, qu'il n'est vrai en réalité. Nous ne pouvons éviter, d'autre part, d'imposer, explicitement ou non, des représentations intuitives diverses, représentation des objets, représentation des concepts, représentation de la théorie elle-même en tant que système, etc., alors que le seul support intuitif efficace est celui

(*) Voir le début de cette étude dans le Bulletin 217, p. 11.

que chacun forge pour son propre compte en contraignant son imagination à suivre une par une les démarches du texte intégral. Si l'on veut bien admettre qu'on ne trouvera pas ici de substitut du texte original mais seulement des indications sur ce qui y est traité, on évitera d'interpréter à contre sens les considérations qui suivent.

Avant de parcourir les prochaines étapes de la théorie et faute de pouvoir reproduire la suite complète des formules dont elle est composée, nous devons prendre à notre compte quelques remarques générales destinées à rappeler le niveau d'abstraction où se situe le travail de Gödel:

1. Remarques.

a) *Sur les ensembles.*

Nous n'entreprendrons pas de discuter s'il existe une représentation adéquate d'un ensemble d'objets concrets en tant qu'ensemble ; si, par exemple, parlant d'un ensemble de grains de sable, on ne se représente pas toute autre chose qu'un ensemble : une configuration de points, s'il y en a peu ; un solide géométrique facile à ébouler, s'il s'agit d'un tas. Il semble bien qu'un ensemble n'existe que lorsqu'il se constitue, quand on rassemble ses éléments, ou lorsqu'inversement il se détruit, quand on isole un de ses éléments. C'est sans doute pourquoi, dans une théorie des ensembles en tant que tels, c'est la relation d'appartenance qui a un sens intuitif et c'est l'emploi du substantif « ensemble » qui est à l'origine de toutes les confusions. On aura constaté en tout cas que la théorie ne fournit aucun exemple d'ensemble qu'on puisse se représenter ; elle légitime purement et simplement des affirmations qui sont des amplifications de la relation d'appartenance primitive. L'ensemble vide qu'on pourrait nous opposer est moins que tout autre susceptible d'une représentation intuitive ; il intervient, pour dire les choses rapidement, comme négation de la relation d'appartenance. C'est par une illusion qu'on croit se représenter l'ensemble vide ; on se représente le symbole $\emptyset$ qui le désigne. On se convaincra facilement, sans doute, qu'il n'y a pas davantage de représentation des ensembles à un élément, à deux éléments, etc..., de la théorie. Nous ne voulons pas dire, évidemment, que la théorie n'a pas d'applications concrètes, comme toute théorie mathématique, ni que des enfants qui jouent à deviner combien ils cachent de cailloux ne se représentent rien quand l'un d'eux a les mains vides. Il ne faudra pas perdre de vue, un peu plus loin, que les ordinaux, pour lesquels il est facile de donner des correspondants intuitifs, au moins pour les premiers d'entre eux, prêtent, en tant qu'ils sont désignés par un substantif, aux mêmes confusions que les ensembles.

b) *Sur les classes.*

C'est par une réflexion sur le rôle technique des classes qu'on atteint le mieux le sens de la théorie dans son ensemble. Toutes les notions que l'on utilise sont associées à des classes, grâce aux métathéorèmes fondamentaux. Cela revient à dire qu'on a réussi à caractériser par le groupe d'axiomes B le type de propriétés qui interviennent dans la théorie des ensembles, ou, si l'on préfère, le type de phrases qui ont un sens utile dans la théorie. Il est remarquable que par ce moyen la notion, souvent difficile à dominer, de propriété, se prête à un calcul qui écarte toute ambiguïté et permet, en toute sécurité, des combinaisons complexes. On remarquera aussi que cette notion, qui paraît à bon droit purement logique, est intégrée à la théorie.

c) Sur les théorèmes d'existence.

L'expression « il existe un objet tel que » pose des problèmes d'interprétation difficiles, quel que soit le degré d'abstraction de la théorie mathématique où on l'emploie. Dans la présente théorie cette expression, rappelons-le, peut être employée sans qu'il y ait à lui attribuer un sens. On en retrouve le sens usuel dans les applications de la théorie, mais ce n'est pas ce genre d'intuition qui facilite la lecture du texte. Nous suggérons un autre mode d'interprétation intelligible qui revient, *grosso modo*, à remplacer « il existe » par « on a le droit de dire, ou de considérer, etc... ». Si on prend par exemple le théorème selon lequel il existe une classe vide il est assez vain d'essayer de comprendre quel est le mode d'existence de cette classe vide ; de même si, un peu plus loin, on démontre que la classe vide est un ensemble, il n'est pas indiqué de se perdre dans la recherche des raisons intuitives de ce résultat. On se satisfait plus facilement en considérant ces théorèmes comme des autorisations à employer certaines façons de parler, c'est-à-dire en plaçant l'intuition au niveau du langage et non au niveau des objets. On considère, par exemple, pour les théorèmes que nous invoquons, qu'on a le droit d'utiliser le langage des classes pour exprimer qu'une propriété n'est jamais vérifiée, que dans le langage de la théorie le mot plus particulier d'ensemble peut être substitué au mot classe dans cette occasion, etc... La classe universelle qui réunit tous les ensembles de la théorie alors qu'on n'a aucun moyen de fournir aucune idée intuitive de l'étendue de cette totalité s'interprète beaucoup plus facilement sous une forme purement syntaxique. De même la classe E ou la classe I.

d) Sur les concepts.

Nous nous bornons à rappeler que l'introduction des concepts revient à un enrichissement du langage et qu'on n'a aucun moyen de se représenter l'extension de ces concepts. La théorie ne construit pas des ensembles, elle élabore un langage qui permet de traiter des ensembles et elle établit la cohérence de ce langage.

2. La notion d'ordinal.

L'enchaînement des notions qui conduisent à la notion plus complexe d'ordinal est donné au paragraphe b) ci-dessous. Cet enchaînement est instructif en tant que reconstitution abstraite de notions familières. Auparavant nous présentons, sans nous leurrer sur leur valeur, quelques préliminaires plus concrets.

a) Construction intuitive d'une partie des nombres ordinaux.

Considérons l'ensemble vide O ; puis l'ensemble qui a pour unique élément l'ensemble vide, soit $\{O\}$, puis l'ensemble dont les deux éléments, évidemment distincts, sont O et $\{O\}$, soit $\{O\{O\}\}$; puis l'ensemble dont les éléments sont les trois ensembles que nous venons de considérer, et ainsi de suite. Nous venons de faire concevoir une classe N d'ensembles naturellement ordonnée et isomorphe, pour cet ordre, à la suite naturelle des nombres entiers. Un peu de réflexion montre que cette classe possède les propriétés suivantes : 1°) pour deux éléments u et v de N , les deux relations $u \leq v$ et $u \subset v$ sont équivalentes ; quand elles sont vérifiées on écrit aussi $u < v$; 2°) si u et v sont deux éléments quelconques de N , l'une et l'une seulement des trois relations $u < v$, $v < u$ et $u = v$ est vérifiée ; comme $u \leq v \equiv \langle uv \rangle \in E$, on dit que N est ordonnée par E ; 3°) tout élément u de N est identique à l'ensemble des éléments de N qui lui sont

inférieurs et par suite tout élément de N est une partie de N (la réciproque n'étant évidemment pas vraie) ; 4° toute partie non vide de N admet un premier élément, on dit que N est bien ordonnée par E .

La construction intuitive de N peut être poursuivie. Soit ω l'ensemble des éléments de N , on peut considérer que ω vient après tous les ensembles qui appartiennent à N . On considère ensuite l'ensemble dont les éléments sont tous les éléments de ω et ω lui-même, ensemble que l'on peut noter $\omega + 1$, et ainsi de suite. On imagine assez facilement qu'on puisse considérer ainsi des ensembles notés $\omega \times 2$, puis $\omega \times 2 + 1$, et ainsi de suite, puis des exponentiations assez étendues. Il est clair que la classe de tous ces ensembles a les propriétés citées plus haut. Dans la théorie abstraite, les ordinaux sont définis par une partie des propriétés précédentes, les autres en étant des conséquences ; les rudiments d'interprétation intuitive que nous venons de donner peuvent aider à accepter ce mode de définition.

b) Enchaînement des notions.

connexe, sous la forme : « Y est connexe dans X », noté $Y \text{ Con } X$, défini par

$$Y \text{ Con } X. \equiv X^2 \subseteq Y + Y^{-1} + I;$$

transitif, sous la forme : « Y est transitive dans X », sans notation particulière, équivalent à

$(u, v, w) \{ u \in X. v \in X. w \in X : \supset [\langle uv \rangle \in Y. \langle vw \rangle \in Y : \supset \langle uw \rangle \in Y] \}$;
asymétrique, sous la forme : « Y est asymétrique dans X », sans notation particulière, équivalent à

$$\sim (\exists u, v) [u \in X. v \in X. \langle uv \rangle \in Y. \langle vu \rangle \in Y] ;$$

bien ordonné, sous la forme : « X est bien ordonnée par Y », noté $X \text{ We } Y$, défini par

$X \text{ We } Y. \equiv Y \text{ Con } X. (U) [U \neq 0. U \subseteq X : \supset . (\exists v) [v \in U. [U. Y'' \{ v \} = 0]]]$;
 (on notera que le dernier point de la formule est le symbole de l'intersection, l'avant-dernier le symbole de « et », le précédent un signe de séparation ; le symbole $Y'' \{ v \}$ dont nous n'avons pas rapporté la définition désigne la classe des u tels que $\langle uv \rangle \in Y$). On trouvera peut-être difficile, à première vue, d'accepter que la classe Y définisse un ordre, mais on montre facilement que la définition de We entraîne que Y soit transitive et asymétrique.

R-section, sous la forme : « X est une R-section de Y », noté $X \text{ Sect}_R Y$, défini par

$$X \text{ Sect}_R Y. \equiv X \subseteq Y. [Y. (R''X) \subseteq X].$$

R-segment, sous la forme : « le R-segment de X engendré par l'élément u de X », noté $\text{Seg}_R(X, u)$, défini par

$$\text{Seg}_R(X, u) = X. R'' \{ u \}.$$

On montre qu'un R-segment de X est une R-section de X si R est transitive dans X , donc, en particulier, si $X \text{ We } R$. Inversement, si $X \text{ We } R$ et si Y est une R-section propre de X , Y est un R-segment de X , celui qui est engendré par le premier élément de $X - Y$.

isomorphisme, sous la forme : « la relation bi-univoque R est un isomorphisme de A à B relativement à S et T », noté $R \text{ Isom}_{S,T} (A, B)$; la formule de définition, assez longue, signifie que si

$u \in A, v \in A, \langle uv \rangle \in S, \langle u_1 u \rangle \in R$ et $\langle v_1 v \rangle \in R, \langle u_1 v_1 \rangle \in R$ et $\langle v_1 v \rangle \in R, \langle u_1 v_1 \rangle$ est élément de T . Il n'est pas exclu que S et T soient identiques.

ordinal, sous la forme : « la classe X est un ordinal », noté $Ord(X)$, défini par les deux conditions (qu'il faudrait réunir par « et » dans la formule de définition proprement dite) :

1. $X \mathcal{W}_e E$.
2. $u \in X : \supset . u = Seq_e(X, u)$.

On montre qu'il est équivalent de prendre les conditions plus faibles :

- 1'. $E \mathcal{C}_{on} X$.
- 2'. $u \in X : \supset . u \subseteq X$.

nombre ordinal, sous la forme : « X est un nombre ordinal », noté $O(X)$, défini par

$$O(X) . = : Ord(X) . \mathcal{M}(X).$$

Il résulte des métathéorèmes fondamentaux, et en particulier de la normalité des concepts qui interviennent implicitement dans cette dernière définition, que les nombres ordinaux forment une classe, notée On . Il ne paraît pas possible de se représenter l'extension de cette classe et on apprécie facilement l'insuffisance, à ce point de vue, des considérations du paragraphe *a*) précédent. D'autre part, on montre que On est un ordinal.

c) Définition d'une fonction par induction transfinie.

On convient de noter par des lettres grecques minuscules les variables qui sont des nombres ordinaux. On définit la notion de fonction sur une classe, notée $\mathcal{F}_n$, par l'équivalence : $X \mathcal{F}_n A . = : \mathcal{F}_{nc}(X) . \mathcal{A}_i(X) = A$. On définit l'opération de restriction d'une classe à une autre classe, notée $\upharpoonright$, par la relation : $A \upharpoonright B = A . (V \times B)$.

Dans ces conditions, on établit le théorème suivant :

$$(G) (\exists ! F) [F \mathcal{F}_n On . (\alpha) (F^\alpha \alpha = G^\alpha (F \upharpoonright \alpha))].$$

Dans cette formule G désigne une fonction supposée connue. Le symbole $A^\alpha x$ dont nous n'avons pas rapporté la définition désigne l'ensemble y tel que $\langle yx \rangle \in A$ quand cet y existe et est unique, l'ensemble O dans le cas contraire. Quand A est une fonction, $A^\alpha x$ est donc ce qu'on appelle en langage élémentaire la valeur de la fonction pour la valeur x de la variable, si la fonction est définie pour x , et O par convention si la fonction n'est pas définie pour x (il n'est évidemment pas exclu que la fonction prenne aussi la valeur O pour des valeurs de la variable pour lesquelles elle est définie).

L'énoncé du théorème se lit facilement et peut être interprété ainsi : $G^\alpha x$ est un ensemble bien déterminé quel que soit l'ensemble x ; par l'intermédiaire de cet « opérateur », la valeur de la fonction F se trouve définie pour tout nombre ordinal α si on la suppose connue pour tous les éléments de α , c'est-à-dire pour tous les nombres ordinaux inférieurs à α ; dans ces conditions une fonction F bien déterminée et unique est définie sur On par G . Ce résultat permet de construire de façon intéressante une interprétation intuitive de ce qu'est un théorème d'existence dans la théorie.

d) Définition d'un bon ordre sur la classe des paires ordonnées de nombres ordinaux.

Nous présentons ce résultat en langage ordinaire : la paire $\langle \alpha\beta \rangle$ est inférieure à la paire $\langle \gamma\delta \rangle$, soit si le plus grand des deux nombres α, β est inférieur au plus grand des deux nombres γ, δ , soit, lorsqu'il y a égalité, si β est inférieur à δ , soit, lorsque β et δ sont de plus égaux, si α

est inférieur à γ . On montre rigoureusement qu'on définit ainsi un bon ordre R sur On^2 et que On^2 ordonné par R est isomorphe à On ordonné par E .

Il est encore utile pour la suite de définir un bon ordre S sur la classe $9 \times On^2$ des triples $\langle \mu\alpha\beta \rangle$, où α et β sont des nombres ordinaux quelconques et μ un des ordinaux $0, 1, \dots, 8$. (Nous omettons la définition précise des entiers). On pose :

$$\mu, \nu < 9. \supset . : \langle \mu\alpha\beta \rangle S \langle \nu\gamma\delta \rangle . \equiv : \langle \alpha\beta \rangle R \langle \gamma\delta \rangle . \vee . (\langle \alpha\beta \rangle = \langle \gamma\delta \rangle . \mu < \nu) : : S \subset (9 \times On^2)^2,$$

ce qui, malgré les apparences, est d'une lecture et d'une interprétation faciles.

3. La notion de constructible.

On va définir un prédicat à un argument, noté $\mathcal{L}$, qui s'applique aux classes et donc plus particulièrement aux ensembles. $\mathcal{L}(X)$ se lit : X est constructible. Comme on va le voir les ensembles constructibles sont mis en relation avec les nombres ordinaux de telle sorte que l'ensemble qui est associé à l'ordinal α dérive des ensembles associés aux ordinaux précédant α par des opérations simples. L'emploi du mot constructible se trouve ainsi expliqué dans une certaine mesure, mais on sera déçu si on s'attend à une méthode de construction intuitive de ces ensembles comme celle qui a été suggérée plus haut à propos des premiers ordinaux et qui donnerait aux ensembles constructibles une existence plus forte, si l'on ose dire, que celle des ensembles non autrement caractérisés de la théorie. Encore une fois constructible est une notion et comme telle elle dérive de l'unique relation d'appartenance par le jeu, si compliqué soit-il, des seuls opérateurs logiques.

On note J l'isomorphisme entre la classe $9 \times On^2$ ordonnée par S et la classe On ordonnée par E . On définit à l'aide de la fonction J neuf nouvelles fonctions, soit J_i ($i = 0, 1, \dots, 8$), par les formules :

$$J_i^c \langle \alpha\beta \rangle = J^c \langle i\alpha\beta \rangle.$$

J étant bi-univoque, il existe deux fonctions, soit K_1 et K_2 , sur On , définies par :

$$\langle \alpha\gamma \rangle \varepsilon K_1 \equiv (\exists \mu, \beta) [\mu < 9. \gamma = J^c \langle \mu\alpha\beta \rangle] . K_1 \subseteq On^2,$$

$$\langle \beta\gamma \rangle \varepsilon K_2 \equiv (\exists \mu, \alpha) [\mu < 9. \gamma = J^c \langle \mu\alpha\beta \rangle] . K_2 \subseteq On^2.$$

On note $\mathcal{U}(A)$ la classe des valeurs d'une fonction A , X^{-1} la classe des paires $\langle uv \rangle$ telles que $\langle vu \rangle \varepsilon X$, $\mathcal{C}_{no\ 2}(X)$ et $\mathcal{C}_{no\ 3}(X)$, les classes de triples $\langle uvw \rangle$ tels que $\langle vwu \rangle \varepsilon X$ et $\langle uuv \rangle \varepsilon X$ respectivement. On note $\mathcal{G}_i$ ($i = 1, \dots, 8$) les huit opérations suivantes :

$$\mathcal{G}_1(XY) = XY$$

$$\mathcal{G}_2(XY) = E.X$$

$$\mathcal{G}_3(XY) = X - Y$$

$$\mathcal{G}_4(XY) = X \upharpoonright Y$$

$$\mathcal{G}_5(XY) = X. \mathcal{D}(Y)$$

$$\mathcal{G}_6(XY) = X.Y^{-1}$$

$$\mathcal{G}_7(XY) = X. \mathcal{C}_{no\ 2}(Y)$$

$$\mathcal{G}_8(XY) = X. \mathcal{C}_{no\ 3}(Y).$$

On démontre alors par induction transfinie qu'il existe une fonction F et une seule sur On telle que :

$$\alpha \varepsilon \mathcal{U}(J_0) \supset F^c\alpha = \mathcal{U}(F \upharpoonright \alpha),$$

$$\alpha \varepsilon \mathcal{U}(J_i) \supset F^c\alpha = \mathcal{G}_i(F^cK_1^c\alpha, F^cK_2^c\alpha), (i = 1, \dots, 8).$$

De cette façon, la fonction F reflète les opérations fondamentales de la théorie telles qu'elles sont contenues dans les axiomes A4 et B1 à B8 (remarquer que $X.Y = X - (X - Y)$), et, en outre, une opération qui consiste à prendre l'ensemble des ensembles déjà définis. On dit qu'un ensemble x est constructible s'il existe un nombre ordinal α tel que $x = F^\alpha$. La classe des valeurs de la fonction F est la classe des ensembles constructibles, notée L . S'il n'est pas douteux qu'on se représente plus facilement la suite des entiers naturels que la classe On , il faut remarquer que cette disparité n'a plus ni sens ni influence quand on introduit ces deux catégories de nombres par la méthode axiomatique et abstraite. La définition des ensembles constructibles réalise *ipso facto* une numérotation, dans un sens élargi, de ces ensembles. Les propriétés remarquables qu'on peut établir à leur sujet tiennent au rôle qu'y joue, grâce à cette numérotation, l'induction transfinie, rôle tout à fait comparable à celui des définitions et des démonstrations par récurrence dans l'arithmétique élémentaire. On pourra se faire une idée un peu précise des premiers ensembles de L en appliquant la définition de F aux vingt ou trente premiers ordinaux. On remarquera que les mêmes ensembles reviennent plusieurs fois. D'autre part, on a peut-être le sentiment que les ensembles de L ou de On sont, d'une certaine manière, plus réels que les ensembles tout à fait nébuleux de V . Sans entrer dans les détails d'une question difficile signalons que ce sentiment est lié à la notion métamathématique de *catégoricité* (un système d'axiomes est catégorique quand tous les systèmes d'objets qui le vérifient sont isomorphes entre eux).

La notion de constructible s'applique aussi aux classes : une classe A est constructible quand tous ses éléments sont des ensembles constructibles et que toute intersection de A et d'un ensemble constructible est un ensemble constructible.

La classe On étant bien ordonnée, il existe un plus petit α tel que $x = F^\alpha$ pour chaque ensemble constructible x ; cet α s'appelle l'ordre de x , noté $Od^\alpha x$.

On établit un certain nombre de théorèmes dont les principaux, d'ailleurs prévisibles, sont : que tout élément d'un ensemble constructible est un ensemble constructible, que O est un ensemble constructible, que L est une classe constructible, que si l'on applique les opérations fondamentales à des classes ou des ensembles constructibles on obtient des classes ou des ensembles constructibles.

4. Le modèle Δ .

On dit qu'on a défini un système d'objets quand on a défini des objets qui forment un certain domaine et des relations entre ces objets. Le modèle Δ est un système d'objets. Les objets de Δ sont les classes constructibles de la théorie, appelées simplement classes quand on ne s'occupe que du modèle, et les ensembles constructibles de la théorie, appelés simplement ensembles dans les mêmes conditions. Il est commode de noter $\bar{X}$ et $\bar{x}$ les objets de Δ . On a en outre dans Δ une relation notée ϵ_1 et appelée relation d'appartenance ; c'est, par définition, la relation ϵ de la théorie, restreinte aux classes et ensembles constructibles.

Une théorie mathématique peut admettre des modèles d'un autre type, constitués en dehors de la théorie. On notera que le modèle Δ s'obtient par une simple restriction de la théorie elle-même. L'étude du modèle Δ comporte les étapes suivantes :

a) *relativisation des concepts.*

C'est une notion métamathématique récursive. Une opération, une notion ou une classe particulière ayant été définie dans la théorie, on remplace dans la formule de définition correspondante les variables $X, Y, \dots, x, y, \dots$, par $\bar{X}, \bar{Y}, \dots, \bar{x}, \bar{y}, \dots$, et les concepts et les variables d'un genre particulier antérieurement définis par les relativisés correspondants, tandis que les symboles logiques et le signe $=$ sont maintenus sans changement. On obtient ainsi la relativisée de l'opération, de la notion ou de la classe particulière considérée. La relativisée d'une variable d'un genre particulier s'obtient en relativisant la notion qui définit ce genre. Il faut noter qu'il n'y a pas de raison *a priori* pour que la relativisée d'une opération ou d'une classe particulière existe, les théorèmes d'existence et d'unicité associés n'étant pas nécessairement vrais dans Δ . On prend pour symboles des relativisés les symboles initiaux affectés de l'indice l . Les classes, notions et opérations relativisées sont *ipso facto* des classes, des notions et des opérations de la théorie.

b) *Notion d'absolu.*

Une classe particulière est qualifiée d'absolue si elle est égale à sa relativisée. Une opération est qualifiée d'absolue si, appliquée à des objets de Δ , elle donne le même résultat que l'opération relativisée appliquée aux mêmes objets. Une notion est qualifiée d'absolue si on obtient des formules équivalentes quand on applique la notion ou sa relativisée à des objets de Δ . En symboles :

$A_l = A, \mathcal{A}_l(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n) = \mathcal{A}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n), \mathcal{B}_l(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n) \equiv \mathcal{B}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$, respectivement. Une variable est qualifiée d'absolue si elle a le même champ que sa relativisée.

On démontre qu'à de rares exceptions près, tous les concepts rencontrés jusqu'ici dans la théorie sont absolus, en particulier tous ceux qui figurent dans le système d'axiomes Σ . On montre aussi que O est absolu et que $V_l = L$.

c) Δ est effectivement un modèle pour la théorie.

Il suffit de prouver que les axiomes de Σ restent vrais quand ils ont été relativisés, c'est-à-dire que sous cette dernière forme ce sont des théorèmes de la théorie. Par exemple, l'axiome $A1$ devient le théorème : tout ensemble constructible est une classe constructible ; l'axiome $A4$, le théorème : l'ensemble unique qui a pour éléments deux ensembles constructibles donnés est constructible.

Ayant démontré que les axiomes de la théorie sont valables dans Δ , on est assuré que les relativisés de tous les théorèmes de la théorie sont vrais, en particulier les théorèmes d'existence et d'unicité qui permettent de définir les classes particulières et les opérations, de sorte que les relativisés de tous les concepts de la théorie existent. C'est ainsi qu'il existe des ordinaux relativisés, des ensembles « relativement » constructibles, etc. Comme ces ensembles ou ces classes sont aussi des ensembles ou des classes de la théorie, on ne peut manquer de se demander quelles relations ils entretiennent avec, si l'on ose dire, leurs originaux.

d) *Résultat fondamental.*

La démonstration du résultat pour lequel tout l'ouvrage est rédigé repose sur le théorème : $V = L$ est vrai dans Δ . Ce qui veut dire exactement que $V_l = L_l$ est vrai dans la théorie, ou, d'après un résultat donné plus haut, que $L = L_l$, c'est-à-dire que la classe des ensembles construc-

tibles est absolue. On obtient ce résultat en montrant de proche en proche que toutes les opérations, notions, etc., que l'on a rencontrées en allant des axiomes jusqu'à la définition de L , sont absolues. En passant, on démontre que On est absolue, ce qui veut dire que les nombres « relativement » ordinaux sont les mêmes que les nombres ordinaux proprement dits, et permet d'affirmer aussi que tout nombre ordinal est constructible. Ce dernier résultat montre assez qu'il ne faut pas prendre le mot constructible au sens ordinaire du terme.

5. Utilisation du modèle.

a) *Raisonnement métathéorique fondamental.*

Δ est un modèle pour les axiomes du système Σ ; en outre, la proposition $V = L$ est vraie dans Δ , donc Δ est aussi un modèle pour la théorie qui comporte, outre les axiomes de Σ , l'axiome supplémentaire $V = L$. Si ce dernier axiome est incompatible avec le système Σ , on peut établir une contradiction dans la théorie ainsi amplifiée, c'est-à-dire démontrer dans cette théorie un théorème, soit P , et sa négation, $\sim P$. Alors, P et $\sim P$ sont vrais dans Δ , c'est-à-dire que P_I et $(\sim P)_I$ sont vrais dans la théorie initiale. Or, $(\sim P)_I$ et $\sim P_I$ sont identiques, donc la théorie fondée sur Σ est contradictoire. Si les axiomes du système Σ sont compatibles entre eux (on dit aussi dans ce cas que le système Σ est consistant), l'hypothèse $V = L$ est compatible avec ces axiomes (ou, si l'on veut, le système formé de Σ et de $V = L$ est consistant). Autrement dit, si la théorie étudiée jusqu'ici n'est pas contradictoire, on ne risque pas de faire surgir une contradiction en supposant, arbitrairement, que tous les ensembles de la théorie sont constructibles.

b) *Compatibilité de l'axiome du choix.*

Il suffit de montrer que l'axiome du choix devient un théorème quand on fait l'hypothèse $V = L$. Or, en vertu de cette hypothèse, tout ensemble est constructible. Soit x un ensemble non vide, chacun de ses éléments a un ordre. L'ensemble des ordres des éléments de x étant un ensemble non vide de nombres ordinaux il admet un plus petit élément α et c'est $F^\alpha x$ que nous choisissons dans x . Autrement dit, la classe univoque A dont l'axiome du choix postule l'existence est la fonction As définie par l'équivalence :

$$\langle yx \rangle \varepsilon As. \equiv : y \varepsilon x.(z) [Od^c z < Od^c y. \supset . \sim z \varepsilon x] . Rel (As).$$

c) *Indications sommaires sur l'hypothèse du continu.*

La démonstration du deuxième théorème de compatibilité, celui qui concerne l'hypothèse généralisée du continu, ne met pas en évidence de nouvelles conceptions métamathématiques. La puissance créatrice de l'auteur dans le domaine proprement mathématique s'y déploie d'une manière particulièrement éclatante, et l'étude, qui demande une attention assez soutenue, de cette partie de son travail, permet de comprendre nettement la signification et les raisons des développements qui précèdent. Le propos plus modeste de cet exposé ne comporte pas que nous rendions compte de ce dernier chapitre de l'ouvrage. Cependant, comme le titre cite explicitement l'hypothèse du continu, il convient que nous en rap-pelions l'énoncé.

Deux ensembles sont dits équivalents quand il existe une correspondance bi-univoque entre ces deux ensembles. On appelle nombre cardinal d'un ensemble x , noté $\bar{x}$, le plus petit nombre ordinal équivalent à cet

ensemble. L'existence, pour un ensemble quelconque, d'un tel nombre ordinal est une conséquence du théorème de Zermelo, selon lequel tout ensemble peut être bien ordonné. Ce théorème dérive à son tour de l'axiome du choix. La classe des nombres cardinaux est bien ordonnée par la relation E. Il est équivalent de dire que $\bar{x} = \bar{y}$ ou que chacun des ensembles x, y est équivalent à une partie de l'autre, c'est le théorème de Schroeder-Bernstein. D'autre part, $x \subseteq y. \supset \bar{x} \leq \bar{y}$. Le nombre cardinal d'un ensemble x est inférieur, au sens strict, au nombre cardinal de l'ensemble des parties de x , résultat connu sous le nom de théorème de Cantor. Enfin, on appelle ordinairement puissance du continu le nombre cardinal de l'ensemble des nombres réels, qui est aussi le cardinal de l'ensemble des parties de l'ensemble des entiers naturels. L'hypothèse du continu est l'hypothèse selon laquelle il n'existe aucun cardinal entre le cardinal de l'ensemble des entiers naturels, ou cardinal du dénombrable, et le cardinal du continu. Plus généralement, si c est un nombre cardinal quelconque et c' le nombre cardinal de l'ensemble des parties de c , l'hypothèse selon laquelle il n'existe aucun cardinal entre c et c' porte le nom d'hypothèse généralisée du continu.

La méthode de Gödel consiste à démontrer cette hypothèse généralisée dans la théorie dont les axiomes sont Σ et $V = L$. Elle peut utiliser librement l'axiome du choix dans les définitions et les déductions qu'impose cette démonstration puisque cet axiome est un théorème de la théorie considérée.

*
**

En décidant de ne citer que les notions métamathématiques qui étaient contenues dans un ouvrage particulier, et un ouvrage dont la majeure partie est mathématique, nous nous sommes interdit délibérément de donner une idée de la métamathématique dans son ensemble. Nous y avons trouvé cet avantage de pouvoir fournir facilement une illustration immédiate des notions que nous avons rencontrées. Il était intéressant aussi d'étudier un exemple où il apparaît nettement que théorie et métathéorie sont étroitement associées. Les recherches de métamathématique pure couvrent un domaine beaucoup plus vaste que celui dont nous avons pu donner une idée, et il est assez connu que ce sont ces recherches difficiles qu'évoque le nom de Gödel. Comme une vue partielle conduit facilement à des interprétations erronées nous voulons dire en conclusion que l'intérêt principal de la métamathématique, ou si l'on préfère de la logique mathématique, n'est pas à notre avis qu'elle fournisse une base plus solide aux déductions mathématiques ou qu'elle permette d'atteindre une vérité plus certaine que celle à laquelle les mathématiciens sont accoutumés, bien qu'il y ait à dire là-dessus ; c'est surtout qu'en analysant le langage mathématique lui-même et en en faisant un objet d'étude mathématique, la métamathématique étend, d'une part, le domaine d'activité des mathématiciens, et leur donne, d'autre part, les moyens de résoudre des problèmes qu'ils n'ont pu éviter de se poser, à mesure que leur discipline, même conçue dans un sens étroit, se développait.

SUR UNE ETUDE DU TETRAEDRE

par R. ESTÈVE

Professeur honoraire au Lycée Jacques-Decour

Objet. — Il est certainement difficile d'écrire du nouveau sur le tétraèdre, car il a été étudié depuis longtemps et sous différents aspects. Il nous a paru toutefois que, si des cas particuliers ont été étudiés à fond, comme par exemple le tétraèdre orthocentrique et le tétraèdre équifacial, naturellement aussi le tétraèdre régulier (n'a-t-on pas, du reste, A étant l'ensemble des tétraèdres orthocentriques et B l'ensemble des tétraèdres équifaciaux, $A \cap B =$ l'ensemble des tétraèdres réguliers), il n'en a pas été de même du cas général, c'est-à-dire du tétraèdre quelconque : c'est ainsi, en particulier, que nous n'avons jamais vu — à moins que nous n'ayons pas su voir, ce qui est tout de même possible, et alors on voudra bien nous excuser — la mention de *sphère des douze points* (ou *sphère d'Euler*) dans le cas du tétraèdre quelconque. Cette sphère est surtout mentionnée dans le cas du tétraèdre orthocentrique et elle voisine alors avec une sphère analogue, celle qui passe par les milieux des arêtes du tétraèdre et par les pieds des perpendiculaires communes aux arêtes opposées. La façon actuelle d'étudier l'homothétie, avec la notion si fructueuse de produit, permet de combler cette lacune et le plus simplement possible. Ce sera là une partie de notre article. Une autre, à la fin, sera consacrée à des questions de maximum et minimum absolus, relatives au tétraèdre, analogues à celles qui ont été traitées sur le triangle dans un article précédent.

Etude du tétraèdre quelconque. — Nous amorcerons cette étude — il faut bien avoir un point de départ — par la notion de centre de gravité de plusieurs points, de quatre dans le cas du tétraèdre. C'est évidemment là une notion linéaire, affine si l'on veut, mais qui conduit peut-être plus directement à l'introduction de la sphère des douze points, qui, elle, est une notion métrique. Comme l'étude que nous nous proposons est métrique, il n'y a aucun inconvénient.

Soit donc un tétraèdre ABCD et G le centre de gravité de ses sommets ($\mathbf{GA} + \mathbf{GB} + \mathbf{GC} + \mathbf{GD} = 0$) ; on sait, en effet, qu'il existe un point et un seul, G, satisfaisant à cette relation, puisque $\mathbf{GA} + \mathbf{GB} + \mathbf{GC} + \mathbf{GD}$ peut s'écrire $\mathbf{GA} + 3\mathbf{GG}_1$ (G_1 , centre de gravité de BCD), ce qui situe, pour avoir $\mathbf{GA} + 3\mathbf{GG}_1 = 0$, le point G aux $3/4$ de $\mathbf{AG}_1$, donc aussi aux $3/4$ de $\mathbf{BG}_2$, aux $3/4$ de $\mathbf{CG}_3$ et aux $3/4$ de $\mathbf{DG}_4$. On peut remarquer aussi, avec I milieu de AB et J milieu de CD, que

$$\mathbf{GA} + \mathbf{GB} + \mathbf{GC} + \mathbf{GD} = 0, \text{ s'écrit } 2\mathbf{GI} + 2\mathbf{GJ} = 0,$$

ce qui situe G au milieu de IJ, donc aussi aux milieux de KL et MN, les notations étant évidentes.

D'où sept droites remarquables et six plans remarquables qui concourent : les quatre droites joignant chacune un sommet au centre de gravité de la facette opposée, les trois droites joignant chacune les milieux de deux arêtes opposées, et les six plans passant chacun par une arête et le milieu de l'arête opposée.

Cela étant, introduisons la sphère circonscrite au tétraèdre : sphère (O) de centre O. Comme $\mathbf{GG}_1 = -1/3 \mathbf{GA}$, l'homothétie (G, $-1/3$) transforme le tétraèdre ABCD en le tétraèdre $G_1G_2G_3G_4$ et la sphère (O) en la sphère (ω) de centre ω , circonscrite au tétraèdre $G_1G_2G_3G_4$. Son centre ω est tel que $\mathbf{G}\omega = -1/3 \mathbf{GO}$.

Mais les sphères (O) et (ω) sont encore homologues dans une homothétie de rapport $1/3$ (de la première à la seconde). Si S est le centre de cette homothétie, on a $S_\omega = 1/3 SO$. On en tire :

$$SG + G_\omega = 1/3 SG + 1/3 GO \quad \text{ou} \quad SG - 1/3 GO = 1/3 SG + 1/3 GO.$$

D'où $SG = GO$ et S est donc le symétrique de O pour G.

Comme $OA + OB + OC + OD = 4 OG$, on a aussi :

$$OA + OB + OC + OD = 2 OS$$

et, par suite, $OS = 1/2 (OA + OB + OC + OD)$, ce qui lie ainsi le point S d'une façon simple au tétraèdre ABCD.

Pour pousser plus loin cette étude, projetons la figure obtenue jusqu'ici sur les plans des facettes, par exemple sur le plan BCD : A donne a (pied de la hauteur issue de A), B, C, D, G_1 sont conservés, O donne A' (centre du cercle circonscrit au triangle BCD), G donne G' tel que $aG' = 3/4 aG_1$, S donne S' tel que $A'S' = 2 A'G'$ et ω donne ω' tel que $G'\omega' = -1/3 G'A'$. Quant à la somme $OA + OB + OC + OD$, elle donne $A'a + A'B + A'C + A'D$, c'est-à-dire, avec α orthocentre de BCD, $A'a + A'\alpha$ (propriété connue facile à retrouver), ou $2 A'\alpha$, α' , milieu de $a\alpha$. Donc, $1/2 (OA + OB + OC + OD)$ ou OS se projette suivant $A'\alpha'$ et, comme O se projette en A' , S se projette en α' . La projection S' de S (nous l'appellerons désormais S') est donc au milieu de $a\alpha$.

Le schéma suivant :

(ω) [hom. (G, — 3)] (O) [hom. (S, 1/3)] (ω),
que l'on peut écrire :

(ω) prod. [hom. (G, — 3) hom. (S, 1/3)] (ω),

où le produit n'est autre que la symétrie (ω), prouve que G_1 et A_1 ($SA_1 = 1/3 SA$) sont symétriques pour ω . La sphère (ω), ayant un diamètre en G_1A_1 , passe donc en A'_1 , projection orthogonale de A_1 sur le plan BCD. Elle passe donc aussi par les projections respectives B'_1 , C'_1 , D'_1 des points B_1 , C_1 , D_1 analogues à A_1 , c'est-à-dire homologues de B, C, D dans l'homothétie (S, 1/3), mais sur les plans CDA, DAB, ABC.

La sphère (ω) passe donc ainsi par les points remarquables G_1 , G_2 , G_3 , G_4 , A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , A'_1 , B'_1 , C'_1 , D'_1 , au nombre de 12 : c'est pour cette raison qu'elle est dite *sphère des douze points* ou *sphère d'Euler*.

Remarquer que si $SA_2 = 3 SA'_1$, la sphère (O) passe en A_2 , et donc aussi aux points analogues B_2 , C_2 , D_2 , c'est-à-dire homologues de B'_1 , C'_1 , D'_1 dans l'homothétie (S, 3).

À noter également que la sphère (ω) coupe le plan BCD suivant le cercle de diamètre $G_1A'_1$, c'est évident.

Tétraèdres particuliers. — On peut particulariser de différentes façons. L'une d'elles consiste à particulariser dans le plan d'une facette, par exemple dans le plan BCD, la figure obtenue jusqu'ici dans l'étude précédente. En particulier, on peut supposer les points a et α confondus, ces points étant liés par des questions d'orthogonalité qui justifient leur rapprochement : ceci conduira au *tétraèdre orthocentrique* (arêtes opposées orthogonales dans les trois couples). En particulier, aussi, on peut supposer que la droite $a\alpha$ est une hauteur du triangle BCD, par exemple celle passant par B : ceci conduira au *tétraèdre orthogonal* (arêtes opposées orthogonales dans un seul couple). On peut encore supposer d'autres positions relatives particulières pour les points intéressants du plan BCD, tels que a , α , A' , S' , G' , ω' ...

Une autre façon d'opérer, puisque l'étude entreprise repose surtout sur les sphères (O) et (ω), est de particulariser la position relative de ces sphères : il est certain que la première qui vient à l'esprit est celle où les centres sont confondus, en admettant, bien entendu, l'existence d'un tétraèdre correspondant ; ceci conduira au *tétraèdre équifacial* (facettes égales ou arêtes opposées égales dans chaque couple, ce qui revient au même). Ceci peut faire penser à envisager un tétraèdre où les arêtes opposées sont égales dans un seul couple, ou bien égales dans deux couples, ou encore égales et orthogonales à la fois dans un seul couple. Et nous sommes loin d'avoir épuisé toutes les positions relatives des sphères (O) et (ω). Le sujet est donc vaste.

Cas où a et α sont confondus. Tétraèdre orthocentrique. — L'étude du tétraèdre orthocentrique étant classique, facile à reprendre avec le produit scalaire, ou même autrement, nous rappellerons simplement les propriétés les plus importantes. L'hypothèse que a et α sont confondus entraîne que les arêtes opposées sont orthogonales dans les trois couples et que les quatre hauteurs du tétraèdre passent par un même point (orthocentre) : c'est par l'existence de ce point que l'on définit le tétraèdre orthocentrique (tétraèdre où les quatre hauteurs passent par un même point), et de là vient aussi sa dénomination. Réciproquement, si un tétraèdre est orthocentrique, son orthocentre se projette sur le plan d'une facette quelconque, en l'orthocentre de cette facette, et les arêtes opposées sont orthogonales dans les trois couples (remarquer que l'orthogonalité dans deux couples entraîne l'orthogonalité dans les trois). De cela résulte évidemment que, dans un tétraèdre, les points des couples $\alpha\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ (les notations sont évidentes) sont confondus en même temps ou distincts en même temps.

Le tétraèdre étant orthocentrique, et H étant son orthocentre, on voit facilement que S est en H, S' en a (ou α) et que, dès lors, les douze points remarquables de la sphère d'Euler sont, ici, G_1 , G_2 , G_3 , G_4 , a , b , c , d et les points situés aux tiers des vecteurs $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{HD}$. Tout cela est du reste connu.

Le tétraèdre étant toujours orthocentrique, chacun des segments IJ, KL, MN est diagonale commune à deux rectangles (ces rectangles sont au nombre de trois), et on en déduit $IJ = KL = MN$: les six points I, J, K, L, M, N sont donc cosphériques. I', J', K', L', M', N' étant les points où cette sphère recoupe l'ensemble des arêtes, on a, en particulier, $I'J \perp I'I$ ou AB. Comme $CD \perp AB$, on a aussi $CDI' \perp AB$ et, par suite, $I'J' \perp AB$. De même $I'J' \perp CD$. Ceci revient à dire que I'J' est la perpendiculaire commune aux deux arêtes opposées AB et CD. De même KL est la perpendiculaire commune à AC et DB et MN la perpendiculaire commune à AD et BC. La sphère passant par les milieux des arêtes d'un tétraèdre orthocentrique passe donc aussi par les pieds des perpendiculaires communes relatives aux couples d'arêtes opposées. Elle est dite *deuxième sphère d'Euler*.

Cas où O et ω sont confondus. Tétraèdre équifacial. — ABCD étant supposé exister avec une telle propriété, les points O, ω , G, S y sont confondus. On a alors $GA = GB = GC = GD$: en particulier, G est dans le médiateur de AB et aussi dans celui de CD. I étant le milieu de AB et J celui de CD, GI est perpendiculaire à AB et GJ perpendiculaire à CD : comme I, G, J sont alignés, IJ est médiatrice (spatiale) commune à AB et CD, donc axe de symétrie du tétraèdre. Dans cette symétrie, A donne B, B donne A, C donne D et D donne C : donc $AC = BD$ et $AD = BC$. Les facettes ABC et BAD sont égales. On en conclut aisément que les quatre facettes sont égales et le tétraèdre est dit *équifacial*. Remarquons

aussi que, dès lors, $Aa = Bb = Cc = Dd$ et, comme O et G sont confondus, O est équidistant des plans des facettes, et, par suite, centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre. Le rayon de cette sphère est le quart de la valeur commune des hauteurs.

Réciproquement, soit un tétraèdre équifacial ABCD. Les triangles ABC et ABD étant égaux ($AC = BD$, $AD = BC$), leurs hauteurs homologues Ch et Dk sont égales. Le milieu I de AB étant aussi celui de hk, les plans perpendiculaires à AB en h, I, k sont équidistants, et, comme les extrêmes coupent CD en C et D, le médian coupe donc CD en son milieu J. IJ est ainsi médiatrice de AB et G, qui est au milieu de IJ, est donc tel que $GA = GB$. On en déduit aisément que G est équidistant de A, B, C, D. Donc, G et O sont confondus et, par suite, ω avec eux.

La marche suivie prouve l'existence du tétraèdre équifacial, puisqu'elle donne divers moyens de l'obtenir.

D'où l'énoncé suivant :

Le tétraèdre équifacial a ses sphères (O), (ω) et inscrite concentriques, et il est le seul dans ce cas.

On peut voir aussi, facilement, que les centres de gravité (du volume, de la surface et de l'ensemble des arêtes) y sont confondus. Par transposition autour de IJ, KL, MN, on trouve aisément $Ga = Gb = Gc = Gd$. De plus, comme G (ou S) se projette sur le plan BCD par exemple au milieu de $a\alpha$, on a aussi $Ga = G\alpha$. On en déduit :

$$Ga = Gb = Gc = Gd = G\alpha = G\beta = G\gamma = G\delta.$$

Il existe donc une sphère de centre G passant aux points $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$. Comme cette sphère passe aussi par les milieux des hauteurs (ce que l'on voit immédiatement), on peut dire qu'elle est une autre sphère des douze points pour le tétraèdre équifacial.

Tétraèdre régulier. — On peut le définir comme un tétraèdre ayant toutes ses arêtes égales ou bien comme un tétraèdre ayant pour facettes des triangles équilatéraux (définitions équivalentes). L'une ou l'autre prouve son existence.

On voit tout de suite que le tétraèdre régulier est à la fois orthocentrique et équifacial.

La réciproque est vraie. Si ABCD est à la fois orthocentrique et équifacial, le plan médiateur de AB, par exemple, contient CD, et l'on a, en particulier, $CA = CB$: on en déduit que toutes les arêtes sont égales, et le tétraèdre est régulier.

Cas où $a\alpha$ est une hauteur de la facette BCD. Tétraèdre orthogonal. — Si $a\alpha$ est une hauteur de BCD, par exemple celle de B, Ba est perpendiculaire à CD, et, comme Aa est aussi perpendiculaire à CD, le plan ABa est perpendiculaire à CD : d'où $AB \perp CD$.

Réciproquement, si $AB \perp CD$, on a $ABa \perp CD$: donc, $Ba \perp CD$ et $a\alpha$ passe en B.

Par analogie, $b\beta$ passe en A, $c\gamma$ en D et $d\delta$ en C.

On peut donc noter que, si l'une des droites $a\alpha, b\beta, c\gamma, d\delta$ est hauteur dans la facette qui la contient, il en est de même des trois autres dans les facettes qui les contiennent.

Nous appellerons *tétraèdre orthogonal* tout tétraèdre dans lequel les arêtes opposées sont orthogonales dans un seul couple. Le tétraèdre orthocentrique est donc triorthogonal.

Si $AB \perp CD$, le plan ABa est $\perp$ CD, donc à ACD : la hauteur Bb est donc dans ce plan. D'où le concours des hauteurs de A et B (en P). Par analogie, les hauteurs de C et D concourent (en Q). Si le plan ABP

coupe CD en E, EP est la troisième hauteur du triangle ABE (les deux autres étant Aa et Bb). F étant son pied sur AB, on en déduit que EF est la perpendiculaire commune à AB et CD. S, dont les projections sur les plans BCD, CDA, DAB, ABC sont respectivement les milieux de $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$, $\delta\delta$, se trouve donc dans les plans ABE et CDF, donc sur leur droite d'intersection EF (ou PQ). De plus, si la perpendiculaire en α au plan BCD rencontre PQ en P' et la perpendiculaire en β au plan ACD rencontre PQ en P'', on a $PP' = 2 PS$ et $PP'' = 2 PS$. D'où la coïncidence de P' et P''.

S est ainsi le milieu du segment PP', et donc aussi du segment analogue QQ'.

Si l'on appelle *cohauteur* d'un sommet du tétraèdre la perpendiculaire à la facette opposée en son orthocentre, on peut donner l'énoncé suivant :

Si un tétraèdre a deux arêtes opposées orthogonales (tétraèdre orthogonal), les hauteurs issues des sommets de chacune de ces arêtes se coupent, ainsi que les cohauteurs correspondantes, et les quatre points obtenus appartiennent à la perpendiculaire commune aux deux arêtes et y sont symétriques, associés par hauteurs et cohauteurs correspondantes, pour le point S.

Si un tétraèdre est triorthogonal (orthocentrique), les hauteurs se coupent donc deux à deux et, comme elles ne sont pas coplanaires, elles concourent toutes en un même point et, pour une raison analogue, il en est ainsi des cohauteurs, lesquelles sont du reste confondues avec les hauteurs. Le point de concours unique est alors le point S ou H (orthocentre).

Le sujet du tétraèdre est loin d'être épuisé, non seulement dans le cas général, mais aussi du côté des cas particuliers que l'on peut concevoir en grand nombre, comme nous l'avons déjà dit, en particulierisant soit dans le plan d'une facette (les seuls points α , α , A' se prêtent déjà à beaucoup), soit de toute autre façon (arêtes, facettes, etc.) (1).

Questions de maximum et de minimum absolus relatives au tétraèdre.

— Les questions que nous allons résoudre maintenant sont analogues à celles que nous avons résolues, dans un article précédent, relativement au triangle (n° 214, page 265).

ABCD étant un tétraèdre quelconque et I le barycentre des points massifs (A, α), (B, β), (C, γ), (D, δ), ($\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$), écrivons la relation de Leibniz pour un point M quelconque de l'espace :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 + \delta MD^2 = \alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2 + \delta ID^2 + (\alpha + \beta + \gamma + \delta) MI^2.$$

On en déduit immédiatement que la somme du premier membre de cette égalité est maximum ou minimum lorsque M est en I suivant que $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ est négative ou positive et, donc, en particulier, si α , β , γ , δ sont tous positifs.

Cela étant rappelé, soit ABCD un tétraèdre quelconque, I un point intérieur et $abcd$ le tétraèdre podaire de I pour ABCD : a , b , c , d sont donc les pieds des perpendiculaires menées de I sur les plans BCD, CDA,

(1) Les collègues désireux d'avoir sur ce sujet, particulièrement dans le cas général et dans les cas particuliers classiques (tétraèdre orthocentrique, tétraèdre équilatéral, tétraèdre régulier), des résultats plus substantiels, pourront consulter avec intérêt l'ouvrage suivant : P. COUDERC et A. BALLICIONI, *Premier livre du tétraèdre*, Editeur Gauthier-Villars.

DAB, ABC. En raisonnant comme il a été fait pour le triangle dans l'article mentionné, on voit que $\alpha Ia^2 + \beta Ib^2 + \gamma Ic^2 + \delta Id^2$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont proportionnels aux volumes des tétraèdres $Ibcd, IcdA, Idab, Iabc$, donnant ainsi I comme barycentre des points massifs $(a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma), (d, \delta)$, est le minimum de la somme $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 + \delta MD^2$, où M est un point quelconque de l'espace et $A'B'C'D'$ le tétraèdre podaire de M pour ABCD. Ceci suppose évidemment que I est choisi d'abord et que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en découlent comme il a été dit. Mais en est-il de même si les nombres positifs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont donnés d'abord, autrement dit, existe-t-il alors un point I qui soit le barycentre des points massifs $(a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma), (d, \delta)$, où $abcd$ est le tétraèdre podaire de I pour ABCD ?

En admettant l'existence de I, on a alors :

$$(1) \quad \frac{\alpha}{\text{vol. } Ibcd} = \frac{\beta}{\text{vol. } IcdA} = \frac{\gamma}{\text{vol. } Idab} = \frac{\delta}{\text{vol. } Iabc}.$$

Comme il faut faire apparaître, à partir de vol. $Ibcd$ par exemple, vol. IBCD, la méthode n'est certainement pas aussi simple que dans le plan (*).

Si P, Q, R sont les points à l'unité de distance de A sur les arêtes du trièdre A du tétraèdre ABCD et P', Q', R' les points analogues sur les arêtes du trièdre supplémentaire (nous appellerons les trièdres APQR et AP'Q'R' tétraèdres unitaires en A pour le tétraèdre ABCD), on a, en remarquant que le trièdre supplémentaire et le trièdre $Ibcd$ sont symétriques pour le milieu de AI, vol. $Ibcd = Ib.Ic.Id.u'(A)$, où $u(A)$ et $u'(A)$ désignent les volumes des tétraèdres unitaires APQR et AP'Q'R' (la notation u' ne désigne donc pas une dérivée).

De plus, on établit facilement les relations suivantes, en posant $\widehat{PAP'} = \varphi$, $\widehat{CAD} = b$ et dièdre $\widehat{AB} = B$:

$$u(A) = \frac{1}{6} \sin b \cos \varphi, \quad u'(A) = \frac{1}{6} \sin B \cos \varphi.$$

On en déduit $u'(A) = \frac{\sin B}{\sin b} u(A)$. Comme on aurait de même $u'(A) = \frac{\sin C}{\sin c} u(A)$ et $u'(A) = \frac{\sin D}{\sin d} u(A)$, on établit ainsi, au passage, l'analogie des sinus pour le trièdre ABCD et, par suite, pour un trièdre quelconque. Nous désignerons désormais par $k(A)$ la valeur commune des trois rapports en sinus et par $s(A)$ l'aire de la facette BCD du tétraèdre ABCD opposée à A. Naturellement, il en découle des notations analogues en B, C et D.

Dès lors, les relations (1) deviennent, en y remplaçant les quatre volumes par leurs valeurs $Ib.Ic.Id.u(A).k(A)$, $Ic.Id.Ia.u(B).k(B)$, $Id.Ia.Ib.u(C).k(C)$, $Ia.Ib.Ic.u(D).k(D)$, puis celles-ci par les valeurs proportionnelles $\frac{u(A).k(A)}{Ia}$, $\frac{u(B).k(B)}{Ib}$, $\frac{u(C).k(C)}{Ic}$, $\frac{u(D).k(D)}{Id}$ et enfin ces dernières par les valeurs proportionnelles $\frac{p}{\text{vol. } IBCD}$, $\frac{q}{\text{vol. } ICDA}$, $\frac{r}{\text{vol. } IDAB}$,

(*) Si une méthode plus simple nous a échappé, qu'on veuille bien nous en excuser.

$\frac{s}{\text{vol. IABC}}$ où p désigne le produit $u(A) \cdot k(A) \cdot s(A)$ et q, r, s des produits analogues en B, C, D :

$$\frac{\text{vol. IBCD}}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)} = \frac{\text{vol. ICDA}}{\left(\frac{q}{\beta}\right)} = \frac{\text{vol. IDAB}}{\left(\frac{r}{\gamma}\right)} = \frac{\text{vol. IABC}}{\left(\frac{s}{\delta}\right)}.$$

I est donc le barycentre des points massifs $\left(A, \frac{p}{\alpha}\right), \left(B, \frac{q}{\beta}\right), \left(C, \frac{r}{\gamma}\right), \left(D, \frac{s}{\delta}\right)$. Ceci prouve l'existence de I, car la réciproque est vraie (démonstration à rebours de la précédente).

Cependant, les valeurs de p, q, r, s étant assez compliquées, essayons de les remplacer par des quantités proportionnelles plus simples. Pour cela, calculons $\frac{p}{q}$ par exemple, car p et q ont certainement des facteurs communs. On a, V étant le volume du tétraèdre ABCD :

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \frac{V}{AB \cdot AC \cdot AD} \cdot \frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{CAD}} \cdot s(A) \cdot \frac{BA \cdot BC \cdot BD}{V} \cdot \frac{\sin \widehat{CBD}}{\sin \widehat{BA}} \cdot \frac{1}{s(B)} \\ &= \frac{s(A)}{2 s(B)} \cdot \frac{2 s(A)}{s(B)} = \frac{[s(A)]^2}{[s(B)]^2}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \frac{p}{[s(A)]^2} = \frac{q}{[s(B)]^2}.$$

Comme on raisonnerait de même avec $\frac{p}{r}$ et $\frac{p}{s}$, on en conclut que p, q, r, s sont proportionnels aux carrés des aires $s(A), s(B), s(C), s(D)$ (il n'y a pas lieu de confondre les deux sortes d' s).

Notons, au passage, que $u'(A), u'(B), u'(C), u'(D)$, étant les quotients respectifs de p, q, r, s par $s(A), s(B), s(C), s(D)$, sont donc proportionnels à $s(A), s(B), s(C), s(D)$.

Notons bien que I est le barycentre des points A, B, C, D avec les masses respectives $\frac{[s(A)]^2}{\alpha}, \frac{[s(B)]^2}{\beta}, \frac{[s(C)]^2}{\gamma}, \frac{[s(D)]^2}{\delta}$.

Remarquons qu'il y a réciprocité entre ces quatre nombres et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Remarquons aussi, puisque $\alpha \mathbf{Ia} + \beta \mathbf{Ib} + \gamma \mathbf{Ic} + \delta \mathbf{Id} = 0$, qu'une question de Statique vient d'être résolue.

Tous les résultats trouvés nous conduisent donc aux énoncés suivants :

1° Dans un tétraèdre, le rapport du volume du tétraèdre unitaire sur le trièdre supplémentaire en un sommet à l'aire de la facette opposée à ce sommet est indépendant du sommet.

2° Le barycentre des sommets A, B, C, D d'un tétraèdre avec les masses positives respectives $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ est en même temps le barycentre des sommets de son tétraèdre podaire avec les masses

$$\frac{1}{\alpha} [s(A)]^2, \frac{1}{\beta} [s(B)]^2, \frac{1}{\gamma} [s(C)]^2, \frac{1}{\delta} [s(D)]^2.$$

3° La somme $\alpha \mathbf{MA}^2 + \beta \mathbf{MB}^2 + \gamma \mathbf{MC}^2 + \delta \mathbf{MD}^2$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont posi-

tifs et A'B'C'D' est le tétraèdre podaire de M pour ABCD, a sa plus petite valeur lorsque M est au barycentre des points A, B, C, D avec les masses

$$\frac{1}{\alpha} [s(A)]^2, \frac{1}{\beta} [s(B)]^2, \frac{1}{\gamma} [s(C)]^2, \frac{1}{\delta} [s(D)]^2.$$

4° La position d'équilibre d'un point M soumis aux forces $\alpha MA'$, $\beta MB'$, $\gamma MC'$, $\delta MD'$, où A'B'C'D' est le tétraèdre podaire de M pour ABCD, est le barycentre des points A, B, C, D avec les masses réciproques (au sens indiqué plus haut) de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Nous avons supposé $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ positifs. En faisant appel à la notion de volume algébrique, on peut voir que certains des énoncés précédents sont encore valables avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de signes quelconques, sous certaines conditions toutefois que l'on peut préciser aisément.

Un cas particulier intéressant (côtés masses) est celui où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont égaux (ou proportionnels) à $[s(A)]^2, [s(B)]^2, [s(C)]^2, [s(D)]^2$, car alors le point I est le centre de gravité du tétraèdre (désigné plus haut par G). La somme

$$[s(A)]^2 MA'^2 + [s(B)]^2 MB'^2 + [s(C)]^2 MC'^2 + [s(D)]^2 MD'^2$$

est donc minimum en G et on a évidemment la même conclusion pour la somme (vol. MBCD)² + (vol. MCDA)² + (vol. MDAB)² + (vol. MABC)².

Un autre cas particulier intéressant (toujours côté masses) est celui où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont égaux entre eux (à 1 par exemple). Le point I est alors le barycentre des points A, B, C, D avec pour masses les carrés des aires des facettes opposées et c'est alors la somme $MA'^2 + MB'^2 + MC'^2 + MD'^2$ qui est minimum en ce point.

Remarquer que, dans le premier cas, c'est la somme

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$$

qui est minimum en I et que, dans le second, c'est la somme

$$[s(A)]^2 MA'^2 + [s(B)]^2 MB'^2 + [s(C)]^2 MC'^2 + [s(D)]^2 MD'^2$$

qui est minimum en I.

Plus généralement, désignons par I et I' les deux points ayant pour coordonnées barycentriques, tous deux pour ABCD, le quadruplet $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et le quadruplet réciproque $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$, donc avec

$$\alpha\alpha' = [s(A)]^2, \beta\beta' = [s(B)]^2, \gamma\gamma' = [s(C)]^2, \delta\delta' = [s(D)]^2.$$

On voit immédiatement que les deux sommes

$\alpha MA'^2 + \beta MB'^2 + \gamma MC'^2 + \delta MD'^2$ et $\alpha' MA^2 + \beta' MB^2 + \gamma' MC^2 + \delta' MD^2$ sont minimum en I', tandis que les deux sommes

$\alpha' MA^2 + \beta' MB^2 + \gamma' MC^2 + \delta' MD^2$ et $\alpha MA'^2 + \beta MB'^2 + \gamma MC'^2 + \delta MD'^2$ sont minimum en I. (I' désigne ici le point qui était désigné plus haut par I, mais il n'y a aucune confusion possible).

Si l'on considère les plans bissecteurs d'un dièdre du tétraèdre et les plans passant par l'arête de ce dièdre et respectivement par I et I', ils coupent l'arête opposée en quatre points σ, σ', i, i' qui sont en division harmonique. En effet, si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ varient, i et i' décrivent sur cette dernière arête deux divisions en involution dont σ et σ' sont les points doubles : pour le voir, on peut utiliser les rapports en lesquels les quatre points i, i', σ, σ' partagent ladite arête (vecteur) et constater que le produit des deux premiers est égal au carré du troisième (ou du quatrième). Il en résulte que les quatre plans en question constituent un faisceau harmonique, et avec deux plans conjugués rectangulaires : par suite, les deux autres sont symétriques l'un de l'autre pour chacun des deux premiers et on peut donc les appeler *plans isogonaux* pour les plans des facettes du tétraèdre contenant la première arête en cause. On a des conclusions analogues pour les cinq autres arêtes du tétraèdre combinées

chacune avec I et I'. Ceci amène à appeler ces points *points isogonaux* pour le tétraèdre. Faire bien attention toutefois que deux plans isogonaux issus d'une arête ne coupent pas les facettes passant par l'arête opposée suivant deux droites nécessairement isogonales pour chacune d'elles. La notion de points isogonaux dans l'espace est liée à la notion de plans isogonaux, mais n'a rien à voir avec la notion de droites isogonales.

Dans le cas particulier où les masses sont égales, le point I est en G (centre de gravité du tétraèdre) et, dans tout couple de plans isogonaux (six couples), l'un des plans passe par une arête et le milieu de l'arête opposée. On peut donc appeler ce plan *plan médian* et, dès lors, son associé prend tout naturellement le nom de *plan symédian*. Le point I' est dit alors *point symédian* ou *point de Lemoine* du tétraèdre. Notons, au passage, que le plan symédian issu d'une arête partage l'arête opposée dans un rapport (arithmétique) égal au rapport des carrés des aires des facettes passant par la première arête et que les plans symédiens d'un tétraèdre (au nombre de six) passent par un même point. Faire bien attention qu'un plan symédian ne coupe pas les facettes intéressées suivant des symédianes de ces facettes.

Dans le cas particulier où le tétraèdre ABCD est équifacial, on a $s(A) = s(B) = s(C) = s(D)$. Les quadruplets réciproques deviennent $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et $1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma, 1/\delta$: les points I et I', tout en étant isogonaux, sont alors ce que l'on peut appeler *points isotomiques* parce que les points que nous avons appelés ci-dessus *i* et *i'* sont symétriques pour le milieu de l'arête qui les porte : ce milieu n'est autre que σ ; quant à σ' , il est à l'infini sur l'arête. Ceci permet d'énoncer :

Dans un tétraèdre équifacial, le bissecteur d'un dièdre est en même temps plan médian (et donc aussi plan symédian) et deux plans isogonaux sont en même temps isotomiques.

Tout ceci peut aussi s'établir en utilisant la transposition autour de la médiatrice commune à deux arêtes opposées. Ne pas en conclure toutefois que deux points tels que I et I' soient symétriques pour une médiatrice commune.

Si, de plus, dans le cas du tétraèdre équifacial, les masses sont égales, les deux sommes

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ et $MA'^2 + MB'^2 + MC'^2 + MD'^2$
sont minimum au même point : ce point n'est autre que G, ou S, ou O, ou ω (notations du début).

Pour le tétraèdre régulier, on a des conclusions analogues. On peut alors calculer les deux minimum dans le cas des masses égales en fonction de l'arête du tétraèdre.

On peut remarquer que le cas du tétraèdre équifacial dans l'espace est à rapprocher du cas du triangle équilatéral dans le plan.

GAUTHIER - VILLARS

55, Quai des Gds-Augustins
PARIS VI° - DANton 05-10

OEUVRES DE CAMILLE JORDAN

Publiées sous la direction de M. Gaston Julia, Membre de l'Institut

par M. Jean DIEUDONNE

Professeur à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques

Les deux premiers volumes des Œuvres complètes de Camille Jordan, que nous présentons aujourd'hui au public mathématique, renferment l'ensemble de ses travaux sur la théorie des groupes.

On trouvera dans les commentaires que M. Dieudonné a insérés après la liste des travaux de Jordan, une analyse très complète et une mise en valeur des principaux résultats contenus dans les deux présents volumes ainsi que des indications sur les travaux qu'ils ont suscités dans diverses directions.

T. 1, In-8 (16 × 25), XL-498 pages	broché	80 NF
	cart.	85 NF
T. 2, In-8 (16 × 25), VI-556 pages	broché	80 NF
	cart.	85 NF

Cahiers scientifiques - Fascicule XXVI

COURS D'ANALYSE DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE

Tome III. Théorie des Equations

Fascicule I. Equations différentielles

par J. FAVARD

Les leçons que l'auteur professe à l'Ecole Polytechnique ont été étoffées avec l'intention de faire un livre utilisable par les étudiants en mathématiques et par tous ceux qui doivent, ou veulent avoir en Analyse des connaissances précises et assez étendues.

In-8 (16 × 25), 294 pages, 134 figures, 1962 45 NF

Traité de Physique théorique et de Physique mathématique, XV

APPLICATION DE L'ALGEBRE MODERNE

A QUELQUES PROBLEMES DE PHYSIQUE CLASSIQUE

par Maurice PARODI

Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers

Le présent ouvrage est une des premières tentatives où l'on s'efforce de présenter une grande variété de problèmes de physique classique en suivant les procédés de l'algèbre moderne.

In-8 (16 × 25), 350 pages, 90 figures, 1961 60 NF

Collection Information et Cybernétique

INFORMATION, THERMODYNAMIQUE

VIE ET PENSEE

par François BONSACK

Il s'agit à la fois d'un travail d'approfondissement de notions fondamentales et d'un travail de synthèse, qui ne respecte pas les limites traditionnelles des sciences, ni même celles qui sépareraient, selon certains, la science de la philosophie.

In-8 (16 × 25), 192 pages, 1961 cartonnage souple 33 NF

ANNUAIRE POUR L'AN 1962

publié par le Bureau des Longitudes avec un supplément pour l'an 1963

In-8 (13 × 19), VII-738 pages broché 45 NF
cart. 50 NF

SUR LE DIAGRAMME DE VENN

Lorsqu'on résume les conclusions d'une étude au moyen d'un diagramme de Venn, on indique souvent l'inclusion $B \subset A$ au moyen de la figure 1. Deux sous-ensembles disjoints sont indiqués sur la figure 2. S'il s'agit de représenter dans l'ensemble Q des quadrilatères les sous-ensembles $\mathcal{P}$ des parallélogrammes, $\mathcal{R}$ des rectangles, $\mathcal{L}$ des losanges et $\mathcal{C}$ des carrés, on fera la figure 3.

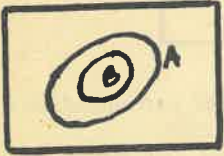


FIG. 1

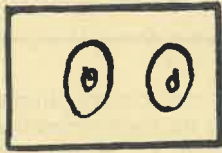


FIG. 2

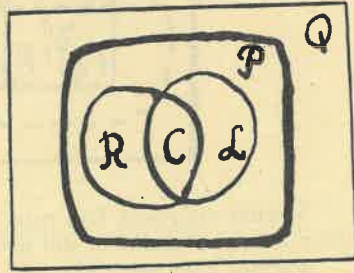


FIG. 3

Tout ceci n'est guère systématique et l'on peut se demander si une représentation plane de ce type est réalisable dans tous les cas pour un nombre quelconque de qualités.

La réponse est affirmative (1) :

Un ensemble de n qualités $q_1, q_2, \dots, q_n$ doit, pour que tous les cas soient prévus, correspondre à une partition du référentiel E en 2^n sous-ensembles avec la condition suivante : chacun des sous-ensembles, déterminé dans E par $n-1$ qualités, doit être divisé en deux parties par la ligne fermée qui correspond à la n ème qualité.

Nous faisons (fig. 4 et 4 bis) un schéma adapté au raisonnement par récurrence, mais l'on peut suivre un cas particulier sur la figure 5 où nous passons du cas bien connu de 3 qualités, 8 régions, au cas de 4 qualités.

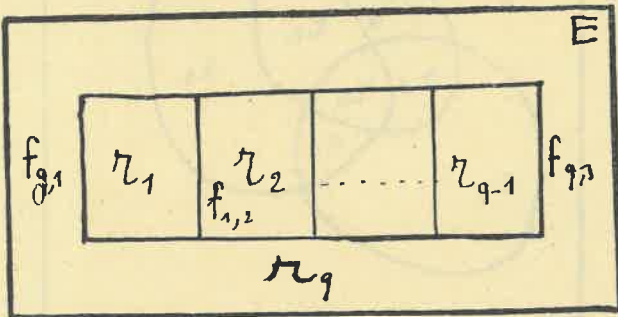


FIG. 4

(1) On trouvera l'esquisse de la démonstration à la fin de la note 1 de « l'Aspect moderne des Mathématiques » (chez Blanchard, 1957), mais des lecteurs m'ont demandé le détail de la démonstration.

Partons de l'hypothèse, vérifiée pour $n=2$ (et $n=3$), que, pour une valeur p de n , le référentiel est partagé en $q = 2^p$ régions, et que celles-ci peuvent être rangées en un ordre cyclique $r_1, r_2, \dots, r_i, r_{i+1}, \dots, r_q$ (r_{q+1} étant r_1), avec la condition que deux régions consécutives quelconques r_i, r_{i+1} aient un arc frontière commun $f_{i, i+1}$. Enfin, nous supposons que r_q est une région entourant la réunion des autres régions (fig. 4).

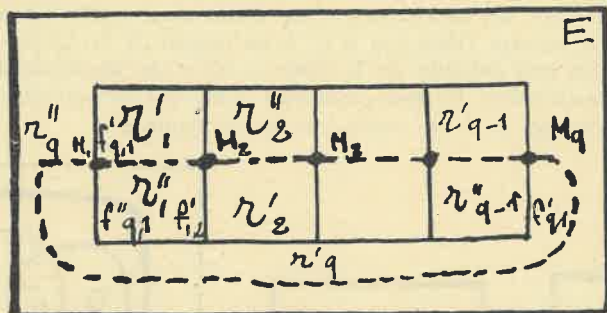


FIG. 4^{bis}

Voyons comment l'on peut définir une courbe simple fermée correspondant à une $n+1$ ième qualité et qui détermine un régionnement convenable.

Partons d'un point $M_1 \in f_{q,1}$. Il sépare $f_{q,1}$ en deux arcs dont nous nommerons l'un $f'_{q,1}$ et l'autre $f''_{q,1}$.

Prenons de même $M_2 \in f_{1,2}$, d'où deux arcs dont l'un sera plus loin choisi comme $f'_{1,2}$, l'autre étant $f''_{1,2}$. Il existe un arc $M_1 M_2$ inclus dans r_1 . De même, nous considérons

$M_3 \in f_{2,3}, M_2 M_3 \subset r_2$, etc. jusqu'à

$M_q \in f_{q-1,q}, M_{q-1} M_q \subset r_{q-1}$ et $M_q M_1 \subset r_q$ qui sera choisi plus loin.

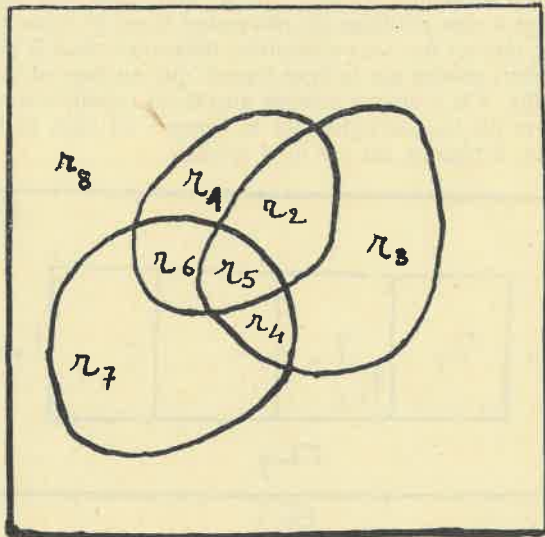


FIG. 5

Nommons maintenant r'_1 le sous-ensemble formé dans r_1 qui a $f'_{q,1}$ comme arc-frontière, et r''_1 son complémentaire dans r_1 (ils ont $M_1 M_2$ comme arc-frontière

commun). Nous nommons $f'_{1,2}$ l'arc de frontière commune à r'_1 et r_2 , et r'_2 la région de r_2 qui a pour arcs-frontières $f'_{1,2}$ et M_2M_3 ; le complémentaire de r'_2 dans r_2 sera r''_2 . Nous continuons ainsi jusqu'à r'_{q-1} et r''_{q-1} . Alors, comme q est pair, on peut choisir l'arc M_qM_1 pour qu'une région r'_q ait pour arcs-frontières $f'_{q-1,q}$ et $f'_{q,1}$. Son complémentaire r''_q aura dans sa frontière $f'_{q,1}$, ce qui ferme le cycle : la région suivante sera bien r'_1 .

La suite de régions $s_1 = r'_1, s_2 = r''_1, s_3 = r'_2, s_4 = r''_2, \dots, s_{2q-1} = r'_q, s_{2q} = r''_q$ a les propriétés voulues pour $n = p + 1$ qualités correspondant à 2^{p+1} régions.

Le résultat, vrai pour $n = 2$ et qui est vrai pour $n = p + 1$ s'il l'est pour $n = p$, est donc vrai quel que soit l'entier n .

Les théorèmes concernant une situation mathématique déterminée expriment des incompatibilités entre appartenance d'un élément à des sous-ensembles ; ceci se traduit en indiquant que des régions sont vides (on les marque du signe $\emptyset$). Si, par exemple, on fait le schéma correspondant à la situation qui nous a fait dessiner la figure 3, 5 seulement des 16 régions ne sont pas vides.

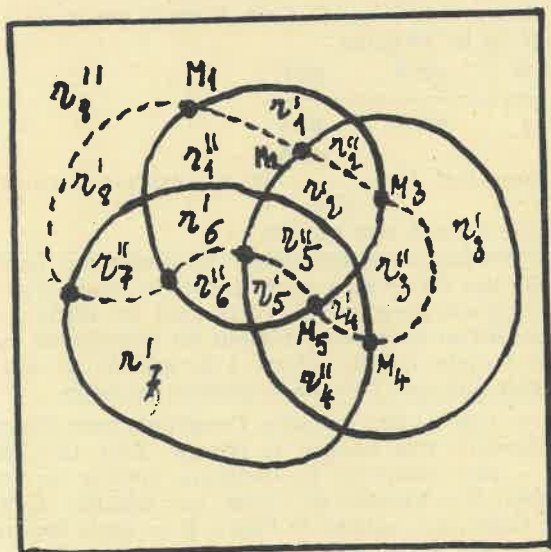


FIG. 5^{bis}

Remarque : On peut maintenant en déduire la possibilité de schémas sans cases vides : il suffit de superposer des arcs-frontières comme on superposerait les parois d'un ballon qu'on dégonfle. Mais, à cause de la superposition de frontières, le schéma n'est guère lisible à moins qu'on n'y mette de la couleur. Les lois suivant lesquelles on « décollerait » des arcs pour obtenir les schémas tels que 1, 2, 3 ne semblent pas faciles à énoncer en toute généralité avec détermination des cas où c'est possible.

Ainsi, l'on voit que les conséquences de notre logique sont représentables dans l'espace-plan.

Lucienne FÉLIX (La Fontaine, Paris).

LES MATHÉMATIQUES DU JEUNE ASTRONOME

Un mauvais argument souvent présenté contre l'enseignement de l'astronomie consiste à dire : ou bien le cours de cosmographie énumère des banalités descriptives, ou bien il sombre dans la technique de calculs numériques ennuyeux et peu instructifs. La présente note a pour but de rappeler, sur deux exemples simples et classiques, que, même en s'en tenant au strict programme de la classe de Mathématiques, l'astronomie fournit aux élèves de bonnes occasions d'utiliser leurs connaissances générales.

1. Coordonnées et trigonométrie.

Le produit scalaire étant maintenant bien connu, la démonstration des formules fondamentales de la trigonométrie sphérique peut être considérée comme un exercice banal. Avec les notations habituelles, a, b, c , les mesures des côtés, A, B, C , la mesure des angles du triangle sphérique ABC , on a donc les trois formules du type :

$$(I) \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

L'exercice est complété par les trois formules :

(I') $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$
obtenues par dualité, et les formules :

$$(II) \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

obtenues par transformation de $\frac{1 - \cos^2 A}{\sin^2 a}$ en une expression symétrique en a, b, c

et la remarque : $\sin a$ et $\sin A$ sont positifs.

Ces formules n'ont pas bonne réputation ; les professeurs pensent qu'elles surchargent la mémoire des élèves sans grand profit. Je serais assez de cet avis s'il s'agissait de les inscrire aux programmes et d'en faire des sujets d'interrogation aux examens. Par contre, si l'on se contente d'établir les formules en exercice, pourquoi ne pas profiter des moyens qu'elles offrent à la solution de quelques problèmes astronomiques ou géographiques ? En voici quelques exemples.

1^{er} exemple : le triangle astronomique. J'emprunte cette dénomination au livre de Russell-Dugan-Stewart. Elle désigne le triangle ZPA (Z = zénith ; P = pôle boréal céleste ; A = astre considéré). En désignant, comme de coutume, φ = latitude de l'observateur, h = hauteur de l'astre, z = distance zénithale de l'astre, δ = déclinaison de l'astre, a = azimut de l'astre, H = angle horaire de l'astre.

$$(1) \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H.$$

$$(2) \sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos a.$$

$$(3) \frac{\sin H}{\cos h} = \frac{\sin a}{\cos \delta}.$$

Les astronomes utilisent les formules du groupe de Gauss telles que :

$$\cos \delta \cos H = \cos \varphi \cos z + \sin \varphi \sin z \cos a,$$

mais je me limite délibérément à l'emploi des formules annoncées précédemment. Les formules (1), (2) et (3) permettent en effet de résoudre des problèmes intéressants.

Supposons l'astre à son coucher (s'il se couche), $h = 0$. La formule (1) donne son angle horaire à cet instant, c'est-à-dire son arc semi-diurne $\frac{J}{2}$.

$$(4) \cos \frac{J}{2} = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$$

La formule (4) est évidemment applicable au cas du Soleil ; en écrivant

$$-1 \leq \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta \leq +1$$

pour une valeur donnée de δ , c'est-à-dire pour un jour déterminé, on exprime quelles sont les latitudes φ pour lesquelles, ce jour-là, le Soleil aura un lever et un coucher. Au contraire, pour une latitude déterminée, la formule (4) permet une étude, au cours de l'année, de la durée d'insolation.

La formule (2), l'astre étant encore à son coucher, permet de calculer son azimut :

$$(5) \cos a = - \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.$$

La formule (3) exigerait le calcul préalable de $\frac{J}{2}$.

$$(5') \sin a = \sin \frac{J}{2} \cos \delta.$$

La combinaison de ces deux formules pour $a \neq 90^\circ$ permet de calculer :

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{\cos(\varphi - \delta) \cos(\varphi + \delta)}}{\sin \delta}$$

A l'occasion de l'éclipse matinale du 15 février 1962, on avait apprécié l'intérêt de cette formule. Dans le cas du Soleil, elle met en évidence ce fait trop méconnu que le Soleil ne se couche à l'Ouest qu'à l'équinoxe.

Pour l'utilisateur expérimenté du gnomon à fente, la mesure, à un instant donné, de la hauteur et de l'azimut du Soleil, est facile. La formule (3) fournit alors l'heure solaire vraie H.

$$\sin H = \frac{\sin a \cos h}{\cos \delta}$$

2° exemple : le temps sidéral. Une utilisation plus classique de la formule (II) des sinus est relative à la détermination du point vernal à partir d'une observation méridienne du Soleil. Le triangle considéré est ici $\gamma SS'$, SS' étant un arc du cercle horaire de S, $\gamma S'$ un arc de l'équateur et γS un arc de l'écliptique

$$\frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin \alpha}{\sin S} \quad SS' = \delta.$$

Mais, dans le triangle-rectangle $\gamma SS'$, la formule (I') :

$$\cos \varepsilon = \sin S \cos \delta.$$

On peut donc obtenir la mesure directe de l'ascension droite α du Soleil à partir de la mesure de δ , c'est-à-dire par une mesure méridienne :

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \delta \cotg \varepsilon$$

(l'obliquité de l'écliptique ε étant mesurée directement par la déclinaison extrême du Soleil). Comme M. Danjon l'a fait remarquer depuis longtemps, cette détermination du point vernal conduit à la définition du temps sidéral et justifierait le remplacement de cette appellation classique par celle d'*angle tropique* qui traduit mieux sa définition.

2. Le freinage de la rotation de la Terre par les marées.

Voici un exemple tout différent des ressources que le cours de Mathématiques offre à l'étude des problèmes astronomiques. Un passage de *L'Astronomie populaire*

Flammarion qui surprend parfois le lecteur ; il s'agit d'expliquer les inégalités dans le mouvement de rotation de la Terre sur elle-même :

« En premier lieu, les marées océaniques et continentales causées par l'attraction de la Lune et du Soleil font sur la Terre l'effet d'un frein. La durée de sa révolution, que nous avons fixée approximativement à 86 164 secondes, augmente de 0,001 64 secondes par siècle. Changement minime, dira-t-on. Sans doute, mais ses effets cumulatifs croissent comme le carré du temps, si bien qu'on évalue à 3 heures le retard de la Terre dans sa rotation depuis l'époque d'Hipparque. »

D'où viennent ces trois heures ? Un calcul très simple fournit la réponse.

Deux remarques préliminaires : 1° L'unité de temps employée ici est la seconde de temps solaire moyen ; la définition de ce temps n'est pas indépendante de la rotation de la Terre ; pourtant, il n'y a pas de cercle vicieux et celui-ci paraîtrait encore mieux évité en considérant que la seconde utilisée est celle du temps des éphémérides (défini par les mouvements de la Lune et des planètes).

2° En première approximation, l'augmentation de la période de rotation de la Terre est considérée comme fonction linéaire du temps (comme proportionnelle au temps) ; cette approximation est certainement suffisante, en raison de la faible intensité du freinage.

Soit alors a le nombre de secondes dont s'accroît, à chaque tour, la période de révolution de la Terre depuis Hipparque (150 ans av. J.-C., soit depuis 21 siècles). La durée du second tour a été de 86 164 s + a , celle du troisième tour 86 164 s. + $2a$, etc...

S'il n'y avait pas freinage, le temps écoulé au bout de n révolutions de la Terre sur elle-même serait :

$$t = 86\,164\,n.$$

Du fait du freinage, le temps écoulé au bout de n rotations est

$$\begin{aligned} t + dt &= 86\,164\,n + a + 2a + 3a + \dots + (n-1)a \\ &= 86\,164\,n + a \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

Le retard de rotation de la Terre, du fait du freinage, est donc donné par la formule

$$dt = a \frac{n(n-1)}{2}$$

Puisqu'un siècle vaut 36 625 rotations de la Terre, la valeur de a en secondes est

$$a = \frac{0,001\,64}{36\,625}$$

Nous obtiendrons la valeur actuelle du retard en remplaçant dans la formule n par $21 \times 36\,625$. Le calcul donne : $dt = 13\,400$ secondes, soit plus de 3 h 43 mn.

Ce résultat appelle les remarques suivantes :

1° La formule trouvée montre bien que le retard croît comme le carré du temps, comme n^2 .

2° La formule trouvée permet de répondre à la question suivante : A quelle époque pourra-t-on considérer que le freinage dû aux marées a fait prendre à la rotation de la Terre un tour de retard depuis Hipparque ? Il suffit de faire $dt = 86\,164$ dans la formule. On trouve environ 44 siècles, soit aux environs de l'an 4 300.

3° On relira, avec intérêt, dans l'*Astronomie* de Lalande (§ 951, édition de 1771) : « Les forces de la Lune et du Soleil sur le sphéroïde aplati ; le vent général qui règne sans cesse d'orient en occident sur la surface de la Terre, qui fait 20 ou 30 pieds par seconde, et qui fait traverser en 70 jours l'espace de plus de 2 000 lieues

qui se trouve entre Acapulco et les Philippines ; le mouvement général de la mer d'occident en orient qui a été remarqué par divers observateurs ; tout cela peut affecter à la longue le mouvement de rotation de la Terre, et par conséquent changer un peu la durée des jours, que nous supposons uniforme. »

3. Avant Vernier.

Depuis la Sixième (ou la Cinquième), nos élèves connaissent le vernier et son usage. Aux élèves de Seconde, le rappel des principes du vernier peut n'être pas inutile. Il me semble que ce rappel serait moins fastidieux par le biais d'un instructif historique.

Les quadrants de Tycho-Brahé utilisaient soit le système du nonius, soit celui des transversales. On trouve des renseignements sur ces questions dans le livre *Lunettes et Télescopes* par A. Danjon et A. Couder. Je les résume.

Le système imaginé par le Portugais Nunes (1492-1577) était fort compliqué : le quadrant comportait 44 quarts de cercles concentriques ; l'arc extérieur était divisé en 90 parties égales, le second en 89 parties, le suivant en 88 parties, etc... et le dernier en 46 parties. Les origines des 44 graduations se trouvaient sur le côté vertical du quadrant. Si le trait le plus voisin de l'alidade de visée était la graduation 27 de la division en 59 parties, la distance zénithale mesurée était $27/59$ de quadrant.

Cette manière d'exprimer un angle était conforme à l'usage du temps. Danjon-Couder citent en exemple la valeur de π adoptée par Adrien Metius 355/113 et l'indice de réfraction de l'eau, selon Descartes, 250/187. Mais l'usage des fractions décimales devait supplanter sans peine ces habitudes. Tycho devait reconnaître un autre inconvénient pratique du nonius : à chaque lecture, il fallait comparer les distances de 44 traits au bord de l'alidade. Opération longue et peu profitable : la précision était variable, la répartition des 3 015 traits compris entre le côté vertical et le côté horizontal étant non uniforme. (Le calcul présenté à ce sujet dans l'ouvrage cité me paraît inexact : il donne un intervalle moyen de 1,8 minute d'angle entre deux traits ; la valeur réelle est certainement supérieure, le nombre des traits en coïncidence étant important. Je n'ai pas eu la patience de résoudre ce petit problème d'arithmétique, combien existe-t-il de rationnels x/y tels que $0 < x < 90$ et $46 \leq y \leq 90$?).

Tycho-Brahé eut donc rapidement recours à un procédé plus pratique, celui des *transversales* : deux graduations concentriques ont des rayons qui diffèrent de quelques centimètres (pour un rayon de l'ordre du mètre). Elles sont divisées de la même manière, de dix minutes en dix minutes. Chaque point de la division exté-

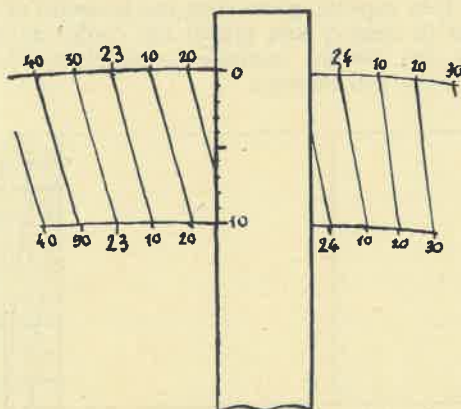


Fig. 1. — Transversales

rière est joint par un segment de droite au point suivant de la division intérieure. L'alidade porte une division auxiliaire (dix intervalles égaux du cercle extérieur au cercle intérieur). Sur la figure, l'alidade indique un angle compris entre $23^{\circ}20'$ et $23^{\circ}30'$; sur l'alidade, on lit la division 7,5 : soit l'angle mesuré $23^{\circ}27',5$.

Le tracé des transversales comportait des variantes : Tycho, au lieu de traits, plaçait dix points alignés (la division auxiliaire de l'alidade fut un perfectionnement). Dans tous les cas, le tracé était compliqué et demandait un long et minutieux travail au graveur.

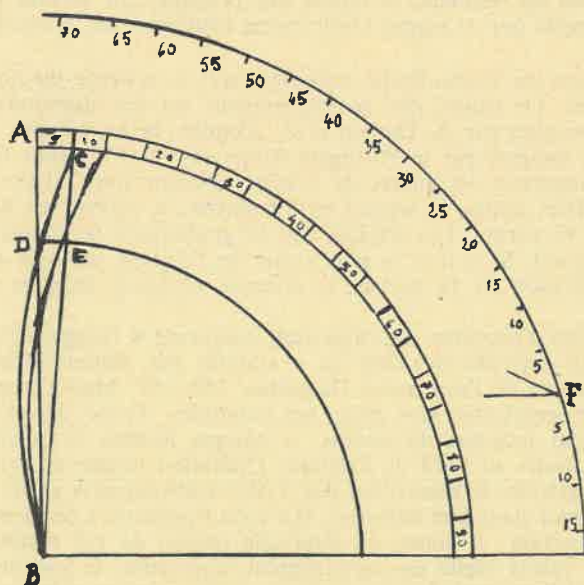


FIG. 2. — Construction de La Hire

Il faut surtout remarquer que, pour être correct, le tracé des transversales devrait être curviligne. Nos élèves de Seconde peuvent démontrer que ce sont les complémentaires des arcs capables d'un angle de dix minutes passant par le point n de la division extérieure et $n + 1$ de la division intérieure. Le prolongement de l'arc utile, c'est-à-dire l'arc capable, passe donc par le centre des deux grands cercles gradués : si les rayons de ceux-ci sont grands (de l'ordre du mètre) par rapport à leur différence (3 à 4 cm), l'erreur commise en remplaçant les arcs de cercle par les segments de droites est peu sensible.

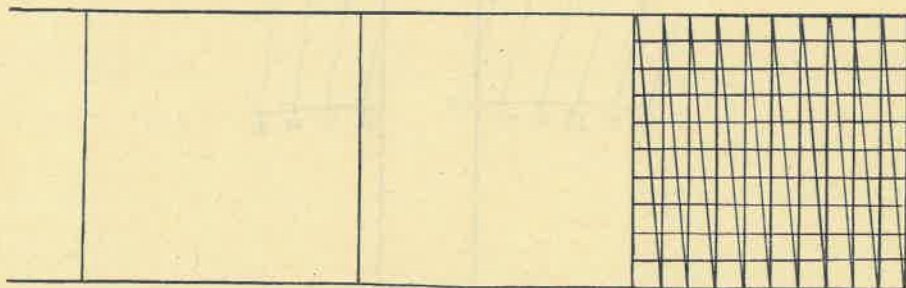


FIG. 3. — Division d'une règle en centièmes

Jean Ferrier, qui fut en relation avec Descartes, introduisit les transversales curvilignes. Ce Ferrier n'était pas mathématicien, mais, selon A. Baillet, le biographe de Descartes, ce n'était pas « *un simple artisan qui ne sût remuer que la main. Il possédait encore la théorie de sa profession, et savait l'optique et la mécanique aussi sûrement qu'un professeur du Collège Royal. Il n'était pas tout à fait ignorant dans le reste des Mathématiques ; et, nonobstant sa condition, il était reçu parmi les savants, comme s'il eût été de leur nombre* » (cité par A. Daumas dans *Les instruments scientifiques aux XVII^e et XVIII^e siècles*, p. 98). L'idée de Descartes était de faire construire à Ferrier une lunette à verres hyperboliques ; l'opération ne put être menée à bien pour des raisons techniques (*).

Au XVIII^e siècle, la méthode des transversales fut encore utilisée, avec le tracé correct décrit par La Hire. J'emprunte la figure à l'ouvrage cité de Daumas : le cercle extérieur porte l'ensemble des centres F des arcs des transversales à tracer. En réalité, pour obtenir les transversales de 10 en 10 minutes, le cercle des centres F devait être lui-même divisé de 10 en 10 minutes.

Un dernier mot sur les transversales rectilignes. Elles sont évidemment correctes sur une règle graduée. Cela peut suggérer un travail pratique de dessin à nos élèves de Sixième (fig. 3).

G. W.

(*) Dans une lettre datée du 18 juin 1629, Descartes invitait Ferrier à le rejoindre pour travailler sous sa direction : « ...Vous auriez tout loisir de vous exercer, personne ne vous divertirait, vous seriez éloigné des objets qui vous peuvent donner de l'inquiétude ; bref vous ne seriez en rien plus mal que moi, et nous vivrions comme frères... » Après lui avoir conseillé d'emporter quelques bagages : « Mais si vous êtes en doute de venir, venez plutôt tout nu que d'y manquer. » Citations sans rapport avec notre sujet, mais bon exemple, en passant, du juste intérêt porté par un grand savant à l'habile technicien dont l'ouvrage est indispensable à la science.

UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES INVERSIONS ET SYMÉTRIES

Soit P le plan de la géométrie inverse (c'est-à-dire muni d'un unique point à l'infini). Il est souvent dit qu'une transformation ponctuelle T de P , telle que deux points quelconques et leurs transformés soient cocycliques, est nécessairement une inversion ou une symétrie (par rapport à une droite). Au cours d'une leçon d'Agrégation faite à l'E.N.S. de Sèvres, Mlle Anne Fribourg a fait remarquer que cet énoncé n'est pas vrai sans autres hypothèses. Dans la discussion qui a suivi cette leçon, nous sommes parvenus à un énoncé correct, mais dont la démonstration utilise un peu de Topologie générale. Disons tout de suite que les difficultés viennent des points fixes de la transformation T . L'énoncé est le suivant :

THEOREME. — *Soit T une transformation ponctuelle biunivoque et continue de P , telle que deux points quelconques et leurs transformés par T soient cocycliques. On suppose qu'il existe deux points a, b , non fixes par T , tels que les droites $aT(a)$ et $bT(b)$ soient distinctes. Alors T est une inversion ou une symétrie par rapport à une droite.*

Soit O le point de rencontre (à distance finie ou à l'infini) des droites $aT(a)$ et $bT(b)$. Soit I l'inversion de pôle O et de puissance $\overline{Oa} \cdot \overline{OT(a)}$ (ou la symétrie par rapport à la médiatrice commune de $aT(a)$ et $bT(b)$ si O est à l'infini). Si m est un point non-fixe de T et distinct de a et b , $T(m)$ est le second point d'intersection des cercles $maT(a)$ et $mbT(b)$ (d'après la propriété de cocyclicité). On a donc $T(m) = I(m)$ pour tout point *non-fixe* m , même confondu avec a ou b .

Soient D l'ensemble des points fixes de T , et A l'ensemble des points m de P tels que $T(m) = I(m)$. Comme T et I sont des transformations continues, D et A sont des parties *fermées* de P . On vient de voir que $D \cup A = P$. Quant à $D \cap A$, c'est l'ensemble C des points fixes de I , c'est-à-dire la partie vide (si I est une inversion de puissance négative), une circonférence (si I est une inversion de puissance positive), ou une droite (si I est une symétrie).

Si $D \cap A$ est vide, le fait que P est connexe, que A et D sont fermés et que $D \cup A = P$ implique que l'un des deux ensembles A, D est vide et que l'autre est égal à P ; comme A contient a et b , on a $A = P$, de sorte que $T(m) = I(m)$ pour tout point m de P et que $P = I$.

Si $D \cap A$ est une circonférence ou une droite, elle partage le plan P en deux régions ouvertes P' et P'' , qui sont connexes et échangées par I . Les parties $P' \cap A$ et $P' \cap D$ sont disjointes et fermées relativement à P' ; comme P' est connexe, l'une est vide et l'autre est égale à P' . De $P' \cap D = P'$ on déduirait que a est un point de P'' (puisque a n'est pas un point fixe de T), d'où $T(a) = I(a) \in P'$ et $T(T(a)) = T(a)$ (puisque $P' \cap D = P'$ implique $P' \subset D$); ceci contredit la biunivocité de T . On a donc $P' \cap A = P'$, et de même $P'' \cap A = P''$. Ainsi A contient P', P'' et aussi la courbe $D \cap A$, de sorte que $A = P$. On a donc bien encore $T(m) = I(m)$ pour tout point m de P , et donc $T = I$. CQFD.

Deux contre-exemples.

1) Soient I une inversion, a et b deux points distincts homologues par I . On définit la transformation T par : $T(a) = a, T(b) = b, T(m) = I(m)$ pour m distinct de a et b . Les propriétés de cocyclicité et de biunivocité sont vraies. Mais T n'est pas continue. Cet exemple est dû à Mlle A. Fribourg.

2) Soient I une inversion de puissance positive, et P' l'intérieur de son cercle d'inversion. On définit T par : $T(m) = m$ pour $m \in P', T(m) = I(m)$ pour $m \notin P'$. Les propriétés de cocyclicité et de continuité sont vraies pour T . Mais T n'est pas biunivoque.

P. SAMUEL (professeur à l'E.N.S. de Jeunes Filles).

L'APPLICATION DES NOUVEAUX PROGRAMMES EN SECONDE A' C M M'

N.D.L.R. — *Au moment de publier la note suivante de M. Tournadre, professeur à l'Ecole Normale d'Angers, nous devons donner quelques explications.*

Nous excuser d'abord de n'avoir pu publier ce rapport plus tôt. Son auteur nous écrit que l'expérience acquise lui ferait maintenant réviser certains jugements. Il nous paraît cependant utile de passer outre à ces scrupules. Nous savons tous qu'aucun jugement, en matière pédagogique, n'est définitif. Ce qui est hors de doute, c'est l'intérêt de l'enquête menée par notre Collègue et la Régionale du Maine-et-Loire, qui a pris le beau nom d'Amicale, a eu raison d'en discuter. La Rédaction remercie l'auteur et l'Amicale de leur fructueuse coopération.

1960-61 étant l'année scolaire où les nouveaux programmes sont entrés en vigueur, l'enquête a porté sur les deux points suivants :

1) Opinions sur le contenu du programme, indépendamment de toute question d'horaire.

2) Bilan de la réalisation de ce programme en 1960-61, dans les conditions d'horaire que l'on sait.

Cette enquête a été étudiée et discutée par l'Amicale de Maine-et-Loire en juin 1961.

I

Je signale que, sur le premier point, l'enquête a présenté quelques difficultés. En effet, on ne peut se faire une opinion complète sur le nouveau programme qu'en se référant au but final que se proposent les trois classes du 2^e cycle prises dans leur ensemble. Or, le programme complet du 2^e cycle n'est pas encore connu. En particulier, il était impossible de porter un jugement sur l'ampleur du programme, car cela revenait à donner son avis sur la façon dont la classe de Seconde prenait sa part du programme complet du 2^e cycle. Sur ce point particulier donc, nous avons admis sans démonstration que l'étalement rationnel des connaissances entre les classes de Seconde, de Première et les Classes Terminales était un problème résolu en haut lieu et que, par conséquent, le volume du nouveau programme était à la fois nécessaire et suffisant. En conséquence, dans cette première partie, nous ne rapportons sur le programme de Seconde que des opinions sommaires et provisoires portant exclusivement sur la nature de son contenu.

I. Tous les collègues approuvent sans restriction la présence explicite au programme de la pratique du calcul numérique. Les raisons de leur approbation sont trop évidentes pour qu'il soit utile de les rappeler ici.

II. Présence au programme de notions de géométrie dans l'espace et suppression de certains chapitres de géométrie plane.

Le programme de Seconde à première lecture semblait indiquer qu'on allait inaugurer la méthode des mélanges, c'est-à-dire la conduite de front de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace, réservant à la classe de Seconde l'acquisition des généralités et des têtes de chapitre, et en laissant le soin aux classes suivantes d'apporter des compléments et d'aborder des questions plus complexes (faisceaux harmoniques, polaire d'un point par rapport à deux droites, ensemble des points tels

que : $\frac{MA}{MB} = k$, $MA^2 \pm MB^2 = k$, etc...). La parution récente du programme de

Première a confirmé cette hypothèse.

En majorité, les collègues approuvent cette conception.

1) Les élèves n'ont pas été gênés par la géométrie dans l'espace. Certains collègues ont même constaté que le caractère de nouveauté de cette partie du programme a provoqué de la part des élèves un certain intérêt pour la géométrie qu'on ne constatait pas avec l'ancien programme, où la reprise pendant les premiers mois de l'année scolaire des notions vues dans les classes antérieures donnait une impression de « déjà vu » qui émoussait l'intérêt pour les Mathématiques de Seconde. (Mais cette opinion n'est pas unanime).

2) Par ailleurs, l'introduction de géométrie dans l'espace a permis à un certain nombre de collègues de procéder à des regroupements logiques et évidents à propos de sujets que l'ancienne conception coupait un peu arbitrairement en deux (parallélisme, transformations ponctuelles, théorème de Thalès). Ainsi, sur l'ensemble des deux anciens programmes de Première, de Seconde, on peut réaliser à la fois une économie de temps et exposer certaines questions plus rationnellement.

3) Le renvoi en Classe de Première des questions de géométrie plane qui figuraient à l'ancien programme de Seconde a paru judicieux.

En effet, certaines de ces questions ont de l'importance pour la Classe de Mathématiques Élémentaires où elles sont certainement utilisées, et où elles se relient directement à certains chapitres de cette classe. Il est peut-être préférable de les traiter pendant l'année qui précède immédiatement la Classe de Mathématiques Élémentaires. Elles risqueront d'autant moins d'être oubliées qu'elles seront soumises directement à la sanction de l'examen.

Quelques collègues ont marqué néanmoins une certaine réticence sur cette conception.

Ils pensent qu'il y a un risque certain d'aborder trop de nouveautés avant de mettre au point définitivement des chapitres des classes antérieures dont les élèves n'ont pour la plupart qu'une notion incomplète et incorrecte. Le caractère de nouveauté que présente la géométrie dans l'espace risque d'accaparer l'intérêt des élèves aux dépens de ce travail de mise au point des connaissances antérieures.

Mais, à ce sujet, on peut penser qu'il serait possible de mener à bien les deux tâches (introduction de notions nouvelles, mise au point des connaissances antérieures), à condition d'y consacrer suffisamment de temps. Ce n'est pas alors la conception du programme qui est en cause, mais l'horaire.

III. De la présence au programme des rubriques qui appartiennent aux programmes des classes antérieures et instructions portant sur ce point.

Le programme parle de « rappel » et de « mise en ordre », recommandant de « ne pas s'attarder trop longuement sur les prémices », et suggère pour certains chapitres de se limiter à « l'élaboration d'un répertoire de définitions et de propriétés », sans trop se soucier, semble-t-il, de leur ordre logique.

Dans leur ensemble, les collègues approuvent la reprise en Seconde de ces chapitres et l'esprit dans lequel les Instructions Officielles recommandent de les traiter.

1) Les élèves n'en ont le plus souvent qu'une notion incorrecte et incomplète, car ces notions n'ont pu être abordées dans les classes antérieures, à cause de l'âge des élèves, avec toute la rigueur désirable.

2) Il serait par ailleurs fastidieux pour le professeur et les élèves de tout reprendre d'une façon complète en démontrant tout. Pour certains chapitres, la conception « répertoire » s'impose.

Quelques-uns apportent toutefois une restriction importante.

A leur avis, il serait dangereux de vouloir être trop sommaire sous prétexte d'éviter de s'attarder plus qu'il ne faut.

1° C'est à propos de ces révisions qu'on peut montrer aux élèves comment s'organise logiquement l'édifice mathématique (occasion qui risque de ne plus se représenter).

2° Les questions de cette partie du programme, du fait qu'elles sont élémen-

taires et qu'elles ont déjà été abordées, peuvent être utilisées comme *points d'appui* pour initier les élèves à certaines questions délicates de logique mathématique (condition nécessaire, condition suffisante, implication, équivalence, ensemble de points).

3° L'étude complète et rigoureuse de certaines d'entre elles peut constituer un excellent modèle de raisonnement, notamment pour les problèmes dont la résolution nécessite une démarche délicate et essentielle (problèmes spéculatifs).

Ainsi, certains collègues pensent que c'est dans le domaine des questions déjà étudiées dans les classes antérieures que les occasions d'initier les élèves à un mode de pensée vraiment logique et rigoureux sont les plus nombreuses, les plus simples et les mieux utilisables, et que ce serait une faute de ne pas les revoir ou de passer trop vite.

En résumé, la conception qui a été ou qui sera suivie est la suivante :

1) Passer aussi vite que le permettent les élèves sur tout ce qui est purement du domaine des connaissances et qui ne présente pas un intérêt éducatif évident. Sur ces questions, se limiter à l'établissement d'un répertoire, en se souciant malgré tout d'y présenter les définitions et les théorèmes suivant un ordre logique.

2) S'attarder sur les questions qui présentent un intérêt éducatif et les utiliser pour initier les élèves à une plus grande rigueur de raisonnement et de méthode.

IV. Introduction des Mathématiques Modernes.

Rien ne figure au programme à ce sujet et les Instructions Officielles sont extrêmement sybillines.

Je n'ai pas recueilli beaucoup d'opinions sur ce point et, personnellement, il m'est difficile de prendre parti, ma science dans ce domaine étant trop neuve et trop incomplète.

Je pense néanmoins que, dans cette introduction des Mathématiques Modernes, il y a lieu de distinguer deux stades :

1° L'utilisation de certains symboles et vocables nouveaux, ce qui ne touche que l'expression, et qui n'est à mon sens qu'une réforme de surface.

2° Le fait de dégager certaines structures, de les étudier, d'apprendre aux élèves à les reconnaître et à les utiliser, ce qui constitue une véritable réforme.

Il m'a semblé que la plupart des collègues ont cherché à atteindre le premier stade, c'est-à-dire à introduire le nouveau symbolisme et le nouveau langage, à la satisfaction générale d'ailleurs. Les élèves y mordent à cause du pittoresque bien entendu, mais il semble aussi que l'usage de certains signes (implication réciproque $\Leftrightarrow$) les ait aidés dans une certaine mesure à mieux exprimer et à conduire plus rigoureusement leur raisonnement.

Mais il ne m'a pas semblé que les collègues se soient risqués à aller beaucoup plus loin, c'est-à-dire à aborder le deuxième stade.

— Soit que leurs connaissances dans le domaine des Mathématiques Modernes ne soient pas encore suffisamment assimilées pour faire un choix judicieux et pour résoudre les problèmes d'adaptation au niveau de la classe ;

— Soit par crainte d'aller trop loin ou pas assez ;

— Soit que l'opportunité et l'intérêt des Mathématiques Modernes en Seconde ne leur apparaissent pas évidents, de crainte peut-être que les problèmes soulevés ne trouvent pas l'occasion de s'appliquer par la suite. Pour en décider, il eût fallu évidemment savoir si l'utilisation des Mathématiques Modernes était prévue dans les classes ultérieures.

En conclusion de cette première partie, nous dégagerons deux points importants :

1° Le contenu du programme est approuvé, mais son application a été gênée en certains points par l'ignorance où nous étions des programmes de Première et de Mathématiques Élémentaires.

Si ces programmes avaient été connus dès septembre 1960, nous aurions pu en particulier délimiter avec précisions le développement de certaines questions suivant qu'elles auraient été ou non reprises dans les classes suivantes, connaître l'importance qu'il convenait d'assigner aux notions modernes, savoir s'il fallait donner le pas à l'algèbre sur la géométrie ou l'inverse, en un mot connaître non seulement le rôle précis de la Classe de Seconde dans le 2^e cycle, mais aussi la nouvelle orientation de l'enseignement des Mathématiques.

2° Nous pensons que l'ampleur et les nouveautés du nouveau programme ne doivent pas faire oublier que la Classe de Seconde doit garder son rôle traditionnel de classe de mise au point des connaissances et d'initiation aux méthodes vraiment rigoureuses de raisonnement et d'exposition.

II

BILAN DE L'EXPERIENCE EN COURS

Tous les collègues sans exception ont proclamé très haut qu'il était impossible de traiter ce programme à raison de 4 heures par semaine.

Ceux qui ont voulu aborder tous les chapitres ont dû sacrifier plus ou moins le côté éducatif de leur enseignement et le contrôle du travail des élèves, passer vite sur des points qui auraient mérité qu'on s'y attardât, en un mot imprimer à leur enseignement un rythme beaucoup plus rapide pour qu'il soit, de leur propre aveu, efficace.

Ceux qui, par contre, n'ont rien voulu sacrifier de leurs habitudes pédagogiques, et ce sont les plus nombreux, n'ont pu terminer et ont été obligés de faire un choix dans les questions à traiter. Les inconvénients de cette dernière conception auraient été fort atténués si le programme de Première avait été publié en même temps, car nous aurions probablement laissé de côté les questions reprises en Première. Mais, dans l'ignorance de ce programme, les chapitres sacrifiés risquent d'être d'une telle variété que les élèves commenceront leur Première avec un ensemble de lacunes qui seront longues à combler.

En résumé, l'année scolaire en Seconde nous a laissé une désagréable impression d'avoir marché plus ou moins à tâtons, accompagnée de l'obsession non moins désagréable et fatigante de ne pouvoir terminer.

Le vœu émis unanimement est de disposer d'au moins 5 heures par semaine avec une heure au moins de travaux dirigés.

R. TOURNADRE (*E.N., Angers*).

L'ETUDE DES ARCS EN SIXIEME

L'étude des arcs en Sixième est importante. Elle n'est pas simple, parce que l'arc possède trois « dimensions » : son rayon, sa mesure (en degrés, par exemple) et sa longueur.

Nous serons mieux placés pour parler des arcs si nous disons d'abord quelques mots des angles.

Mesure des angles et rapporteur.

La mesure des arcs et la mesure des angles sont en étroite dépendance. Il suffit, pour s'en convaincre, de regarder un rapporteur, lequel sert, en premier lieu, à la mesure des angles, et qui n'est rien d'autre, cependant, qu'un arc gradué.

C'est cette graduation que les débutants voient, en priorité ; il importe d'éviter qu'ils ne voient qu'elle.

On aura soin, pour cela, lorsqu'on en sera à la mesure des angles, de tracer effectivement, à l'aide du rapporteur, bien entendu, les petits *angles* de 1 degré dont la somme est égale à l'angle à mesurer (un angle pas trop grand, 17° par exemple, parce que la figure est longue à faire et surchargée au centre).

Il est nécessaire que l'élève ait le souvenir visuel d'angles, sommes de petits angles de 1°, de manière à le bien convaincre que le rapporteur est essentiellement une somme d'*angles* égaux ; le fait que ces angles ne sont, sur son instrument, que des angles de 10° (et non de 1°), devra être à la fois souligné et expliqué par l'impossibilité matérielle de tracer tous les rayons de degré en degré ; l'élève devra être incité (et aidé) à imaginer les côtés non tracés, de manière à restituer au rapporteur sa qualité de *goniomètre*.

La mesure des arcs.

De même que la mesure des segments, de même que la mesure des angles, la mesure des arcs débute par l'étude des opérations fondamentales sur les arcs d'un même cercle :

- somme de deux ou plusieurs arcs ;
- comparaison et différence de deux arcs ;
- multiples et sous-multiples d'un arc.

Du point de vue concret, cette étude se réalise essentiellement au moyen du cercle-calque piqué en son centre et glissant sur le cercle donné ; ce cercle-calque joue le même rôle que la bande de papier pour les segments de droite.

Les unités d'arc.

Demandons-nous d'abord ce que sont les unités *légal*es d'arc.

Nous constaterons qu'il n'y en a pas.

Toutes les unités de mesure : géométriques, de masse, de temps, mécaniques, électriques, calorifiques, optiques font l'objet de la loi du 14 janvier 1948 modifiant la loi du 2 avril 1919 (voir l'Annuaire du Bureau des Longitudes) *.

Dans le paragraphe I, *unités géométriques*, on trouve les titres suivants :

- A) Longueurs.
- B) Superficies.
- C) Volumes.
- D) Angles.

Rien sur les arcs.

(*) Depuis la rédaction de cet article, notre Collègue Brachet a préparé une note sur le nouveau Système International (décret du 3 mai 1961) qui sera publié dans le Bulletin 223 (N.D.L.R.).

Corrélativement, l'AFNOR (Association française de Normalisation), dans sa Norme FD-X n° 02-002, intitulée « Unités de mesure. Définitions », définit les unités d' « angle plan », d' « angle solide », mais elle est muette sur les unités d'arc.

Le quadrant, l'arc de 1° , l'arc de 1 grade n'ont aucune existence légale.

Il en résulte clairement, juridiquement, en quelque sorte, que les unités d'arc découlent des unités d'angle, qu'elles en sont des corollaires, des annexes, des prolongements.

Nous sommes ainsi amenés à énoncer la définition générale :

Les unités d'arc, sur un cercle donné, sont les arcs interceptés par les unités d'angle, placées au centre.

Nous ne pouvons donc pas ne pas faire jouer un rôle fondamental à l'angle au centre.

Angle au centre et arc intercepté.

Nos jeunes élèves les manieront aisément, en utilisant, à nouveau, le cercle-calque piqué en son centre. Ils découvriront ainsi, sans la moindre difficulté, que, ayant tracé un cercle :

I. *Si on construit deux angles au centre égaux, les deux arcs interceptés sont égaux.*

II. *Si on construit sur le cercle deux arcs égaux, et si on trace leurs angles au centre, ces deux angles au centre sont égaux.*

Dans I, les angles au centre égaux seront construits au moyen d'un calque piqué en O.

Dans II, les arcs égaux seront construits au moyen du cercle-calque piqué en O. Pour bien préciser, chaque fois, ce dont on parle, on devra toujours éviter d'appeler AOB l'angle au centre correspondant à l'arc AB ; on aura soin de prolonger OA et OB au-delà de A et B, d'appeler Ox et Oy les demi-droites ainsi tracées, et de dénommer xOy l'angle au centre correspondant à l'arc AB.

Ce long discours pour un mince détail a l'air enfantin ; en fait, les gens de métier savent bien que ce sont des petites équivoques de ce genre qui embrouillent les idées importantes ; elles sont d'autant plus dangereuses qu'on s'en méfie moins.

Revenons à la mesure des arcs.

Nous ne nous contenterons évidemment pas de la définition générale énoncée plus haut ; nous répéterons les définitions habituelles du quadrant (quart de cercle), du degré-arc ($1/90^\circ$ de l'arc-quadrant), etc... Mais, cette fois, cette répétition, cette réapparition des mêmes mots (degré, minute, seconde), des mêmes sous-multiples (de 60 en 60), ne fera pas figure d'heureux hasard, de truquage, de combine ; elle apparaîtra sous son jour exact : un enchaînement, une déduction, une conséquence.

Et il en sera de même pour cette propriété si simple, si commode, si importante, vers laquelle nous tendons depuis le début et qui est le couronnement de cette recherche :

Un angle au centre et l'arc intercepté sont mesurés par le même nombre, en unités correspondantes :

1° *degré-angle et degré-arc (et sous-multiples) ;*

2° *grade-angle et grade-arc (et sous-multiples).*

On aura soin, toutefois, d'arriver à cet énoncé par un chemin concret, en dessinant, au moins une fois, non seulement l'angle au centre et l'arc intercepté, mais aussi tous les petits angles au centre de 1° , interceptant des petits arcs de 1° .

Et alors, tous les élèves comprendront que le rapporteur, bien qu'il ne soit en apparence qu'un arc gradué, est, réellement et essentiellement, un *goniomètre*, destiné à mesurer les angles, et qu'il permet, *en outre*, de mesurer un arc de rayon quelconque en mesurant son angle au centre.

Périmètre du cercle. — Nombre π .

Là, nous ne suivons pas l'ordre indiqué par le programme ; nous nous en excusons et nous nous expliquons.

Pourquoi préférons-nous traiter « périmètre du cercle » avant « longueur d'un arc » ?

D'abord, parce qu'un cercle n'a que deux « dimensions », son rayon et sa longueur, tandis que l'arc en a trois. Il vaut mieux aller du simple (le cercle) au compliqué (l'arc), plutôt que de commencer par le compliqué (l'arc) en vue d'obtenir le simple (le cercle) comme cas particulier du compliqué (l'arc).

Mais, surtout, parce que nous sommes tous, petits et grands, beaucoup plus curieux de savoir calculer le périmètre d'un cercle que la longueur d'un arc, pour la bonne raison qu'en pratique, dans la vie courante, on a souvent besoin de calculer le périmètre d'un cercle de rayon donné, tandis qu'on n'a à peu près jamais besoin de la longueur d'un arc.

Cela dit, nous serons très brefs sur l'étude expérimentale de la proportionnalité du périmètre d'un cercle et de son rayon. Les deux sortes de cercles matériels se prêtant le mieux à la recherche sont, à notre avis, le cercle tracé sur une feuille de papier et l'un des deux bords d'une boîte de conserve cylindrique. On mesure le périmètre du premier au moyen d'un curvimètre et celui du second au moyen d'une bande de papier enroulée sur la boîte cylindrique ; une bande de papier calque permet de tracer par transparence le trait final juste au-dessus du trait initial tracé près de l'extrémité de la bande par laquelle on a commencé à l'enrouler.

Deux problèmes au sujet des arcs.

On trace aisément un arc connaissant son rayon R et sa mesure n ; sa longueur l en résulte ; il est naturel de se poser les deux questions suivantes :

1° Si R ne change pas, tandis que n est, par exemple, multiplié par 2, par 3..., qu'arrive-t-il à l ?

2° Si n ne change pas, tandis que R est, par exemple, multiplié par 2, par 3..., qu'arrive-t-il à l ?

Seule, la première de ces deux directions de recherche est indiquée dans le programme ; c'est cependant la seconde qui conduit au périmètre du cercle, à titre de cas particulier.

Voici un plan sommaire pour chacune de ces deux recherches.

Recherche I. — « Comparaison expérimentale des nombres mesurant un arc (en degrés, par exemple) et de la longueur de cet arc (en centimètres, par exemple). »
C'est le texte du programme ; il sous-entend : *sur un cercle de rayon donné.*

Traçons un cercle ; marquons un arc AB (nous prions notre lecteur de faire la figure) ; au moyen du cercle-calque piqué en O , construisons un arc CD double de l'arc AB : arc $CD = 2$ arc AB .

De cette construction, il résulte manifestement que :

$$\text{longueur arc } CD = 2 \text{ longueur arc } AB.$$

Traçons maintenant les demi-droites $Ox, Oy, \dots$ qui vont du centre aux points de division $A, B, \dots$; les angles au centre xOy, uOz, zOv sont égaux comme interceptant des arcs égaux ; donc : angle $uOv = 2$ angle xOy et, par suite, mesure angle $uOv = 2$ mesure angle xOy .

Enfin, tout angle au centre et l'arc intercepté sont mesurés par le même nombre, en degrés par exemple ; donc : mesure arc $CD = 2$ mesure arc AB .

Construisons maintenant, au moyen du cercle-calque, un arc EF triple de l'arc AB ; il est clair que longueur arc $EF = 3$ longueur arc AB , et la même suite d'opérations que plus haut nous montre que mesure arc $EF = 3$ mesure arc AB .

Et ainsi de suite. — Concluons :

Sur un même cercle, la longueur d'un arc est proportionnelle à sa mesure en degrés.

L'importance de cette conclusion mérite qu'elle soit confirmée par une *vérification expérimentale*, laquelle peut se faire de deux façons :

- 1° sur un cercle dessiné, au moyen du rapporteur et du curvimètre ;
- 2° au moyen du rapporteur et de la bande de papier, sur un cercle découpé dans du papier fort à la dimension exacte du fond d'une boîte cylindrique et collé au fond de cette boîte, la bande de papier étant enroulée sur la boîte, en affleurant le cercle et ses arcs.

Recherche II. — *Sur des cercles concentriques, un angle au centre intercepte plusieurs arcs, qui ont ainsi la même mesure, n , en degrés. Examiner si les longueurs de ces arcs ne seraient pas proportionnelles à leurs rayons.*

Mêmes méthodes que pour le cercle entier :

- 1° On opère sur un dessin, au moyen du décimètre et du curvimètre.
- 2° Si on préfère la bande de papier au curvimètre, on peut utiliser plusieurs boîtes cylindriques de rayons différents ; on découpe des cercles respectivement égaux aux fonds de ces boîtes ; sur chacun, on limite un arc de n degrés au moyen d'un angle au centre de n degrés ; on colle chaque cercle sur le fond de la boîte correspondante, etc...

Comme pour le cercle entier, on dresse un tableau des valeurs de R , l , $\frac{l}{R}$.

On voit apparaître l'énoncé :

Si plusieurs arcs de rayons différents ont la même mesure (en degrés, par exemple), leurs longueurs sont proportionnelles à leurs rayons.

Ainsi qu'on pouvait le prévoir, l'étude de la longueur d'un arc est moins simple que pour le cercle. Si on attendait d'en avoir fini avec la mesure et la longueur d'un arc pour aborder le périmètre du cercle, l'intérêt serait bien émoussé et, au total, le chemin parcouru beaucoup trop long, eu égard à la simplicité du résultat.

**

Nous ne nous sommes pas, à vrai dire, écarté du programme ; nous l'avons explicité, étoffé ; nous avons réalisé ses intentions, d'ailleurs excellentes (voir nos *Réflexions sur le nouveau programme de Sixième*, B.A.P.M. de mars 1958).

Ainsi que le recommandent les Instructions, nous nous sommes efforcés d'apprendre aux élèves « à regarder et à réfléchir », en dégageant « de l'observation et de l'expérience quelques notions claires et quelques définitions précises ».

François BRACHET.

WESMAËL - CHARLIER

30 rue de Gramont Paris 2^e
Tél, Ric. 54-45 et Ric. 80-80

Vient de paraître :

A. HUISMAN

Professeur agrégé
au Lycée Montaigne

J. ITARD

Professeur agrégé
au Lycée Henri-IV

Cours de Mathématiques

Classe de Sixième - (cycle d'observation)

prix : 6,90 NF

Sous Presse :

Cours de Mathématiques, classe de 5^e
par HUISMAN et ITARD

Collection à suivre

Spécimen sur demande

PRIX DE MATHÉMATIQUES ANDRÉ VERA

A. HUISMAN

Professeur au Lycée Montaigne

LE FIL D'ARIANE

ou

VARIATIONS SUR DEUX THÈMES

La fonction linéaire — La fonction exponentielle

Deuxième édition

Vol. relié de 226 pp., format 23 × 15 cm, 7 ill. hors-texte, 115 figures

prix : 19,50 NF

BORDAS

27^{bis}, rue du Moulin-Vert, Paris-14^e

COLLECTION COSSART ET THERON

PRÉPARATION AUX MATHÉMATIQUES NOUVELLES

MATHÉMATIQUES 6^e

L. KRUGER

Professeur au Lycée Chaptal

344 pages. Relié 8,80 NF



MATHÉMATIQUES 5^e

M. COUTURIER

Agrégée de l'Université

448 pages. Relié 9,80 NF



MATHÉMATIQUES 4^e

P. THERON

Inspecteur général
de l'Instruction publique

M. COUTURIER

E. GALMARD

Agrégées de l'Université

392 pages. Relié 9,80 NF



Parution mai 1962 :

MATHÉMATIQUES, Classe de 3^e

Salle d'exposition : 93, rue de Seine, Paris-6^e

AU SUJET DES MATHÉMATIQUES DANS LES FACULTÉS DE DROIT ET DES SCIENCES ÉCONOMIQUES

J'ai lu avec le plus grand intérêt l'article du professeur Henri Guitton dans le n° 215, 1961, du présent périodique.

J'ai été, d'abord, heureux de trouver un allié quand il écrit : « Je crois que personne n'est imperméable à l'étude mathématique. » Il y a longtemps que je soutiens cette thèse. Si certains élèves, certaines personnes paraissent imperméables aux Mathématiques, c'est parce qu'ils n'en voient pas l'intérêt. Aux uns, les Mathématiques apparaissent comme un jeu (ennuyeux) sans application. Aux autres, on leur a présenté les Mathématiques comme une succession de syllogismes sans leur montrer quel en est le but, quelle en est l'idée directrice.

Il faut suivre le professeur les yeux fermés. Ce fut le cas de Paul Valéry dans son adolescence (qui fut rebuté par la façon dont on enseignait les Mathématiques), alors qu'il montra plus tard un grand intérêt pour cette même science.

Mais il est peut-être bon de faire une distinction : chacun peut comprendre les Mathématiques et même en faire une application immédiate.

Là où les différences apparaissent, c'est dans la recherche. Et je ne pense pas seulement aux recherches qui font avancer la science, mais aussi aux recherches des élèves quand on leur propose un problème qui ne peut être résolu que par les meilleurs.

C'est pourquoi je souhaiterais que, dans les Lycées et aussi dans les Facultés des Sciences économiques, on propose deux sortes de problèmes : les uns, qui ne seraient que des applications immédiates du cours, mais qui seraient obligatoires, les autres exigeant une faculté d'invention, mais qui seraient facultatifs.

Dans la suite de l'article de M. Guitton, le baccalauréat ne se présente que sous trois formes : celui de Philosophie, celui de Mathématiques et celui de Sciences Expérimentales. Or, il existe aussi un baccalauréat économique (dépendant de l'Enseignement technique), et c'est lui qui fournit la meilleure préparation aux études économiques supérieures. Pour le préparer, en particulier, on y enseigne la Statistique et, l'année suivante, le Calcul des Probabilités.

Je m'y intéresse d'autant plus que j'ai eu quelque part dans sa création. On pourrait retrouver, dans le journal de la Société de Statistique de Paris, les réponses qui avaient été faites à une enquête que j'avais menée sur l'introduction de la Statistique et des Probabilités dans l'Enseignement secondaire ou technique.

Cette enquête a remis la question à l'ordre du jour et elle a été traitée officiellement un peu plus tard. Cette introduction a été rejetée, à l'époque, pour la classe de Mathématiques, mais une commission, où je figurais, a tracé le programme d'enseignement de ses matières pour l'Enseignement technique.

J'ai été heureux de voir adopter pour cet enseignement l'ordre : Statistique, puis Calcul des Probabilités, c'est-à-dire le concret avant l'abstrait.

Cet enseignement est en plein essor et déjà deux ouvrages, par des auteurs différents, sont venus faciliter la tâche des professeurs et des élèves.

Il m'a semblé utile d'attirer l'attention de M. Guitton et de ses lecteurs sur cette source de recrutement, particulièrement bien préparée, des Facultés de Sciences économiques. Elle répond aux vœux mêmes exprimés par M. Guitton.

Maurice FRÉCHET,
Membre de l'Académie des Sciences.

PROJET DE PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DANS LES CLASSES NON-SCIENTIFIQUES

Ce texte fait suite au projet, pour les classes de Seconde A et B, publié dans le *Bulletin* 215 (p. 393). Comme pour ce dernier, un premier projet, présenté par M. Barbut, a été étudié et révisé par la Commission des programmes de l'A.P.M. Le programme proprement dit et les commentaires ont été rédigés par M. Barbut, d'après les observations de la Commission.

Classe de Première

I. — ALGÈBRE

1° *La transitivité* : Notion de préordre (relation réflexive et transitive). Exemples (implication logique, chemin dans un réseau, etc...). Préordre d'un réseau.

Préordres antisymétriques ou ordres. Préordres symétriques : relations classificatoires (d'équivalence) ; partitions. Partition d'un ensemble associée à une application de cet ensemble dans un autre.

Ensembles quotients. Sous-partition d'une partition.

Tableau et réseau d'une classification. Préordres qui ne sont ni des ordres ni des classifications : ordre quotient par la relation d'équivalence : $x \geq y$ et $y \geq x$ (où $\geq$ désigne la relation de préordre).

Commentaires : Ce paragraphe devra être traité en soulignant le rôle fondamental de la transitivité : seules, les relations transitives permettent la classification, la mise en ordre. L'ordre et la classification apparaîtront comme deux extrêmes du préordre. L'absence de cycles dans un ensemble ordonné sera montrée.

Comme exemples de préordres, sur lesquels l'ordre quotient apparaît clairement, on peut citer les classes d'âge, les points de $\mathbb{R}^2$ pour la relation :

$$(x_1, x_2) \geq (x'_1, x'_2) \iff x_1 \geq x'_1$$

les propositions pour l'implication logique (classes de propositions équivalentes) ; enfin, la relation « il existe un chemin de x à y » entre sommets d'un réseau : le préordre du réseau (synonyme : fermeture transitive de la correspondance dont le réseau est une représentation).

Des contre-exemples devront être fournis : relations du type « presque » dans le langage ordinaire, perpendicularité, entre droites d'un plan... Bien sûr, tous les exemples d'ordres ou de classifications déjà vus en Seconde (parties d'un ensemble, diviseurs d'un nombre entier, parallélisme entre droites...) seront revus à cette occasion.

Il faudra enfin bien insister sur l'équivalence entre la donnée d'une partition dans un ensemble et celle d'une application de cet ensemble dans un autre. Cette équivalence sera rappelée chaque fois que l'on parlera de fonctions.

2° *Demi-treillis et treillis* : Notion de demi-treillis (défini à partir de la relation d'ordre : ordre tel que tout couple d'éléments admet un plus petit majorant commun). Exemples (en particulier, arbres). Propriétés de l'opération $\vee$ d'un demi-treillis ; caractérisation algébrique d'un demi-treillis :

$$x \vee x = x \quad x \vee y = y \vee x \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z).$$

Notion de treillis. Exemples de treillis non distributifs ; construction du treillis distributif libre à trois générateurs. Fermeture dans un ensemble ordonné. Fermeture dans un treillis : le plus grand minorant commun à deux fermés est un fermé.

Commentaires : Les exemples de treillis ne manquent pas dans le programme : parties d'un ensemble, diviseurs ; produit cartésien de plusieurs ensembles totalement

ordonnés. Dans le cas des treillis, on a un exemple particulièrement simple du passage du langage combinatoire au langage algébrique par la relation :

$$x \geq y \iff x \vee y = x \iff x \wedge y = y.$$

On commence par le cas, plus simple, du demi-treillis. L'ayant défini à partir de sa relation d'ordre, on montre réciproquement que tout ensemble où est définie une opération idempotente, commutative, associative, est un demi-treillis.

La notion de fermeture pourra n'être introduite qu'à propos des exemples qui en seront trouvés : fermeture transitive d'une correspondance, sous-groupe d'un groupe.

3° *Groupes* : Définition d'un groupe (définition usuelle ou quasi-groupe * associatif) ; leur équivalence. Relations d'équivalence compatibles avec l'algèbre d'un groupe ; sous-groupe, sous-groupes invariants (synonymes : sous-groupes normaux, ou distingués). Cas des groupes finis : théorème de Lagrange sur l'ordre des sous-groupes d'un groupe fini.

Construction de groupes finis d'ordre 6, 8, 12. Décomposition en cycles d'une permutation et classe d'intransitivité d'un groupe de permutations.

Les sous-groupes forment un treillis.

Structure algébrique quotient. Application à l'arithmétique. Produit direct de deux groupes.

Commentaires : En définissant les groupes, il faudra donner des exemples d'opé-

rations non associatives, somme $\frac{x+y}{2}$ dans l'ensemble des nombres ; les groupes

de permutation fourniront des exemples de groupes non commutatifs. Par construction d'un groupe, il faut entendre construction de sa table de Pythagore, d'un diagramme. On pourra également construire des tables de quasi-groupes finis (carrés latins).

La recherche de classifications compatibles à gauche (ou à droite) dans un groupe conduit à une définition des sous-groupes ; ceux-ci peuvent aussi être obtenus comme parties stables minimales contenant une partie donnée. Dans le cas des groupes finis, la correspondance bi-univoque entre classes conduit au théorème de la divisibilité de l'ordre d'un groupe par les ordres de ses sous-groupes.

Sur la structure algébrique quotient d'un groupe par un sous-groupe invariant, on montrera que les classes se composent entre elles suivant une loi de groupe homomorphe au groupe de départ. On reconnaîtra cette structure algébrique sur les exemples de groupes finis dont on aura construit la table, sur les classes résiduelles en arithmétique.

La définition du produit direct de deux groupes sera dégagée d'exemples, et utilisée comme moyen de construire de nouveaux groupes à partir de ceux qu'on connaît déjà ; ce sera l'occasion d'un retour fructueux sur les vecteurs du plan, de l'espace (par rapport à l'addition).

II. — ITERATION DES CORRESPONDANCES

1° *Récurrence et progressions* : Suite : $u_n = u_{n-1} + b$.

Equations aux différences premières et secondes associées. Somme des n premiers termes d'une progression arithmétique.

* Un ensemble dans lequel est définie une opération binaire $\circ$ est un quasi-groupe si l'équation :

$$x \circ y = z$$

détermine toujours, et de façon unique, le troisième élément du triplet (x, y, z) lorsque deux d'entre eux sont donnés.

Suite : $u_n = au_{n-1}$.

Equations aux différences successives associées. Somme des n premiers termes d'une progression géométrique.

Comparaison des deux types de croissance : papiers logarithmiques.

Suite : $u_n = au_{n-1} + b$.

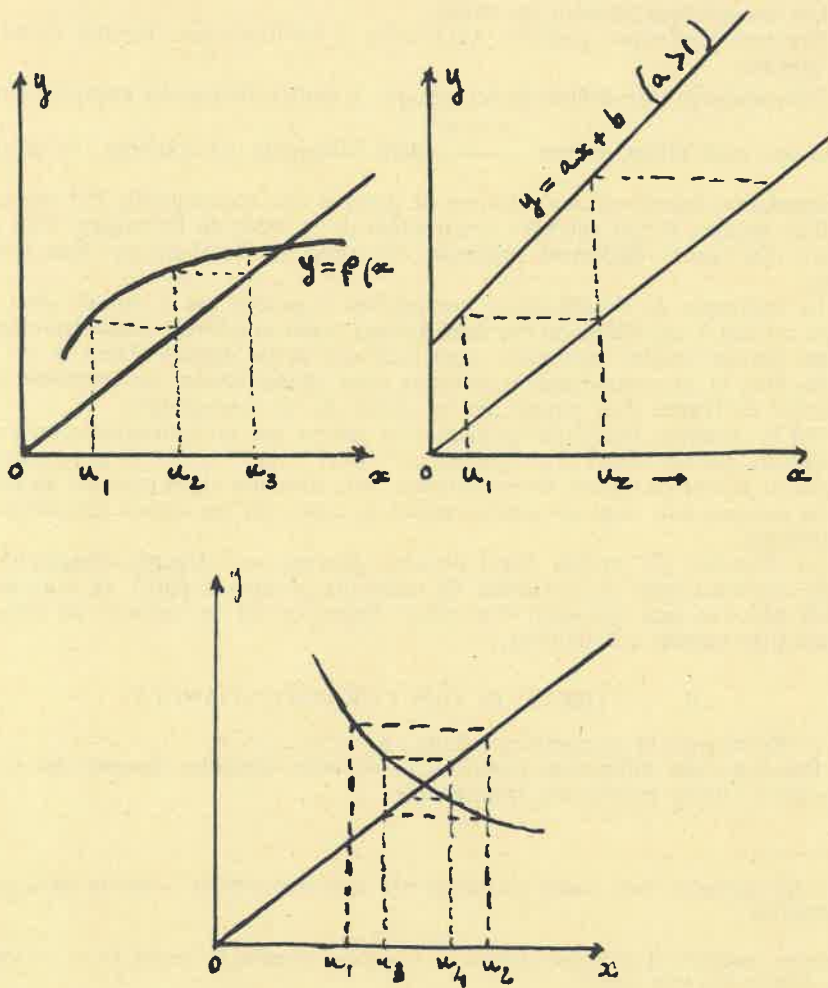
Démontrer que si $a > 1$, a^n tend vers l'infini avec n .

Limite de u_n lorsque $a < 1$ (2° et 3° suite).

Commentaires : Pour le comportement de a^n lorsque $n \rightarrow \infty$, on peut utiliser l'inégalité : $h > 0 : (1 + h)^n > 1 + nh$ facile à démontrer.

Des exemples de progression sont fournis par l'économie (intérêts, croissance) ou la démographie (malthusianisme) ; on peut en trouver d'autres, comme cette réalisation d'une échelle logarithmique qu'est le piano (autre ceux qu'a déjà fournis le cours).

D'autre part, pour les suites du type : $u_n = f(u_{n-1})$, il convient de familiariser les élèves avec l'image :



L'étude des suites proposées dans le programme est une façon d'introduire la notion de limite, dont la définition pourra être dégagée à cette occasion. Le passage d'une suite aux équations aux différences associées prépare l'introduction ultérieure des dérivées ; la sommation des termes successifs d'une suite à celle des intégrales.

2° *Itération d'une correspondance* dans un ensemble fini : Produit de deux correspondances entre ensembles finis ; opération correspondante sur leurs tableaux : produit des deux matrices (0, 1), c'est-à-dire des matrices dont les éléments n'ont que deux valeurs possibles. Cas des matrices de permutation. Union de deux correspondances entre deux ensembles finis ; somme de matrices (0, 1).

Ordre d'inclusion des correspondances entre ensembles finis. Fermeture transitive d'une correspondance dans un ensemble fini.

Commentaires : Ce paragraphe introduit d'une façon extrêmement naturelle les opérations matricielles. Une correspondance de E dans F suivie d'une correspondance $F \times G$ donnera une correspondance $E \times G$, où E, F et G sont des ensembles finis. Les tableaux des deux premières correspondances se composent pour donner celui de la troisième, qui par définition sera le produit des deux tableaux. Le calcul des éléments de ce troisième tableau se fait en regardant, pour un couple : (i, j) , $i \in E$, $j \in G$, s'il existe ou non un $k \in F$ tel que l'on ait : $k \in \Gamma i$, $j \in \Gamma' k$, Γ et Γ' étant les deux correspondances. On est donc amené à comparer la ligne i du premier tableau à la ligne j du second. Le nombre de coïncidences de 1 donne le nombre de chemins $i \rightarrow k \rightarrow j$, de i à j .

Cependant on peut aussi ne pas s'intéresser à ce nombre, mais seulement à l'existence d'un tel chemin ; dans le premier cas, on introduira les matrices à éléments entiers ; dans l'autre, les matrices à éléments booléens ($1 + 1 = 1$).

L'addition des tableaux sera de même définie en considérant l'union de deux correspondances : là aussi, on pourra soit compter, soit faire de l'algèbre booléenne.

Les matrices seront alors définies comme des tableaux dont les éléments a_{ij} sont éléments d'un anneau, et sur lesquelles on peut faire les opérations introduites.

Cette façon d'introduire les matrices présente l'avantage de donner un support intuitif à la théorie des processus de Markoff.

La fermeture transitive d'une correspondance interne servira d'exercice : calcul, sur des exemples simples, de la matrice de : $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma^2 \cup \Gamma^3 \cup \dots$, où Γ est la correspondance étudiée, et $\bar{\Gamma}$ sa fermeture transitive.

III. — TRANSFORMATIONS LINEAIRES

Systèmes d'équations linéaires à deux inconnues et deux équations.

Transformations linéaires dans R^2 : notation matricielle, cas des homothéties. Produit de deux transformations linéaires, produit de deux matrices (2×2), inverse d'une matrice.

Somme de deux matrices (2×2). Exemples de groupes finis de matrices.

Commentaires : Dans le paragraphe précédent, on a appris à composer entre eux des tableaux dont les éléments valent 0 ou 1, suivant deux opérations.

On va étudier maintenant cette structure algébrique systématiquement dans un cas particulier, celui de deux tableaux (2×2), mais avec des coefficients réels quelconques.

Les systèmes d'équations linéaires pourront être interprétés en terme de réseaux (par exemple, en considérant un réseau d'échanges économiques).

La linéarité de la transformation définie dans R^2 par les relations :

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned}$$

sera mise en évidence.

I. — FONCTIONS

1° *Continuité* d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dérivée d'une fonction. Dérivée et tangente à la courbe représentative de la fonction. Exemples de fonctions en escalier ou linéaires par intervalles.

Fonctions usuelles : $y = ax^n$ $n = 2, 3, -1, -2, \dots$

Leurs dérivées, leur variation. (On admet que si la dérivée est positive dans un intervalle, la fonction est croissante). Notion de fonction convexe dans un intervalle.

Dérivée d'une somme de fonctions, du produit de deux fonctions, de l'inverse d'une fonction.

Dérivée d'une fonction, composée, de la fonction réciproque d'une fonction.

Commentaires : Il s'agit d'apprendre à construire des courbes représentatives de fonctions usuelles, à calculer leurs dérivées ; mais l'existence de fonctions en escalier, ou à dérivée en escalier ne doit pas être oubliée *.

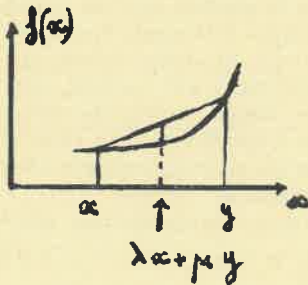
Les théorèmes sur les limites, l'existence des dérivées, peuvent être admis.

On mettra en évidence la linéarité de la dérivation.

Les fonctions convexes seront définies par l'inégalité :

$$\lambda f(x) + \mu f(y) \geq f(\lambda x + \mu y),$$

quels que soient x et y , et λ, μ , tels que : $\lambda \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$.



On démontrera que celles des fonctions étudiées qui sont convexes ont cette propriété.

2° *Primitives* : Primitives d'une fonction (on admet que les primitives d'une fonction identiquement nulle sont les fonctions constantes). Primitives d'une somme de fonctions. Application au calcul d'aires (axes rectangulaires).

Commentaires : Ce paragraphe est déjà au programme de la classe de philosophie.

On pourra introduire les notations telles que : $\int_b^a f(x)dx$, ou mieux : $I(f, a, b)$.

Il serait, d'autre part, important de montrer, à titre d'exercice, et en liaison avec ce qui est fait dans le paragraphe II, que les seules applications dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des fonctions en escalier définies dans un intervalle (ensemble ordonné où les opérations vectorielles ont un sens) satisfaisant à :

- 1) $f \geq g \Rightarrow I(f) \geq I(g)$,
- 2) $I(f + g) = I(f) + I(g)$,

(*) Ce sont celles de la pratique courante.

$$3) \quad I(\lambda f) = \lambda I(f),$$

4) invariance par rapport aux translations,

sont les aires limitées par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des x , etc...

3° *Fonction exponentielle et logarithme* : Recherche des solutions monotones de l'équation fonctionnelle :

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

(fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Convexité de la fonction exponentielle ; dérivées de l'exponentielle de base a (on admettra qu'une fonction convexe a une dérivée à droite et à gauche en tout point). Fonction logarithme définie comme solution monotone de l'équation :

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

ou comme fonction réciproque de l'exponentielle ; ou comme primitive de la fonction a/x , ($x > 0$, $a > 0$) ; équivalence de ces définitions.

Commentaires : On a étudié en Première l'exponentielle sur l'ensemble des entiers ; on a en particulier repéré qu'à l'équation : $u_n = au_{n-1}$, est associée l'équation aux différences : $\Delta_n = a\Delta_{n-1}$ (c'est-à-dire que ces différences croissent comme la fonction elle-même). D'autre part, on a également vu quelles fonctions transforment des sommes en sommes. On va maintenant transformer des sommes en produits et des produits en sommes.

Comme dans le cas de la fonction linéaire, l'équation :

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

sera d'abord étudiée pour des variables entières, puis rationnelles (d'où les notations a^{-n} , $a^{p/q}$ ($a = f(1)$)).

On démontre en particulier

$$\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(f\left(\frac{1}{p}\right)\right)^q \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

Mais il va de soi que le professeur a toute liberté, s'il le désire, de commencer par définir la fonction logarithme (comme primitive de a/x par exemple), puis l'exponentielle comme réciproque de la fonction logarithme. Ce qui est essentiel, c'est que les élèves aient bien compris les isomorphismes entre le groupe additif des nombres réels et le groupe multiplicatif des réels positifs conservant l'ordre. On pourra également à titre d'exercice traiter l'équation :

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

II. — DISTRIBUTIONS DE MASSES ET PROBABILITE

1° Distribution des masses sur un ensemble fini. Masse d'une partie de l'ensemble. Recherche, sur l'ensemble des parties d'un ensemble fini, de la fonction numérique la plus générale satisfaisant à :

$$m(A) \geq 0 \text{ et } A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B),$$

cas d'un ensemble fini totalement ordonné ; fonctions de répartition en escalier.

2° Barycentre d'un système de points du plan ; sa définition, ses coordonnées. Barycentre de la réunion de deux ensembles disjoints.

Moment d'inertie, par rapport à un point, d'un système de points ; son expression en fonction des abscisses des points dans le cas de points alignés.

3° Variable aléatoire réelle dans le cas d'un ensemble d'éventualités fini. Espérance d'une variable aléatoire réelle, axiomes des espérances.

Probabilité d'un événement, distribution de probabilité sur un ensemble fini.

Axiome des probabilités composées.

Formule de Bayes.

Distribution binômiale, formule du binôme.

Moment d'ordre deux et variance d'une variable aléatoire ; leur calcul dans le cas d'une distribution binômiale.

Inégalité de Bienaymé-Tchebicheff. Loi des grands nombres de Bernoulli.

Commentaires : L'introduction du calcul des probabilités est toujours délicate. Elle est facilitée par un maniement préalable des distributions de masses et des opérations vectorielles, et par une notion claire de ce que c'est qu'une fonction. Une façon de procéder (mais il va sans dire que là encore chacun est libre de suivre l'ordre qui lui convient) est d'axiomatiser la notion d'espérance d'une variable aléatoire, avant d'avoir prononcé le mot de probabilité : on est dans une situation d'incertitude, dans laquelle on sait qu'une éventualité va se réaliser parmi celles d'un ensemble donné ; d'autre part, on sait qu'à chaque éventualité correspond un nombre (gain ou perte) connu, et un seul ; ce qu'on connaît, c'est donc une fonction de l'ensemble des éventualités dans l'ensemble des nombres, fonction que l'on baptise variable aléatoire. D'autre part, ce que l'on veut construire, c'est un outil qui permette de prendre des décisions, de *calculer* ses décisions dans de telles situations d'incertitude. Or, un calcul bien familier, c'est celui des quatre opérations ; parmi celles-ci, deux ont un sens clair quant aux variables aléatoires que nous considérons : l'addition, la multiplication par un scalaire (structure de vectoriel de l'ensemble des fonctions d'un ensemble fini à $\mathbb{R}$) : on sait ce que c'est que d'acheter deux billets de loterie au lieu d'un seul.

L'espérance d'une variable aléatoire X est par définition le nombre $E(X)$ que nous allons lui faire correspondre : $E(X)$ est la valeur, le prix, que nous attribuons à cette situation complexe dans laquelle nous avons un ensemble d'éventualités, un gain attaché à chacune des éventualités, et une incertitude quant à celle des éventualités qui se réalisera. Le calcul des décisions (au sens vague du terme) dans les situations d'incertitude se fera sur la base du calcul (au sens précis) des espérances. Si nous *admettons la validité* d'un tel calcul, il est naturel de poser :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(\lambda X) = \lambda E(X)$$

$$X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0,$$

et, enfin :

$$E(X) = x,$$

lorsqu'il n'y aura qu'une éventualité (plus d'incertitude) et que le gain correspondant est x .

On cherche alors quelles sont les applications de Ω dans $\mathbb{R}$ (où Ω est l'ensemble, supposé fini, des éventualités) qui satisfont à ces conditions. On trouve :

$$E(X) = \sum_{i \in \Omega} x_i E(X_i)$$

où $E(X_i)$ est l'espérance de la variable aléatoire qui vaut 0 quand $X \neq x_i$, et 1 quand $X = x_i$.

Par définition, $E(X_i)$ est la probabilité de l'ensemble d'éventualités (ou événement) dans lesquelles le gain est x_i . L'axiome des probabilités totales est un cas particulier de l'axiome d'additivité des espérances. Ayant vérifié que les probabilités ainsi définies dans Ω satisfont bien aux deux conditions :

$\Pr(\Omega) = 1$, $\Pr(A) \geq 0$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$, on voit que les axiomes des espérances équivalent à distribuer la masse unité sur Ω , à *pondérer* les événements.

Ce qui reste arbitraire, c'est la façon de répartir cette masse : chaque répartition est une manière d'exprimer une opinion sur les éventualités possibles. Tenter de réduire l'arbitraire, c'est là l'objet de la Statistique ; on démontrant aux élèves la première Loi des grands nombres, on pourra leur faire comprendre que cet objet n'est pas vain.

III. — STATISTIQUE

Fréquence d'un événement ; expérimentation sur des urnes (par exemple celles que constituent des textes écrits : fréquence d'apparition des mots, lettres, etc...).

Définition des mots : échantillon extrait d'une population, moyenne d'un échantillon (extrait d'une population de nombres), variance.

Commentaire : A ce niveau, l'enseignement de la Statistique est essentiellement expérimental : manipuler le « hasard », mesurer des fréquences. La loi des grands nombres aura fait comprendre l'utilité du calcul de moyennes simples ou quadratiques ; mais on distinguera nettement la Statistique, science expérimentale du Calcul des Probabilités, qui est l'un de ses outils.

ENCYCLOPÉDIE VISUELLE



Diapositives couleurs pour l'enseignement

ASTRONOMIE

Nouvelle collection sous la direction de
G. WALUSINSKI

Le mouvement diurne : 10 vues

La carte du Ciel : 10 vues

La Terre et les planètes : 10 vues

La Lune : 10 vues

Le Soleil : 10 vues

La Galaxie : 10 vues

Les galaxies : 10 vues

EN CO-EDITION ARMAND COLIN - VÉRONÈSE

Pour recevoir notre catalogue détaillé, utiliser le bon ci-après

LIBRAIRIE ARMAND COLIN
103, boulevard Saint-Michel, Paris-V^e

BON P. E.
(à découper)

Je m'intéresse à l'ENCYCLOPÉDIE VISUELLE et vous prie
de bien vouloir m'adresser, dès leur parution, vos catalogues
détaillés ainsi que toute publicité s'y rapportant.

Nom _____
(Monsieur ou Madame)

Fonction _____

Adresse _____

La Révolution astronomique

Alexandre KOYRÉ. — *La Révolution astronomique*, Copernic, Képler, Borelli *.

Notre *Bulletin* n'est pas spécialisé dans l'histoire de la science, et ce n'est pas en spécialiste que je me propose de rendre compte du dernier ouvrage d'Alexandre Koyré.

Mais nul scientifique ne peut nier le rôle primordial que joue dans la culture et dans la formation des jeunes esprits — et des moins jeunes — cette synthèse de toutes les activités scientifiques qu'est l'Astronomie.

C'est, d'autre part, une des très rares sciences dans l'enseignement desquelles il soit fait traditionnellement et officiellement une part assez importante à l'exposé historique des hypothèses. Malheureusement, cet exposé se perpétue de générations en générations en se desséchant et s'appauvrissant, en même temps qu'il se complique de contresens et d'anachronismes. Il perd ainsi à la longue toute valeur formatrice et devient même un très dangereux vecteur des lèpres du psittacisme, de l'à-peu-près et du conformisme.

Rien n'est donc plus utile que le retour aux sources, les textes des grands astronomes disparus. Mais ici l'amateur qu'est chacun de nous ne peut plus s'aventurer tout seul. Il lui faut d'abord acquérir une vue d'ensemble, panoramique, de l'histoire de la science. Depuis quelques années, nous sommes sur ce point assez bien servis avec « *L'histoire de la science* », de la collection de la Pléiade, et « *L'histoire générale des sciences* », des Presses Universitaires, dont trois volumes sont actuellement parus.

Une fois cette indispensable initiation acquise, il reste à aborder l'étude détaillée de quelques auteurs, ici de quelques astronomes. Hélas ! la langue qu'ils emploient, si l'on veut remonter en-deçà du XVIII^e siècle, est bien rarement le français, mais le grec, l'arabe, puis le latin. Il faudrait donc des traductions, qui sont rares. Elles ne suffisent d'ailleurs pas, il faut qu'un spécialiste de l'histoire des sciences recrée pour nous le climat dans lequel a travaillé l'auteur et éclaire les démarches d'un esprit généralement éminent, mais dont la formation et les habitudes nous sont souvent complètement étrangères. C'est à cette rude tâche que s'est attaqué ici, pour trois protagonistes de la révolution astronomique, dont deux sont des plus grands, un des meilleurs spécialistes mondiaux de notre jeune histoire de la pensée scientifique.

« Dans les trois études, écrit-il, — Copernic, Képler, Borelli —, que j'ai réunies dans ce volume, je n'ai pas eu l'intention de retracer l'histoire de l'astronomie de Copernic à Newton, mais uniquement celle de la "révolution astronomique", c'est-à-dire l'histoire de l'évolution et de la transformation des concepts-clés à l'aide desquels l'astronomie essaye d'ordonner ou de "sauver" les phénomènes [les apparences] en substituant au chaos des apparences sensibles une réalité intelligible qui la sous-tend et qui l'explique. L'histoire de l'astronomie, en tant que telle, aurait dû englober celle de l'astronomie d'observation, ressuscitée en Occident par Régiomontanus et Bernhard Walter ; consacrer une étude à la fondation et à l'œuvre des premiers observatoires, ceux du Landgraf Guillaume IV de Hessen-Cassel et, surtout, de Tycho Brahe ; décrire son bouleversement par l'invention de la lunette astronomique ; analyser l'impact des grandes découvertes de Galilée et de ses émules... Or,

* 1 vol. in-8°, 525 pages. Histoire de la Pensée III. Ecole Pratique des Hautes Etudes, Sorbonne. Hermann, Paris, 1961. Ouvrage publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique.

chose curieuse, la révolution astronomique a été, non seulement quant à son origine — les données observationnelles de Copernic sont à peu près celles de Ptolémée —, mais aussi quant à son évolution, presque entièrement indépendante du développement de l'astronomie d'observation. Képler, sans doute, nous dit que ce sont les huit minutes d'écart entre la théorie et les observations de Tycho Brahe qui sont à l'origine de son Astronomie Nouvelle ; mais, en fait, cet écart n'a eu, pour lui, autant d'importance que parce qu'il cherchait à l'interpréter dans le cadre d'une physique céleste dont il avait conçu l'idée bien avant d'avoir eu accès aux observations de Brahe. Interprété dans le cadre d'une cinématique astrale — le cadre de Brahe —, l'écart en question n'aurait eu aucune conséquence grave.

« Il en est de même pour Borelli : ce ne sont pas ses observations télescopiques des mouvements des planètes médicéennes, c'est sa décision d'étendre à l'astronomie les principes de la dynamique nouvelle — quelque chose que Galilée n'avait même pas tenté et que Descartes n'avait pas réussi — qui lui assure une place à côté de Copernic et de Képler. Or, cette décision n'est pas motivée par ses observations, ni par celles des autres. Tout au plus peut-on dire qu'elle l'a été par l'ensemble des observations au télescope qui ont porté le coup de grâce au monde clos et lui ont substitué un monde ouvert.

« En fait, la révolution astronomique s'accomplit en trois étapes, liées, chacune, à l'œuvre d'un homme : avec Copernic, qui arrête le Soleil et lance la Terre dans les cieux, l'héliocentrisme se substitue au géocentrisme. Avec Képler la dynamique céleste — hélas, aristotélicienne — remplace la cinématique des cercles et des sphères de Copernic et des Anciens. De ce fait même, la hantise de la circularité se trouve partiellement — dans un monde clos, elle ne peut l'être entièrement — surmontée et « l'astronomie elliptique » fait son entrée triomphale dans le monde. Enfin, avec Borelli, dans un monde désormais ouvert et régi par la dynamique, s'achève l'unification de la physique céleste et de la physique terrestre qui se traduit par la déroute du cercle au profit de la droite infinie.

« C'est à partir des idées de Képler et de Borelli, qu'il a fécondées par son immense génie, que s'est développée l'œuvre de Newton. Mais cela, c'est une autre histoire.

« J'ai, aussi souvent que possible, laissé la parole aux auteurs eux-mêmes, surtout pour Képler et Borelli, car, si les textes de Copernic sont relativement accessibles au lecteur français, les leurs ne le sont aucunement. Or, pour l'histoire de la pensée scientifique, histoire passionnante et instructive des efforts de l'esprit humain dans sa marche vers la vérité, rien ne peut remplacer le contact direct avec les sources et les textes originaux. Seul il peut nous permettre de percevoir l'atmosphère spirituelle et intellectuelle de l'époque étudiée, seul il peut nous permettre d'apprécier à leur juste valeur les motifs et les mobiles qui guidaient et poussaient les auteurs, seul il peut nous faire comprendre la puissance des obstacles qui se dressaient sur la route difficile, tortueuse, incertaine, qui les avait menés de l'abandon des vérités anciennes à la découverte et l'affirmation de nouvelles vérités. *L'itinerarium mentis in veritatem* n'est pas une ligne droite ; et il faut le parcourir dans ses détours et ses dédales, s'engager dans les impasses, se tromper de route et rebrousser chemin pour découvrir les constantes de la recherche et de la vérité et reconnaître avec Képler que les voies par lesquelles l'esprit y parvient sont plus merveilleuses encore que le but qu'il atteint. »

L'avant-propos de l'auteur, avant-propos que nous venons de reproduire presque intégralement, fait admirablement comprendre dans quel esprit ont été faites les trois études, de longueurs très inégales, dont l'ensemble forme l'ouvrage.

Celle consacrée à « Copernic et le bouleversement cosmique » comporte 59 pages de texte réparties en une introduction, cinq chapitres et un appendice, suivies de 42 pages de notes.

L'étude sur « Képler et l'Astronomie nouvelle » forme un ensemble de 257 pages de texte et 83 pages de notes. Elle comprend, outre une introduction, trois

parties : Le *Mysterium cosmographicum*, œuvre de jeunesse, La Physique céleste ou l'*Astronomia nova*, partie subdivisée en neuf chapitres, De la Physique céleste à l'Harmonie cosmique, trois chapitres. Viennent ensuite une conclusion et trois appendices.

La dernière étude : « J.-A. Borelli et la Mécanique Céleste », contient 46 pages de texte et 14 pages de notes. Un index des noms cités complète l'ouvrage.

En veine de citations, je préfère faire suivre cette description sommaire, non d'une étude analytique et critique de l'ouvrage, mais de quelques extraits, choisis un peu au hasard, de ses trois parties. Aussi bien ce travail très riche, très sérieux, bourré de références, est-il à lire par chacun de nous, et ce sont des extraits qui en montreront le mieux l'importance.

« Nicolas Copernic est né le 19 février 1473 à Torun (Thorn), en Prusse polonaise (Poméranie). Son père, qui s'appelait aussi Nicolas, était un riche bourgeois de Cracovie, qui vint s'établir à Torun quelques années avant l'annexion de cette ville par le Royaume de Pologne, en acquit la bourgeoisie et même en devint échevin ; sa mère, Barbara Watzelrode, venait d'une vieille famille patricienne de Torun, d'origine silésienne, semble-t-il. Ayant perdu ses parents à l'âge de dix ans, Nicolas Copernic fut adopté par son oncle Lucas Watzelrode, chanoine du chapitre de Frauenburg, qui devint en 1489 évêque de Warmie. Copernic fut-il polonais ou allemand ? Je [l'auteur] dois avouer que cette question, ou plutôt l'importance qu'on lui donne, me paraît être plutôt anachronique. Copernic vivait à une époque qui, à quelques exceptions près, et malgré le rôle croissant des langues nationales, n'était pas aussi empoisonnée par le nationalisme et les passions nationalistes que la nôtre et qui jouissait encore de la bénédiction d'une culture commune et d'un commun langage scientifique. » J'arrête ici provisoirement cette citation d'un texte de l'auteur pour faire pour ma part quelques remarques. Les intellectuels de ce xvr^e siècle ont évidemment le grand bénéfice de posséder une langue commune, le latin. Cependant, d'une part, cette langue se prête beaucoup moins que le grec, la remarque je crois est de Képler, à l'exposé des faits scientifiques, en particulier dans les sciences exactes. D'autre part, si le nombre des savants qui lisent le grec augmente, ce qui est tout bénéfique, le nombre de ceux qui lisent l'arabe tombe en-dessous du seuil critique au-delà duquel une tradition scientifique d'importance primordiale se perd à peu près totalement. Cette situation est à peu près symétrique de celle qui existait aux xii^e et xiii^e siècles. Ces remarques ne sont pas, je crois, inutiles dans ce *Bulletin*. Elles peuvent se transposer à notre époque : si de nombreux scientifiques français lisent couramment l'anglais, l'espagnol ou l'italien, trop peu lisent l'allemand [sur 60 élèves de Spéciale, 50 se font inscrire en anglais première langue pour 10 en allemand, et la proportion est souvent plus faible] et beaucoup moins encore le russe. Quant au chinois ou au japonais, mieux vaut n'en pas parler. Mais revenons au texte.

« Il [Copernic] vivait dans un Empire (la Pologne médiévale n'était pas un Etat national, mais un Empire), dont les sujets de nationalités — c'est-à-dire de langues — diverses, unis par et dans leur commune appartenance à l'Etat (*Respublica*), ignoraient le problème des minorités et de leurs droits (dont ils jouissaient pleinement), se mariaient fréquemment entre eux et, généralement parlant, s'entendaient assez bien. S'il nous était possible de poser à Copernic lui-même la question : Etes-vous Polonais ou Allemand ?, il ne nous comprendrait certainement pas bien et répondrait probablement qu'il était *Pruthenus*, voulant dire par là qu'il était un bourgeois de Torun, un bon catholique, chanoine de Frauenburg-en-Warmie et, de ce fait, sujet du roi de Pologne. Qu'il employait la langue de la science et de la culture, le latin, pour son travail et sa correspondance scientifique, mais que lorsqu'il avait affaire aux gens du commun ou aux princes, il usait de la langue vulgaire, du polonais à Cracovie, de l'allemand à Frauenburg ou à Heilsberg, de l'italien à Padoue ou Bologne. Si nous insistions en essayant de lui faire comprendre que nous cherchons autre chose et que nous avons l'intention d'expliquer son œuvre et son génie par sa « nation » et sa « race », il se fâcherait probablement et nous déclai-

rerait que l'idée d'expliquer l'individuel par le spécifique ou le général est parfaitement absurde ; qu'un tel procédé n'est valable que lorsqu'il s'agit de traits généraux (ou spécifiques) des êtres individuels ; qu'il peut être appliqué avec succès dans les domaines de la nature qui manquent d'individualité véritable, mais non lorsqu'il s'agit de l'homme qui, en tant que substance spirituelle, ne peut être expliqué par des traits et des facteurs appartenant à son être matériel ou social. Il dirait que les conceptions historicistes, marxistes, sociologistes, selon lesquelles un homme, ou une œuvre, de génie, peut être « expliquée » par l'hérédité, la race, la classe, la situation, le milieu et le moment historique, n'ont pu être inventées et soutenues que par des barbares complètement démunis de formation philosophique. Et il ajouterait sans doute, que si l'on voulait à tout prix l'expliquer, lui, Copernic, par ces moyens ridicules, c'est vers l'Italie, et non vers la Pologne ou l'Allemagne, que l'on devrait se tourner. »

En 1539, un jeune professeur de Wittenberg, Rheticus, alors âgé de 23 ans, arriva à Frauenburg. Il avait entendu parler des nouvelles théories de Copernic, et c'est à son enthousiasme de néophyte qu'elles doivent, en dernière analyse, d'avoir été rendues publiques. Donnons-lui la parole en reproduisant une traduction d'un passage de sa *Narratio Prima* :

« Mathématiciens non moins que médecins, doivent convenir que, comme Galien l'affirme maintes fois, la Nature ne fait rien sans but et que notre Auteur est tellement sage que chacune de ses œuvres n'a pas un seul usage, mais deux ou trois et souvent davantage encore. Puis donc que nous voyons que ce seul mouvement de la Terre suffit pour produire un nombre presque infini de phénomènes, ne devons-nous pas attribuer à Dieu, le créateur de la nature, l'habileté que nous observons chez de simples fabricants d'horloges ? Car ils évitent soigneusement d'insérer dans leur mécanisme des roues inutiles ou telles que leur fonction puisse être accomplie d'une manière plus parfaite par une autre grâce à un petit changement dans sa position. Qu'est-ce qui pouvait persuader mon maître [Copernic], un mathématicien, de ne pas adopter une théorie convenable du mouvement du globe terrestre, lorsqu'il vit qu'avec l'adoption de cette hypothèse, il suffisait, pour la construction d'une science certaine des phénomènes célestes, d'une huitième sphère, immobile, le Soleil étant immobile au centre de l'Univers, et que pour les mouvements des autres planètes il suffisait d'épicycles sur un déferent excentrique, ou d'un excentrique sur un excentrique, ou d'épicycles sur un épicycle ? Bien plus, le mouvement de la Terre sur son orbite produit les inégalités de toutes les planètes, sauf celles de la Lune ; ce seul mouvement se révèle être la cause de toutes les inégalités. »

Johann Képler est né en 1571. Il se destinait à la théologie mais en 1594, à 23 ans, il occupe, un peu à son corps défendant, le double poste de mathématicien des Etats de Styrie et de professeur à l'école de Graz, semblable à bien des étudiants pauvres de nos jours qui doivent un beau matin « accepter un poste ». C'est cette demi-infortune qui décida de sa voie. Dès 1595, il avait écrit et, dès 1596, publié, grâce à l'aide de son maître Maestlin, son *Mysterium Cosmographicum*, fruit de ses méditations. « Cher lecteur, dit-il dans sa préface, je me suis proposé de démontrer, dans ce petit livre, que Dieu, tout-puissant et infiniment bon, lors de la création de notre monde mobile et de la détermination de l'ordre des orbites célestes, a pris comme base de sa construction les cinq corps réguliers, qui ont joui d'une si grande célébrité, depuis Pythagore et Platon jusqu'à nos jours ; et qu'il a coordonné à leur nature le nombre et la proportion des orbites, ainsi que les rapports des mouvements célestes.

« Mais avant de t'en donner la démonstration, je voudrais te renseigner sur les raisons qui m'ont amené à écrire mon petit ouvrage, ainsi que sur ma manière de procéder ; ce qui, je pense, te permettra de mieux me connaître, et de mieux me comprendre.

« Déjà, à l'époque où, il y a six ans, j'ai bénéficié de la fréquentation du très

célèbre Michael Maestlin, j'ai senti combien la conception de la structure du monde, admise jusqu'ici, était peu satisfaisante. Aussi ai-je conçu un tel enthousiasme pour Copernic, que mon maître avait souvent mentionné dans ses cours, que non seulement j'ai maintes fois défendu ses vues dans les disputations avec les candidats à la licence, mais que j'ai même composé une disputation tout entière pour défendre la thèse que le « premier mouvement » provenait de la rotation de la Terre. Et j'y essayais déjà d'attribuer le mouvement du Soleil à la Terre en vertu de raisons physiques ou, si tu préfères, métaphysiques, comme Copernic l'a fait en vertu de raisons mathématiques [le jeune Képler voulait donc déjà substituer, à des raisonnements purement cinématiques, une argumentation fondée sur la physique, la dynamique, d'Aristote]. Pour ce but j'ai, petit à petit, réuni et mis ensemble, en les tirant partiellement des cours de Maestlin et, partiellement, en les concevant hardiment moi-même, tous les avantages mathématiques que Copernic possède par rapport à Ptolémée. »

Rapprochons cet écrit de jeunesse de cette déclaration beaucoup plus tardive : « A l'époque du *Mysterium*, je ne voyais pas clairement ma voie..., mais après que j'eus, par un travail incessant et qui m'occupa pendant une longue période de temps, et ce en utilisant des observations de Brahe, déterminé les vraies distances des orbites, enfin, le rapport vrai des temps périodiques des orbites m'est apparu, et si vous me demandez le moment exact de cette découverte, le voilà : je la conçus le 8 mars de cette année 1618, mais le calcul n'ayant pas été couronné de succès, je l'ai de ce fait rejetée comme fausse. Mais l'idée, retournant à mon esprit le 15 mai, par un nouvel assaut, surmonta les ténèbres de ma raison, avec une telle plénitude et un tel accord entre mes dix-sept ans de travail sur les observations de Brahe et cette mienne présente étude, que tout d'abord je pensais que je rêvais et que j'assumais comme un principe admis ce qui était encore un sujet d'investigation. Mais le principe est incontestablement vrai et tout à fait exact : les temps périodiques de deux planètes quelconques sont entre eux en proportion exactement sesquialtère de leurs distances moyennes, c'est-à-dire de leurs orbes... »

Terminons sur ce cri très légitime de victoire nos citations. Puissent-elles vous inciter à lire et relire ce bel ouvrage.

Jean ITARD.

Reprochons à l'éditeur le renvoi mal commode des très riches notes en fins de chapitres. Elles seraient beaucoup plus utilisables en bas de pages.

Par une inadvertance singulière, la pagination indiquée en table des matières n'est pas exacte. On aurait pu s'attendre à plus de minutie chez un éditeur scientifique.

Enseigner, c'est investir.

Louis CROS : *L'explosion scolaire*, publication du Comité Universitaire d'Information Pédagogique, Paris, 1961 (SEVPEN, prix : 6,50 NF).

Signe des temps : l'évidence du besoin, pour la société, de développer son service public de l'enseignement est telle qu'un haut fonctionnaire — M. Cros est directeur général de l'Administration Générale au Ministère de l'Education Nationale — peut énoncer à son propos des vérités que le Ministre devrait bien entendre.

M. Cros part du fait de l'explosion démographique qui coïncide, en France, avec l'allongement de la scolarité effective. Il faut donc modifier la structure de notre enseignement. J'approuve tout à fait, quant à moi, ce que l'auteur conçoit pour faire de l'Enseignement du Second Degré pour tous, moins un tronc commun égalisant par le bas, ou tout au moins à un médiocre niveau, l'ensemble des adolescents, mais plutôt une *école unique* aux sections diverses. Prolongeant, au-delà du niveau élémentaire, cette réussite rare de l'école communale où tous les enfants se retrouvent sur les mêmes bancs, il faut que les écoles du Second Degré donnent vie à cette

communauté des adolescents dont on voit bien qu'elle n'existe pas là où se produisent ces luttes stupides de clans adverses, blousons noirs ou gris. Cette communauté restera imparfaite, troublée d'obscurs malaises, tant que la mixité ne sera pas effective de la Maternelle à la Sorbonne (où elle a effectivement lieu).

Sur l'adaptation des méthodes, M. Cros se montre partisan des méthodes actives et d'une grande diversification des procédés : alterner les processus inductif et déductif. Je relève avec plaisir les phrases suivantes : « que les examens soient moins des barrages que des aiguillages » ; « tout esprit a désormais besoin, non pas d'apprendre la science, mais de s'entraîner à l'attitude scientifique dans l'observation et la réflexion, en même temps qu'à l'art littéraire dans l'exposition et la discussion ». Désormais est peut-être superflu ; mais il est vrai que, désormais, on ne peut douter que tels sont bien les buts d'une formation humaniste.

Cependant, le vrai problème est moins de définir la bonne méthode (ce qui supposerait qu'elle existe) que d'assurer les conditions qui permettent l'emploi des méthodes possibles. Il faut, pour cela, disposer de *maîtres expérimentés*, d'installations convenables et de *classes à effectifs limités*. Les deux termes extrêmes de cette proposition ne sont pas contradictoires, mais c'est un fait qu'à l'heure actuelle la satisfaction de l'un de ces buts contrarie la satisfaction de l'autre. M. Cros note, par ailleurs, la pénurie générale de cadres administratifs et commerciaux : au Ministère de l'Education Nationale, la proportion la plus forte des emplois vacants est celle, non des professeurs de Mathématiques ou de Physique, mais des secrétaires d'Inspection Académique. J'avoue, cependant, rester plus inquiet de la pénurie de maîtres, ceux qui enseignent me paraissant plus indispensables à l'enseignement que ceux qui administrent, étant persuadé que bien des simplifications pourraient être réalisées dans l'administration alors que les techniques enseignantes ne peuvent l'être. Quoi qu'il en soit, il semblerait normal que, dans ces conditions, le Ministère de l'Education Nationale consacre *tous* ses efforts à la formation des maîtres ; on sait qu'il n'en est malheureusement rien.

« L'effort nécessaire », dont traite pour finir M. Cros, concerne ce problème et celui de la construction d'écoles. La solution suppose évidemment d'énormes crédits. Il y faudra sans doute plus du sixième du budget de l'Etat. Je note ici une contradiction : p. 171, M. Cros écrit que le Ministère de l'Education Nationale gèrera bientôt le quart du budget (le quart me paraît une évaluation optimiste ; il est vrai que *gèrera* est un futur). Mais gèrera-t-il ? A la p. 158, M. Cros remarque fort à propos que les services publics ayant une fonction de production (l'E.D.F., par exemple) ne pourraient fonctionner s'ils étaient assujettis aux mécanismes financiers propres à notre administration. Ce mécanisme porte un nom : c'est la tutelle du Ministre des Finances. Quand verrons-nous un Ministre de l'Education Nationale réclamer son autodétermination ? Je me permets de le demander.

On voudrait n'avoir aucune réserve à faire devant un livre comme celui de M. Cros qui a le mérite de poser certains des problèmes essentiels. « Enseigner, c'est investir », dit-il fort bien. Mais il peut y avoir plusieurs manières de le faire. Comment assurer effectivement plus de justice sociale au niveau de la formation des jeunes gens ? Comment assurer la pleine efficacité et la pleine liberté de l'œuvre éducatrice de ce service public qu'est l'enseignement autrement qu'en respectant *partout* son statut laïque ? L'auteur dit qu'il ne parle pas, délibérément, de la laïcité, son étude étant de caractère économique, non politique. Mais qui a fait du problème de la laïcité une affaire politique, sinon ceux qui ont profité de la détresse économique de notre école (à qui on refuse les moyens d'assurer son service) pour prétendre « l'aider », en lui retirant encore de nouveaux crédits ?

Sans doute est-il difficile à un Directeur général du Ministère d'aboutir à cette conclusion qu'on ne pourra entreprendre la vraie réforme dont il voit bien la nécessité avec, au pied, ce boulet infâme des lois anti-laïques ! Un boulet dont on ne se débarrassera pas par une simple note de cinq lignes au bas de la page 160.

G. W.

Brèves rencontres.

Nous mentionnons ici des livres reçus et en particulier ceux sur lesquels nous donnerons de plus amples comptes rendus, mais qu'il nous tarde de signaler :

● Paul COUDERC : *Les éclipses* (Collection Que sais-je ?, n° 940, Presses Universitaires de France). A lire et faire lire. On relèvera en particulier tous les problèmes sur les conditions des éclipses, les lois de leur retour. Le chapitre « Les éclipses dans l'Antiquité » fournit une documentation aussi utile au mathématicien qu'au philosophe. Nous y reviendrons.

● V. KOURGANOFF : *Astronomie fondamentale élémentaire* (Masson, édit., Paris, 1962.; prix : br. 18 NF, cart. 23 NF). Ce livre traite de la première partie du certificat d'Astronomie I (il sera suivi d'un ouvrage d'astrophysique par E. Schatzman). Présentation soignée des grands principes ; l'auteur a recherché tout ce qui pouvait aider l'étudiant à comprendre le lien des apparences et de la réalité des phénomènes. L'ouvrage mérite de nombreuses remarques (à venir) et une lecture attentive. On peut tout de suite le recommander pour les bibliothèques de nos établissements.

● L. COUFFIGNAL : *Les connaissances mathématiques indispensables au chercheur physicien et à l'ingénieur* (Revue « Structure et Evolution des Techniques »). Cette brochure de 24 pages résume utilement les rapports et les débats d'un colloque de l'O.E.C.E. (17 février 1961) sur cet important sujet.

● A. BALLICIONI et M. CHAZEL : *Choix de problèmes de Mathématiques* (Masson, Paris, 1962). Il s'agit de solutions développées de problèmes d'agrégation (1^{re} composition) posés de 1924 à 1959 ; l'ensemble réunit 19 problèmes, presque exclusivement géométriques ; mais la solution géométrique a été parfois doublée d'une solution analytique. Un seul problème de l'agrégation féminine 1959 porte sur les matrices et les applications linéaires itérées.

En raison des modifications de la formule de la première composition, on peut se demander si la publication d'un tel recueil aidera les futurs candidats autant qu'on l'aurait souhaité. Mais ne rechignons pas : tout ce qui peut aider les candidats, tant soit peu, doit être reconnu et signalé. De plus, beaucoup de professeurs en exercice, passablement surchargés en général, trouveront dans ces énoncés et ces solutions d'utiles suggestions pour rédiger des énoncés sur les transformations.

G. W.

Livres reçus.

ROBICHAUD, BOISVERT et ROBERT : *Graphes de fluence* (Eyrolles, 1961, Paris ; prix : 47 NF).

Y. CROZES et E. GILET : *Algèbre*, Classe de Seconde, programmes 1960. Cours Cagnac et Thiberge (Masson, 1962).

G. GIRARD et A. LENTIN : *Géométrie ; Algèbre et Trigonométrie* (2 vol.). Cours Maillard, classes de 1^{re} A' C M M' (programmes 1961) (Hachette, Paris, 1962).

C. BRÉARD : *Mathématiques 2^e A B* (L'Ecole, Paris, 1962) ; *Mathématiques 1^{re} C M* (1^{er} fascicule) (L'Ecole, Paris, 1962).

Deux nouvelles monographies de l'Enseignement Mathématique :

N° 9 : *L'Arithmétique des corps quadratiques*, par Albert CHATELET (prix : 29 NF ou 27 francs suisses).

Cette monographie présente, de façon originale, les notions classiques de l'arithmétique des corps quadratiques : entiers du corps, idéaux, classes d'idéaux, groupe des classes d'idéaux, diviseurs de l'unité, et établit leurs propriétés essentielles. La

méthode d'exposition adoptée permet une détermination effective, par des calculs élémentaires, de ces différents éléments. Plusieurs tableaux donnent des exemples précis et complets de ces calculs.

L'exposé forme ainsi une initiation à l'arithmétique des corps algébriques, accessible à un licencié et même à un bon bachelier de Mathématiques Élémentaires.

Les spécialistes de l'arithmétique trouveront, dans cet ouvrage, des suggestions originales susceptibles de renouveler l'étude de l'arithmétique des corps de degré supérieur.

N° 10 : *Problèmes de mesures*, par H. CARTAN, J. DIXMIER, P. DUBREUIL, A. LICHNEROWICZ, A. REVUZ (prix : 12 NF ou 11 francs suisses).

Les Collègues trouveront dans ce volume la réunion des conférences organisées par l'A.P.M. en 19 . Leur rédaction a été revue et corrigée.

Volume des polyèdres, mesure des angles, théorie de l'intégration constituent la première et la plus importante partie de cet ouvrage.

Une étude sur le calcul tensoriel et ses applications à la géométrie et à la théorie de la Relativité restreinte représente une initiation au vaste domaine de la Physique mathématique.

Une conférence sur l'histoire du développement de l'algèbre depuis Galois et Abel complète ce travail.

Les commandes doivent être adressées au Secrétariat de *L'Enseignement Mathématique*, Institut de Mathématiques, Université, Genève ; le paiement peut s'effectuer soit au C.C.P. *L'Enseignement Mathématique*, Genève, I. 120 42, soit au C.C.P. F. Châtelet, Paris, 17.757.02.

AGREGATION MASCULINE DE MATHÉMATIQUES CONCOURS DE 1961

Rapport de M. l'Inspecteur général Dontot, Président du Jury

Le jury était composé de M. Dontot, Inspecteur général de l'Instruction publique, président ; de M. Couchet, professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier, vice-président ; de M. Roseau, professeur à la Faculté des Sciences de Lille ; de M. Lesieur, professeur à la Faculté des Sciences de Paris ; de M. Riche, professeur de Mathématiques Spéciales au lycée Saint-Louis ; de M. Chazel, professeur de Mathématiques Spéciales au lycée Louis-le-Grand.

Epreuves écrites

Elles ont eu lieu le lundi 15, mardi 16, jeudi 18 mai de 8 heures à 14 heures et le samedi 20 mai, de 8 heures à 12 heures. Pour la troisième fois, les épreuves écrites étaient celles prévues par les arrêtés du 31 juillet 1958, savoir :

- une composition de Mathématiques élémentaires et Spéciales ; durée : six heures ; coefficient 3 ;
- une composition d'Analyse ; durée : six heures ; coefficient 3 ;
- une composition de Mécanique ; durée : six heures ; coefficient 2 ;
- une composition de Mathématiques appliquées ; durée : quatre heures ; coefficient 2.

Cette dernière composition remplace les épreuves pratiques des concours antérieurs à 1959 : calcul numérique (coefficient 1) et épure (coefficient 1).

Le nombre des candidats inscrits est passé de 337 en 1960 à 383 en 1961 ; il a donc augmenté de 46 unités.

Le jury possède dans ses archives les résultats des concours depuis 1926. De 1926 à 1931, le nombre des candidats inscrits oscille entre 84 et 104 ; il dépasse 200 à partir de 1936. Retombé à 169 en 1952, il remonte lentement jusqu'à 234 en 1957, puis, plus rapidement, passe à 250 en 1958, 253 en 1959, 337 en 1960 et 383 en 1961. Il est possible qu'il avoisine 450 en 1962.

En 1926, le nombre des candidats qui renonçaient à subir les épreuves écrites, ou qui abandonnaient avant la fin de ces épreuves, était négligeable ; il n'en est plus de même actuellement pour des raisons que nous avons analysées dans le rapport de 1960.

Dans les trois dernières années, 18 % des candidats inscrits ont, chaque année, ou bien renoncé à se présenter aux épreuves écrites (12 % environ), ou bien abandonné au cours de ces épreuves. En 1961, il y avait 383 inscrits ; les correcteurs de la première composition ont reçu 337 copies et les correcteurs de la quatrième composition 314 copies seulement ; ces nombres correspondent aux pourcentages de défaillants habituels.

Entre 1959 et 1961, le nombre des inscrits à l'Agrégation masculine de Mathématiques est passé de 253 à 383, en augmentation de 130 unités ; le nombre de ces inscrits, qui ont remis au moins une composition, est passé de 225 à 337, il a donc augmenté de 112 unités, et celui des candidats, qui ont remis les quatre compositions

* Voir les énoncés des épreuves écrites, *Bulletin* 216 (p. 463).

écrites, est passé de 208 à 314, augmentant de 106 unités. Il n'est donc pas exagéré de penser que chacun des correcteurs recevra en 1962 une cinquantaine de copies à corriger de plus qu'en 1961. Avant de leur parvenir, ces copies sont centralisées au ministère où se fait le contrôle des copies, leur numérotage pour en assurer l'anonymat, l'envoi aux correcteurs ; ce travail délicat requiert des soins minutieux, de nombreux contrôles et vérifications et, par conséquent, demande d'autant plus de temps qu'il y a plus de copies à classer. Lorsque la correction est terminée, les notes attribuées à des copies jusque-là connues par leur seul numéro, c'est au jury qu'incombe un autre travail tout aussi délicat, nécessitant aussi des contrôles et des vérifications, pour reconstituer les listes nominatives des candidats et les notes méritées par chacune de leurs compositions. La signature de la liste des admissibles par M. le Ministre, la rédaction des convocations aux épreuves orales, la préparation de celles-ci demandent aussi beaucoup de temps et retardent d'autant plus la date des épreuves orales que le nombre des candidats est plus grand.

En 1961, les épreuves orales ont pu commencer le 29 juin ; l'effort demandé aux correcteurs s'est révélé trop considérable ; les marges de sécurité sont trop réduites. Il faudra vraisemblablement, en 1962, fixer une date beaucoup plus tardive pour le début des épreuves orales. Or, il existe pour l'Agrégation masculine de Mathématiques, et pour elle seulement, un problème très particulier de dates qui risque de rendre impossible l'organisation de ces épreuves. Les candidats normaliens de la rue d'Ulm se présentent à l'Agrégation à la fin de leur troisième année d'école et non à la fin de la quatrième année ; or, à la fin de cette troisième année, les élèves de la rue d'Ulm sont convoqués par l'autorité militaire pour une période I.M.O. (Instruction Militaire Obligatoire) et, en 1961, cette convocation les appelait dans les camps ou écoles aux dates des 10, 15 ou 16 juillet. Il n'a pas été possible, malgré les interventions de M. le Ministre, d'obtenir le changement de ces dates de convocations. Les candidats normaliens admissibles ont donc été convoqués pour les épreuves orales avant ces dates, ce qui n'a été possible que parce que les oraux ont commencé le 29 juin.

A cette difficulté majeure s'ajouterait naturellement celle qui serait due à la prolongation des épreuves orales jusqu'à une date imprévisible dans le courant du mois d'août. Pour ces deux raisons, nous avons le devoir de demander que le problème pratique de la répartition dans le temps de la correction des épreuves écrites et de l'organisation des épreuves orales soit mis d'urgence à l'étude. Le président du jury n'a pas les pouvoirs nécessaires pour le résoudre à lui seul.



Nous définirons, comme dans les rapports des années précédentes, les pourcentages caractérisant le concours de 1961, en ne dénombrant que les candidats ayant subi la totalité des épreuves écrites. Leur nombre a été de trois cent quatorze (314) en 1961 et de deux cent soixante-dix-sept (277) en 1960. Il a donc augmenté de 37 unités.

Cette augmentation porte sur les catégories suivantes :

	1960	1961	+	—
Professeurs en exercice dans les lycées	121	146	25	
Assistants et étudiants	46	74	28	
Elèves de l'E.N.S. Ulm	17	23	6	
Elèves de l'E.N.S. Saint-Cloud	21	17		4
Elèves de l'E.N.S.E.T.	16	13		3
Elèves des I.P.E.S. et C.P.R.	56	41		15
	277	314	59	22

On constate cette fois que l'augmentation du nombre des candidats résulte surtout de l'augmentation (25) du nombre des professeurs en exercice et du nombre des assistants et étudiants (28). Nous soulignons chaque année le double caractère de l'Agrégation, concours de recrutement proprement dit d'une part pour les élèves des Ecoles Normales Supérieures, les étudiants, assistants, élèves des I.P.E.S. et C.P.R., c'est-à-dire en 1961 pour 168 candidats et, d'autre part, concours de changement de catégorie pour les 146 professeurs en exercice qui s'y présentent. Nous nous étions inquiétés en 1960 du fait que le nombre des professeurs en exercice (121) allait en diminuant chaque année. Nous constatons qu'il tend de nouveau à augmenter. C'est un symptôme rassurant car il serait, à notre avis, regrettable que l'Agrégation ne demeure pas un concours accessible aux professeurs en exercice. Nous ne cessons de plaider pour l'amélioration, pour ces professeurs, des conditions de la préparation (cf. rapports des années précédentes).

*
**

Le jury s'est réuni pour la première fois au lycée Saint-Louis le lundi 26 juin 1961. Il a effectué le classement des candidats ayant remis au moins une copie.

La moyenne sur 20 exigée pour l'admissibilité avait été en 1960 de 7. Nous avons constaté que les totaux obtenus par des candidats de même rang en 1960 et en 1961 différaient en moyenne de 10 points sur 100 (la différence oscille entre 8 et 13 unités) ; les totaux les plus forts étant ceux de 1961. Il est donc vraisemblable que les sujets des compositions écrites ont été en 1961 mieux adaptés aux possibilités des candidats ; nous souhaitons évidemment que cette mise au point, cette humanisation du concours permettent à l'avenir d'exiger d'un candidat à l'Agrégation qu'il ait la moyenne aux épreuves écrites pour être admissible.

Nous n'en sommes pas encore là et le jury a proposé pour l'admissibilité les 107 candidats ayant obtenu au minimum 7,9 sur 20 pour l'ensemble des quatre compositions écrites. Le pourcentage des admissibles a donc été, comme en 1960, de 34 %. Parmi ces admissibles, on dénombre 22 professeurs en exercice et 85 étudiants. Le pourcentage des professeurs en exercice admissibles est de 15 % seulement (25 % en 1959, 23 % en 1960) et celui des étudiants de 50 % comparable aux pourcentages de 1960 (44 %) et de 1959 (53 %). Nous n'insisterons pas à nouveau sur les difficultés que trouvent les professeurs en exercice sur le chemin de l'agrégation ; ces difficultés augmentent tous les jours, parce que le recrutement des professeurs de lycées étant de plus en plus difficile, les tâches de ceux qui demeurent sont de plus en plus accablantes.

Un seul candidat a réclamé le bénéfice de l'ordonnance du 19 octobre 1958 prévoyant des mesures destinées à favoriser l'accès des Français musulmans d'Algérie à la fonction publique ; il a subi l'épreuve facultative de langue arabe, obtenu une majoration de points malheureusement insuffisante pour assurer son admissibilité.

Epreuves orales

La liste d'admissibilité ayant été publiée le 26 juin dans la soirée, les examens oraux ont pu commencer le 29 juin. Au cours de celles-ci, deux candidats nous ont fait connaître que, pour des raisons de santé, ils renonçaient à subir les épreuves orales. Les 105 candidats restants ont été répartis en quatre séries dont les appels ont eu lieu le 29 juin, le 6, le 13 et le 20 juillet au lycée Saint-Louis. Un candidat a renoncé, malgré nos avis, à subir les épreuves orales après avoir pris connaissance du texte de sa première leçon. Il n'y a eu aucun incident.

Nous renvoyons au rapport de 1960 pour tous renseignements sur l'organisation des épreuves orales en séries. Cette réforme a eu pour objet principal de réduire à une semaine la durée du séjour obligatoire à Paris de chaque candidat (au lieu d'un mois).

Résultats définitifs

Ils ont été proclamés au lycée Saint-Louis le mardi 25 juillet à 17 h. 30 et affichés aux lieux habituels. La liste des candidats nommés agrégés comportait 66 noms, parmi lesquels ceux de 22 anciens admissibles.

Trois candidats n'ont pas subi les épreuves orales : deux excusés pour cause de maladie et un troisième qui a renoncé après avoir pris connaissance du texte de sa première leçon. Les totaux des candidats admissibles ayant subi toutes les épreuves oscillent entre 117 et 315 (resp. en 1960 entre 117 et 318). Ont été proposés pour le titre d'agrégé tous ceux (66) dont le total était égal ou supérieur à 190.

Seize admissibles classés à l'écrit avec des numéros supérieurs à 66 (nombre des agrégés) figurent sur la liste des agrégés. Il y en avait 15 en 1960. Nous avons, dans les rapports antérieurs, commenté ce résultat, au caractère permanent, qui témoigne de l'importance, dans de nombreux cas décisifs, des épreuves orales dans le concours d'agrégation. Il est normal qu'il en soit ainsi ; un professeur, qu'il se destine à l'Enseignement ou à la Recherche, doit pouvoir faire un exposé clair, intelligemment composé et par conséquent limité, sur un sujet connu de lui, après une préparation suffisante. Il est regrettable de constater que certains candidats, ayant des connaissances très suffisantes, continuent à croire que c'est aux auditeurs à mettre de l'ordre dans les vérités qu'ils soumettent en vrac à leur attention ; l'une des tâches du professeur est de dégager d'un exposé l'essentiel, qui seul bien souvent a des chances d'être retenu.

*
**

La question des Agrégations et, d'une façon plus immédiate, le problème de la place des agrégés dans l'Enseignement et la Recherche sont à l'ordre du jour. Nous n'avons pas à l'examiner dans un rapport destiné à rendre compte à M. le Ministre des résultats du concours de 1961. Les problèmes du présent sont encore, et pour la dernière fois, de notre compétence ; les problèmes de l'avenir, lorsque les données en auront été précisées, seront de la compétence de nos successeurs.

Ce que nous pouvons dire, en conclusion de ce rapport, en conclusion aussi des huit rapports précédents que nous avons signés, c'est que le classement des agrégés, obtenu bien entendu par une addition qui traduit très brutalement les opinions plus nuancées des membres du jury, ne cause pas de surprise ; les bons candidats sont toujours à peu près aussi nombreux. D'une année à l'autre, les totaux pour un rang donné sont comparables ; en 1961, nous l'avons signalé, l'écrit a été jugé avec plus de libéralité ; il en résulte un décalage d'une dizaine de points entre ces totaux et, de ce fait, un allongement de la liste des agrégés.

Les modifications que des circonstances diverses ont obligé d'apporter aux conditions techniques du concours : nature et coefficients des compositions écrites, suppression de l'épure et du calcul numérique, institution de séries d'oral, ont parfois compliqué les tâches du jury, inspiré quelques regrets, mais n'ont pas altéré la précision du classement. La suppression de l'obligation jadis faite aux candidats de séjourner à Paris pendant toute la durée des épreuves orales a reçu une approbation unanime. Nous regrettons par contre l'obligation qui nous a été faite par l'augmentation du nombre des admissibles de constituer deux demi-jurys, l'un examinant les candidats en Mathématiques élémentaires, l'autre en Spéciales. Pour porter un jugement rassurant sur un candidat, il faut l'avoir entendu dans toutes les épreuves orales. Nous souhaitons donc très vivement que, s'il y a une réforme technique de l'Agrégation de Mathématiques, elle propose une autre solution du problème de l'oral.

Nous voulons, une dernière fois, exprimer notre gratitude d'abord aux membres des divers jurys que nous avons présidés depuis 1953, dont la confiance et l'amitié nous ont soutenu ; nous voulons aussi rendre hommage aux animateurs des excel-

lentes préparations organisées dans les Facultés sans oublier celle qui rend d'immenses services aux moins favorisés, organisée par le Centre National d'Enseignement par correspondance et Télévision, et enfin exprimer notre reconnaissance à l'Association des Professeurs de Mathématiques qui prend à sa charge les soucis et les frais de l'impression de nos rapports.

Statistique des résultats de l'agrégation masculine de Mathématiques
(Candidats ayant remis les quatre compositions écrites)
Session 1961

Professeurs en exercice

	CANDIDATS	ADMISSIBLES	REÇUS	Situation des agrégés au 1 ^{er} octobre 1961					
				E.N.I.	Lycées	Lycées techniques	S.M. Congés	C.N.R.S. 4 ^e année	Assistants
Ens. élém. et comp.	2	1	0						
Ens. moderne et class	109	11	7		6		1		
Enseign. Techn.	25	7	2			2			
S.M.	7	3	1				1		
Candid. étrangers.	3	0							
Totaux	146	22	10		6	2	2		

Etudiants - Assistants - C.P.R.

	CANDIDATS	ADMISSIBLES	REÇUS	Situation des agrégés au 1 ^{er} octobre 1961					
				E.N.I.	Lycées	Lycées techniques	S.M. Congés	C.N.R.S. 4 ^e année	Assistants
E.N.S. Ulm	23	23	21		3			10	8
E.N.S. St-Cloud ..	17	14	8	1	4			2	1
E.N.S. E.T.	13	10	4			4			
C.P.R.	41	4	3		2		1		
Etudiants. Congés	27	13	8		6		2		
Assistants	47	21	12		2				10
Totaux	168	69	56	1	17	4	3	12	19

	CANDIDATS	ADMISSIBLES	RECUS	E.N.I.	Lycées	Lycées techniques	S.M.	C.N.R.S. 4 ^e année	Assistants
Etudiants, Assist., C.P.R. I.P.E.S. Congés	168	85	56	1	17	4	3	12	19
Prof. en exercice.	146	22	10		6	2	2		
Totaux	314	107	66	1	23	6	5	12	19

RAPPORTS ANNEXES

A) COMPOSITIONS ECRITES

I. -- Composition de Mathématiques et Spéciales

(Rapporteur : M. Riche)

La première partie de cette épreuve comportait l'étude d'une famille de paraboles de foyer donné et admettant deux points donnés pour points conjugués. L'étude d'un problème corrélatif faisait l'objet de la deuxième partie. La troisième partie, consacrée à la géométrie projective, conduisait, par des moyens détournés, à la considération d'une famille de coniques, circonscrites à un triangle fixe, admettant deux droites données pour droites conjuguées.

Dans la première partie, l'équivalence des propriétés concernant les points A et B et leurs projections P et Q sur Δ a généralement été établie par le calcul. Neuf candidats sur dix ont correctement traité cette première question. En revanche, l'équivalence suivante, concernant les triangles ABC et A'B'C', n'a été présentée de façon convenable que dans une copie sur dix. Beaucoup de candidats ont réussi à montrer que si ABC est conjugué par rapport à la parabole, A'B'C' est pour celle-ci un triangle circonscrit. Les plus habiles ont vu là une conséquence immédiate du résultat précédent. D'autres ont formé l'équation de B'C' et l'ont « identifiée » à celle de la tangente au point de la parabole situé sur la parallèle, menée par A, à l'axe de cette parabole. Aucun de ceux qui ont utilisé cette dernière méthode n'a pu établir la réciproque. Dans la démonstration de cette réciproque, s'est généralement glissée une regrettable confusion de notations : ABC étant obtenu en menant par chaque sommet du triangle A'B'C' la parallèle au côté opposé, il s'agissait, par exemple, de vérifier que les symétriques de F par rapport aux côtés du triangle circonscrit A'B'C' étaient les projections orthogonales, sur Δ , des points A, B, C — projections notées antérieurement P, Q, R. Il était donc incorrect et dangereux de désigner, par ces mêmes lettres P, Q, R, les symétriques de F par rapport aux côtés du triangle A'B'C'. D'autres erreurs proviennent de l'emploi fantaisiste des symboles d'implication. A titre d'exemple, citons la faute suivante relevée dans de nombreuses copies :

BC est la polaire de A $\iff$ B'C' est tangente à la parabole.

Enfin, signalons que deux candidats ont su rattacher ces propriétés à celles des faisceaux linéaires tangentiels.

L'étude des paraboles φ faisait intervenir l'équivalence des propriétés suivantes :

- { A et le point I à l'infini de D sont conjugués par rapport à une parabole
 { de foyer F et de directrice Δ .

— { La projection orthogonale de A sur Δ appartient à la perpendiculaire X
 } menée par F à D .

Il s'agissait là d'une extension banale de l'équivalence mentionnée au début du premier paragraphe.

Dans le cas * où $A \notin X$, Δ enveloppe la parabole π , de foyer A , admettant X comme tangente au sommet. Evidemment, X et la perpendiculaire en F à FA sont des positions particulières de Δ auxquelles correspondent deux coniques impropres qui méritaient d'être signalées. Peu de candidats se soucient du cas exceptionnel où $A \in X$. L'enveloppe de Δ est alors impropre. On peut regretter que des questions aussi simples aient été pour certains l'occasion d'inquiétantes digressions sur les « faisceaux ». Les paraboles φ ne constituent ni un faisceau linéaire ponctuel, ni un faisceau linéaire tangentiel.

Le lieu du pôle de D a généralement été étudié par le calcul, notamment par ceux qui avaient déjà recherché l'enveloppe de Δ par ce procédé. Malgré la note et les recommandations préliminaires, peu de candidats tentent de situer ce lieu par rapport aux données. Quelle que soit la méthode utilisée, il convient ici encore de mentionner le cas où A appartient à X . Le lieu devient alors la conique impropre constituée par X et la parallèle à D menée par F .

Dans l'hypothèse où les droites FA et FB ne sont pas orthogonales, les directrices des paraboles θ apparaissent immédiatement comme tangentes à la conique, de foyers A et B , dont le cercle principal passe par F . L'orthogonalité des droites FA et FB entraîne une dégénérescence de l'enveloppe.

La deuxième partie comportait quatre questions. Le libellé de la dernière indiquait assez nettement qu'il convenait de traiter « directement » les trois premières.

Beaucoup de candidats ont reconnu le caractère projectif des propriétés concernant les triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ et, utilisant les coordonnées trilineaires, ont montré que si le triangle $\alpha\beta\gamma$ est conjugué par rapport à la conique ω , les points α' , β' , γ' appartiennent à ω . Malheureusement aucun n'a su, par une méthode analogue, démontrer la proposition réciproque. En fait, il convenait de dégager d'emblée une remarque importante : les triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ sont homologues. L'absence de cette remarque est presque toujours la cause de démonstrations lourdes qui tournent à la confusion dès que certaines lettres de l'énoncé prennent sous la plume du candidat des significations différentes de celles qui leur avaient été assignées. Ainsi, certains appellent α' le point d'intersection de b' et de la droite $F\alpha$ alors que, d'après l'énoncé, α' désigne le point commun aux droites b' et c' !

Pour montrer l'existence d'une infinité de cercles σ , on pouvait soit utiliser F_1 et déduire de β , pris arbitrairement sur a , les points α' , β' , γ' pour montrer finalement que les droites $F\alpha'$ et $\beta'\gamma'$ se coupaient sur b , soit extraire du faisceau d'axe radical b et de point de Poncelet β , pris arbitrairement sur a , un cercle passant par F . On mettait ainsi les cercles σ en correspondance bi-univoque avec les points de a , par exemple. Alors b' enveloppe la parabole de foyer F_1 tangente à a et à c' . La droite c enveloppe l'hyperbole, transformée de cette parabole par l'homologie mentionnée dans la question précédente. La représentation précise de cette hyperbole ne figure dans aucune copie. Peu de candidats se sont intéressés au lieu du centre du cercle σ . On pouvait géométriquement déterminer les asymptotes de ce lieu. Enfin, une transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle de centre F mettait en correspondance la famille des cercles σ et une famille de paraboles θ .

Peu de candidats ont abordé la troisième partie. Dans les deux premières questions, il s'agissait de vérifier des résultats explicitement mentionnés par l'énoncé. « En écrivant que... on trouve » est le mode d'expression trop souvent utilisé pour justifier ces résultats.

* La Rédaction s'excuse de devoir employer ce symbole défectueux $\notin$ pour exprimer « n'appartient pas à ».

La condition $BC(AA' - B^2) \neq 0$ ne figure, correctement expliquée, que dans cinq copies. Pour certains candidats, deux plans sont conjugués si (et seulement si !) tout point de l'un est conjugué de tout point de l'autre !

Il est douteux que plus de deux ou trois candidats aient réussi à former l'équation tangentielle de R sans le secours du résultat indiqué par l'énoncé. En l'absence d'idée directrice, quelque élimination providentielle conduit finalement au résultat. Ainsi, un candidat qui avait écrit que les plans polaires de deux points distincts de a contenaient b obtient l'équation de R après deux pages de calculs. La troisième question a donné lieu à quelques résultats exacts. Aucun candidat n'a abordé les deux dernières questions.

Résultats généraux

337 copies (au lieu de 291 en 1960) ont été soumises à correction. Ce nombre semble très voisin de celui à partir duquel il conviendra d'envisager un allongement de la période consacrée aux corrections.

La présence d'un lot important de copies mal présentées ou mal rédigées a rendu particulièrement pénible la tâche du correcteur qui, faute de temps, devra bientôt renoncer à déchiffrer les « brouillons » qui lui seront remis.

Les copies de tête ne sont qu'assez bonnes. Pour assurer un meilleur échelonnement des notes et conserver à l'épreuve l'importance que lui confère son coefficient, nous nous sommes imposé de répartir ces notes entre 0 et 54 (sur 60). Ainsi, soixante copies méritèrent une note supérieure ou égale à 30. Les meilleures notes (54, 51 et 48) sont suivies de 10 notes supérieures ou égales à 42, puis de 47 notes supérieures ou égales à 30. La moyenne générale est légèrement supérieure à 18. Celle des admissibles est voisine de 30.

II. -- Composition d'analyse

(Rapporteur : M. Lesieur)

Le problème comportait quatre parties dont le texte avait été rédigé pour qu'elles puissent être résolues, dans une large mesure, indépendamment les unes des autres. Les candidats ont en général suivi l'ordre proposé, ce qui était raisonnable. Parmi ceux qui ont commencé par la partie IV, on distingue aisément ceux qui ont effectivement travaillé cette question en premier lieu et qui ont pu obtenir des résultats honorables, et ceux qui ne l'ont abordée qu'en désespoir de cause après avoir échoué sur tout le reste. Dans ce rapport, je vais donner quelques indications sur les questions demandées et sur les résultats obtenus ; je n'entreprendrai pas la tâche de relever les bourdes des candidats notoirement insuffisants, mais je signalerai quelques fautes plus ou moins fréquemment commises.

I. La première partie est purement algébrique. Il s'agit d'étudier l'application linéaire définie dans l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée x et à coefficients réels, par :

$$P \rightarrow B_n(P) = \sum_{k=0}^{k=n} P \left(\frac{k}{n} \right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

1° a) Pour montrer que les polynômes :

$$E_k = x^k (1-x)^{n-k} ; k = 0, 1, \dots, n$$

forment une base de l'espace vectoriel P_n des polynômes de degré $\leq n$, il suffit de remarquer que la dimension de P_n est $n+1$, que les E_k sont en nombre $n+1$, et de démontrer qu'ils sont linéairement indépendants. La démonstration directe est ici la mieux accueillie, les résultats de la partie b venant seulement, si on y tient, en donner une confirmation par le calcul d'un déterminant.

On se contente souvent de démontrer l'indépendance linéaire des E_k sans noter qu'ils sont en nombre $n+1$: or, il ne suffit pas de prendre deux vecteurs indépendants d'un espace vectoriel de dimension 3 pour obtenir une base. A l'opposé, on

démontre souvent que les E_k sont indépendants et qu'ils forment un système de générateurs : ceci est en effet la définition d'une base, mais le fait que les vecteurs sont en nombre égal à la dimension dispense agréablement de l'une de ces propriétés, au choix. Enfin, fait beaucoup plus grave rencontré même dans des copies valables pour le reste : l'indépendance linéaire de $n + 1$ vecteurs n'est pas démontrée par l'indépendance linéaire de ces vecteurs pris deux à deux, trois vecteurs colinéaires distincts ne constituant pas une base de R^3 .

b) La formation de la matrice qui permet d'exprimer la base $\{E_k\}$ en fonction de la base $e_p = x^p$ s'obtient immédiatement en développant $(1 - x)^{n-k}$ par la formule du binôme. La matrice inverse s'obtient aussi facilement par le développement de $(1 - x + x)^{n-p} = 1$, suivi d'une multiplication par x^p . A défaut de la formule du binôme, il suffit de résoudre par rapport aux e_p le système qui donne les E_k en fonction des e_p . On trouve alors la matrice du triangle arithmétique de Pascal (renversé). L'application au cas $n = 3$ (et non au cas $n = 2$ comme certains étourdis le font) permettrait de voir si les formules générales avaient été comprises.

On apprécie ceux qui donnent des formules propres, en précisant bien la signification des lignes et des colonnes de la matrice, la disposition pouvant varier avec les auteurs. La formation de la matrice inverse a donné du souci à bien des candidats, et beaucoup ne l'ont pas trouvée, même en invoquant déterminants et cofacteurs.

2° a) On demande l'expression de $B_n(P)$ pour $P = 1, x, x^2$. Les deux premiers se calculent au moyen de la définition et on constate qu'ils sont invariants. Pour le troisième, il est déjà utile d'appliquer la formule (2) donnant $B_n(xP)$ en fonction de $B_n(P)$ et de sa dérivée. On demande aussi de vérifier la formule (3), utile dans la suite, et qui s'obtient aisément au moyen de $B_n(x)$ et $B_n(x^2)$.

Ces calculs ont été bien faits en général. On doit signaler cependant trop de longueurs dans certaines copies. Il est permis de trouver *au brouillon* le résultat $B_n(1) = 1$ au bout d'une page de calculs, mais je n'ai que faire de ce brouillon sur la copie définitive et il faut en rédigeant trouver une solution meilleure. Redisons à cette occasion que la rédaction et la présentation matérielle jouent un rôle important dans le jugement porté sur les candidats. Ce qui est bien compris s'énonce clairement et doit être présenté proprement. Je pense qu'un effort certain a été réalisé dans cette voie par la moitié des candidats. Mais il en reste encore un trop grand nombre dont la présentation est inacceptable : absence de marges, ponctuation omise, orthographe de hasard, saleté, gribouillages indignes de futurs professeurs et insolents pour les correcteurs.

b) Pour montrer que la restriction de l'application linéaire B_n à l'espace vectoriel P_d des polynômes de degré $\leq d$ est une application linéaire de P_d sur lui-même si $d \leq n$, l'important est de montrer qu'un polynôme de degré $\leq d$ se transforme en un polynôme de degré $\leq d$. Cette propriété n'est pas une conséquence immédiate de la définition, mais une application intéressante de la formule (2). On vérifie ensuite que le noyau de l'application est nul, ce qui démontre que l'application est injective. Il en résulte, l'espace étant de dimension finie, qu'elle est surjective et qu'elle réalise un automorphisme de l'espace vectoriel P_d , et une surjection de P_d sur P_n pour $d > n$.

Quelques-uns donnent une démonstration selon ces lignes directrices. D'autres démontrent directement que l'application est surjective, ce qui est très correct. Mais beaucoup oublient l'essentiel, qui est de démontrer que l'application se fait dans P_d et, parmi les autres, on omet souvent les précisions supplémentaires demandées par le texte.

II. La deuxième partie est de nature topologique, en introduisant l'espace C des fonctions réelles $f(x)$ définies et continues sur $[0, 1]$, considéré comme espace vectoriel sur R , normé par $\|f\| = \max |f(x)|$. On y étudie l'application B_n définie pour une fonction par extension de la formule donnée pour un polynôme.

1° a) La première question est une majoration charitablement proposée aux candidats pour les aider dans la question suivante, plus difficile. Elle a été généralement bien faite et on a constaté avec plaisir que certains expliquent bien ce qu'ils font en justifiant les inégalités écrites par le fait que les termes de la somme sont tous *positifs* ou nuls. L'interversion typographique de k et n dans la formule C_n^k ne pouvait gêner personne à cause des détails donnés dans le contexte sur la signification de k et n .

b) En s'aidant des résultats précédents, on démontre que, pour $f(x)$ donné, $B_n(f)$ converge vers f quand n augmente indéfiniment, uniformément par rapport à x . Cette question, et la façon dont elle a été présentée, opère à elle seule une sélection très valable des candidats. Certains observent à juste titre qu'elle fournit une démonstration du théorème de Weierstrass sur l'approximation uniforme d'une fonction continue sur $[0, 1]$ par une suite de polynômes. Un seul tente un essai valable pour établir la propriété demandée au moyen du théorème de Weierstrass, ce qui est parfaitement possible.

2° Les questions demandées ici avaient pour but de contrôler les notions de continuité dans les espaces métriques.

a) Le nombre φ de la majoration :

$$\|B_n(f)\| \leq \varphi \|f\|$$

peut être pris égal à 1.

b) La définition et les propriétés des applications φ et ψ précisées dans le texte ont en général été données correctement par ceux qui ont voulu s'en donner la peine.

c) Pour vérifier que les images par ψ des points de R^{n+1} qui satisfont à l'égalité $\text{Max}|a_k| = 1$ forment un sous-ensemble compact de P_n , il suffit de noter que l'image continue d'un compact dans un espace séparé est un compact. Cela a été fréquemment souligné. Pour montrer que ψ est un homéomorphisme de R^{n+1} sur P_n , il faut démontrer que ψ^{-1} est continue. Ceci est plus difficile et n'a été bien fait que par un petit nombre de candidats, soit directement, soit en faisant appel à leurs connaissances : si E et F sont deux espaces vectoriels normés sur R et si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.

III. Dans la partie III, on considère le cas particulier d'une fonction f continue et à variation bornée.

1° Si f est monotone non décroissante, il en est de même de $B_n(f)$. Cette propriété résulte immédiatement de la formule (5) donnée dans le texte, et par suite démontrée coûte que coûte par tous ceux qui ont eu le temps de l'aborder.

A cet endroit s'arrêtent un grand nombre de copies honnêtes gravitant autour de la note 10 sur 20 (voir statistique à la fin). Le barème donnait d'ailleurs un peu plus d'importance aux parties I et II qu'aux parties III et IV, de sorte qu'un candidat pouvait avoir la moyenne avec les deux premières parties traitées correctement, même avec quelques lacunes. Cela situe par conséquent le niveau des résultats du concours pour l'épreuve d'Analyse.

2° Une fonction continue à variation bornée sur $[0, 1]$ est la différence de deux fonctions continues f_1 et f_2 monotones non décroissantes sur $[0, 1]$. Comme les polynômes $B_n(f_1)$ et $B_n(f_2)$ sont monotones non décroissants (III, 1°) et convergent uniformément vers f_1 et f_2 quand n tend vers l'infini (II, 1°), toute fonction continue à variation bornée est la *différence des limites uniformes* de deux polynômes monotones (et également la *limite uniforme de leur différence*). La réciproque n'est vraie que sous la première forme, et le texte comportait à cet endroit une erreur de rédaction. Un certain nombre ont interprété la réciproque sous la forme correcte ; d'autres ont laissé fort justement la question en suspens. Naturellement, la partie directe a donné à elle seule le maximum des points du barème normal pour la question complète, les considérations sensées sur la réciproque ayant été payées à titre supplémentaire.

3° Dans cette question, on veut comparer la variation totale V_n relative à $B_n(f)$ à la variation totale V relative à f . Le sujet proposait comme méthode de prendre V_n sous la forme

$$V_n = \int_0^1 \left| \frac{dB_n(f)}{dx} \right| dx,$$

ce qui donne par application de la formule (5) fournissant $\frac{dB_n(f)}{dx}$:

$$V_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} n C_{n-1}^k I_k \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|$$

avec :

$$I_k = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-1-k} dx.$$

L'intégrale I_k se calcule par parties : $I_k = 1/n C_k^{n-1}$; d'où :

$$V_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq V.$$

Une dizaine de candidats ont pu mener ce calcul à bonne fin. Très peu ont su en déduire correctement que V est la limite de V_n pour n infini ; il fallait introduire un partage convenable P de $[0, 1]$, ainsi que la convergence uniforme de $B_n(f)$ vers f . Mais l'attention était dès lors tournée vers la partie IV.

IV. Cette partie pouvait être abordée directement, mais elle n'était pas cependant sans rapport avec les parties précédentes. Il s'agit cette fois d'une application linéaire de l'ensemble des suites, définie par :

$$s_n \rightarrow \sigma_n = \varphi_\lambda(s_n) = \sum_{k=0}^n C_n^k \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} s_k,$$

où λ est un nombre réel tel que $0 < \lambda \leq 1$.

1° Cette application fournit un procédé de convergence qui respecte la convergence ordinaire. Afin de l'établir, on proposait d'abord de vérifier :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} = 0.$$

Cela ne nécessite pas de grands moyens comme la formule de Stirling, mais une simple majoration de C_n^k par $n^k/k!$, ou encore l'étude de la série de terme général $C_n^k \lambda^k (1-\lambda)^{n-k}$ par la règle de d'Alembert. Je dois mentionner une démonstration erronée basée sur la relation (utile dans la suite) :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} = 1$$

et disant de façon vague : si une somme de termes est égale à 1 et si leur nombre augmente indéfiniment, chacun d'eux tend vers 0.

La convergence de s_n vers s entraîne celle de σ_n vers la même limite s . Il fallait en donner une démonstration irréprochable au moyen d'une majoration de $|\sigma_n - s|$. La convergence de σ_n n'entraîne pas celle de s_n ; le contre-exemple couramment donné est celui de la suite $s_n = (-1)^n$. Exceptionnellement, j'ai rencontré d'autres exemples, vrais ou faux.

2° Soit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^{k+1}.$$

En posant :

$$x = \frac{\lambda y}{1 - (1 - \lambda)y}$$

on peut développer x^{k+1} en série entière en y par élévation de $1 - (1 - \lambda)y$ à la puissance $-(k + 1)$ au moyen de la série du binôme. En portant dans la série qui donne $f(x)$ et en réordonnant en y , on obtient formellement

$$f(x) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n y^{n+1}.$$

Ce raisonnement est justifié par la *convergence absolue de la série double* de terme général :

$$u_{k,n} = \lambda C_n^k \lambda^k (1 - \lambda)^{n-k} y^{n+1} s_k$$

dans les conditions indiquées : $|y| < \frac{R}{\lambda + (1 - \lambda)R}$.

3° Les substitutions $y \rightarrow x = \frac{\lambda y}{1 - (1 - \lambda)y}$ forment, lorsque λ varie en res-

tant non nul, un groupe multiplicatif isomorphe au groupe multiplicatif R^* des nombres réels non nuls. En se limitant aux nombres réels λ vérifiant $0 < \lambda \leq 1$, on obtient un semi-groupe (et non un groupe !) laissant d'après la question précédente invariante la série convergente $f(x)/\lambda$. Il en résulte pour les applications φ_λ la relation :

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_{\lambda'} = \varphi_{\lambda\lambda'}$$

puis l'isomorphisme demandé. Quelques candidats, parmi les meilleurs, ont d'ailleurs remarqué que cet isomorphisme s'étend à un isomorphisme de groupe en considérant tous les réels non nuls, l'invariance de la série $f(x)/\lambda$ étant alors celui d'une série formelle. Enfin, ces excellentes copies ont su en déduire l'application demandée au cas $\lambda' \leq \lambda$; il suffit d'appliquer la relation $\varphi_{\lambda'} = \varphi_{\lambda'/\lambda} \circ \varphi_\lambda$ à s_n , ce qui donne $\sigma'_n = \varphi_{\lambda'/\lambda}(s_n)$ et par suite $\lim \sigma'_n = s$.

Statistique : La moyenne générale est de 7,2 sur 20. Les notes des 328 copies corrigées se répartissent conformément au tableau suivant dans lequel la première ligne désigne les intervalles de notes prises de 2 en 2 de 0 à 20 et la deuxième le nombre de copies ayant une note située dans cet intervalle :

notes :

0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20

nombre de copies :

23 60 59 56 37 36 25 17 9 6

Cette distribution fait apparaître une centaine de notes ≥ 10 , ce qui est sensiblement le nombre des admissibles, ainsi qu'un étalement suffisant pour affirmer que le problème a permis de classer les candidats.

III. -- Composition de Mécanique générale

(Rapporteur : M. Roseau)

Le problème de mécanique générale, présenté cette année à la curiosité de 317 candidats, comportait trois parties. Les deux premières proposaient quelques problèmes simples relatifs à des systèmes comportant plusieurs solides, soumis à des liaisons indépendantes ou dépendantes du temps, unilatérales ou non, avec ou

sans frottement, avec asservissement, etc... ; l'accent était mis sur la formation des équations du mouvement, et pour en faciliter l'écriture exacte et permettre de juger au mieux la qualité des connaissances mises en œuvre par les candidats, les difficultés de calcul avaient été volontairement très réduites.

La dernière partie, sensiblement plus difficile, prenait prétexte de l'étude d'un mécanisme comportant un grand nombre de pièces mobiles pour introduire un problème d'algèbre des matrices que nulle part on n'a vu abordé dans le cas général.

En dépit d'un barème indulgent, ayant notamment pour effet de ne tenir nul compte de la partie algébrique, les résultats obtenus sont dans l'ensemble fort modestes ; les meilleures notes sont 13 (3), 12 (4), 11 (5), 10 (10) sur un total maximum de 20.

De ces 22 candidats ayant obtenu une note supérieure ou égale à la moyenne, 20 ont été déclarés admissibles. La moyenne générale de l'épreuve est 4,2 sur 20.

M. ROSEAU.

IV. -- Composition de Mathématiques appliquées

(Rapporteur : M. Chazel)

Le sujet proposé consistait, dans une première partie, en une courte étude de convergence d'intégrales généralisées, d'existence de dérivées et de développements limités. La recommandation faite aux candidats de ne pas trop s'attarder sur ces questions indiquait clairement qu'elles devaient être traitées par des moyens très simples, mais non au préjudice de la précision et de la rigueur.

Dès le début, on note quelques accidents sérieux et une tendance à la complication ; certains, heureusement rares, semblent tout ignorer de la nature des inté-

grales $\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha}$; d'autres, par des intégrations par parties maladroites, introduisent des symboles qui n'ont pas de sens. La continuité, l'existence des dérivées successives de $f_\lambda(t)$ et $g_\lambda(t)$ sont assurées pour tout $t \neq 0$, puisque ces fonctions sont produits de fonctions indéfiniment dérivables ; une étude locale pour $t = 0$ suffit donc. Les développements en série entière de ces deux fonctions se révèlent un obstacle redoutable ; ils peuvent être obtenus soit en intégrant terme à terme les développements de $v^\lambda \sin vt$ et $v^\lambda \cos vt$, dont la convergence uniforme est presque évidente, soit, tout aussi simplement, par la formule de Mac Laurin, suggérée par le calcul, qui précède, des dérivées successives ; mais il ne faut pas oublier, ce qui est le cas neuf fois sur dix, d'étudier le terme complémentaire ; les connaissances des candidats sur ce point paraissent fragmentaires ; on se désintéresse même de la convergence.

Ces préliminaires trouvent leur emploi dès le début de la seconde partie. La variété des formes de $f(t)$, soulignée par l'énoncé, invite à quelque souplesse dans les calculs ; il faudra donc faire ses choix et de bons choix, et non suivre le premier chemin venu. On trouve ainsi des maladresses dès le 2°, alors que sur la première forme donnée, l'encadrement de $f(t)$ est presque évident, et que les conséquences sur les comportements de $f(t)$ et de $f'(t)$ pour t infini, sur les signes de $f(n\pi)$ et $f'(n\pi)$

en résultent sans phrase. La voie proposée pour déterminer le signe de $\varphi\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$,

donc celui de $f\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, n'est pas la seule, mais paraît la plus abordable. On obtient :

$$\varphi\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S_n(u) \cdot \sin u \, du, \text{ avec } S_n(u) = \sum_{i=0}^n \alpha_i$$

où $\alpha_0 = \sqrt{u}$ et, pour $p \geq 1$, $\alpha_p = (-1)^p [\sqrt{p\pi + u} - \sqrt{p\pi - u}]$.

On vérifie facilement que S_1 est positif si $u \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$, qu'il en est de même de $S_2, S_3, \dots, S_n$, enfin que $\forall n \in \mathbf{N}, \varphi\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) > 0$.

D'assez nombreuses inexactitudes entachent le calcul de $S_n(u)$; quand il est exact, les conclusions sont souvent hâtives, voire incorrectes; certains affirment, sans broncher, que le signe de $\varphi\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ dépend de la parité de n .

La question suivante n'offrait pas de difficulté sérieuse, mais exigeait quelque attention; $f(t)$ et $f'(t)$ prennent chacune des valeurs de signes contraires aux bornes de tout intervalle $I_n = [n\pi, (n+1)\pi]$ (n entier > 0); $f(t)$ a le signe de $\varphi(t)$ monotone dans chacun de ces intervalles; $f'(t) = \frac{1}{t^{5/2}} \int_0^{\pi/2} v^{3/2} \cos vt \, dv = \frac{1}{t^{5/2}} \psi(t)$, celui de $\psi(t)$, monotone dans chaque intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right]$. En particulier $f'\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ a le signe de $(-1)^n$. On en déduit que $f(t)$ a un zéro t_n dans tout intervalle I_n , que $f'(t)$ en a un aussi θ_n , et que :

$$n\pi < n\pi + \frac{\pi}{2} < t_n < \theta_n < (n+1)\pi \quad \text{si } n \text{ est impair}$$

$$n\pi < t_n < n\pi + \frac{\pi}{2} < \theta_n < (n+1)\pi \quad \text{si } n \text{ est pair}$$

Enfin, des conditions : $\sin \theta_n = \frac{3}{2} f(\theta_n)$ et $0 < (n+1)\pi - \theta_n < \frac{\pi}{2}$, on conclut que

$(n+1)\pi - \theta_n$, comme $f(\theta_n)$, tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. Cette étude est en général mal réussie, sauf peut-être en ce qui concerne le signe de $f(t)$; les maladroites sont fréquentes, les fautes de raisonnement aussi; il vaut mieux avouer, comme certains l'ont honnêtement fait, qu'on admet certains résultats partiels; mais il n'est pas possible, dans ce cas, d'obtenir, en le justifiant, le classement demandé.

Le calcul approché de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et de $f(\pi)$ était presque insignifiant, puisqu'il suffisait pour les obtenir, avec l'approximation voulue, de conserver les quatre premiers termes du développement de $f(t)$; il a pourtant été presque délibérément sacrifié; les candidats qui ont accepté d'y consacrer quelques instants se sont ainsi acquis un avantage de points qui n'était pas négligeable. Mieux vaut ne pas parler des tracés des courbes Γ, Γ_1 ou Γ_2 ; le peu que nous en avons vu était à peu près informe. La dernière question a été abordée par quelques candidats, traitée toujours de façon incomplète, mais partiellement valable.

En conclusion, les résultats de cette épreuve sont peu brillants, mais, à tout prendre, acceptables; la présentation est en général correcte; le style, très inégal, mérite plus d'efforts de la part de futurs professeurs ou même de professeurs en exercice. Attirons l'attention des candidats sur la nécessité de calculs propres et bien conduits, y compris le calcul numérique, au bas mot très négligé; insistons aussi sur la solidité des connaissances de base, particulièrement en analyse, où les notions de limite, de continuité, de convergence, de convergence uniforme ne devraient prêter à aucune faiblesse; il ne suffit pas d'user d'un langage savant, il faut en user à bon escient; tout faux pas en ce domaine ne peut qu'être sévèrement sanctionné.

314 copies ont été corrigées; la meilleure a obtenu 17 sur 20; suivent deux 16, un 15 1/2, deux 15; dix-neuf notes sont inférieures ou égales à 2; la plus fréquente est 8 (30 fois); la moyenne, 7,3.

B) EPREUVES ORALES

Leçons de Mathématiques Élémentaires

(Rapporteur : M. Riche)

Nous éviterons dans le présent rapport de présenter certaines observations ou de répéter les conseils qui figurent dans les rapports antérieurs. La plupart des observations qui suivent, comme celles qui font l'objet du rapport de 1960, sont relatives aux leçons de géométrie. Sans doute parce que la géométrie occupe, dans nos programmes, une place prépondérante mais aussi parce que, au niveau de la classe de Mathématiques, il n'est pas aisé, en cette matière, d'atteindre cette perfection à laquelle nous invitent les méthodes modernes.

— Quand il s'agit d'une leçon qui présente des difficultés certaines, le jury, porté à l'indulgence, peut tout de même exiger du candidat qu'il ait quelques idées précises sur l'enchaînement des axiomes et des théorèmes fondamentaux. Il est inadmissible de baser une théorie de l'orientation des trièdres sur la notion de déplacement quand on ignore tout des isométries.

— La présentation des isométries est délicate, mais celle des similitudes ne présente aucune difficulté théorique nouvelle. Néanmoins, les leçons relatives à la similitude plane ont été médiocres. Une similitude dans le plan π est une application bijective f telle que $\forall a, b \in \pi, d[f(a), f(b)] = k d(a, b)$, k étant une constante positive et $d(a, b)$ désignant la distance du point a au point b . Il existe de telles transformations puisque les isométries et les homothéties précédemment étudiées sont bien des similitudes. Les similitudes forment un groupe et l'on montre sans peine que toute similitude peut être considérée comme le produit d'une homothétie et d'une isométrie (ou comme le produit d'une isométrie et d'une homothétie).

a, b, a', b' étant quatre points donnés ($a \neq b, a' \neq b'$), il existe deux similitudes f telles que $a' = f(a), b' = f(b)$. Les « réductions » classiques des deux types de similitude résultent de cette importante proposition.

— La leçon relative aux faisceaux de cercles, elle aussi, embarrasse les candidats. Outre que le cas des cercles concentriques est généralement oublié, la définition que l'on donne est souvent hésitante et parfois incorrecte. Par exemple, le candidat qui appelle « faisceau d'axe radical D » tout ensemble de cercles tel que deux quelconques des cercles de cet ensemble admettent D pour axe radical ne semble pas soupçonner qu'un tel ensemble pourrait être fini. Il est commode, pour définir ce que l'on entend par faisceau d'axe radical D, d'introduire dans l'ensemble E des cercles du plan une relation R définie de la façon suivante : deux cercles vérifient la relation R, soit s'ils sont confondus, soit si, étant distincts, ils admettent D pour axe radical. On montre que cette relation binaire est une relation d'équivalence. On définit alors un faisceau d'axe radical D comme élément de l'ensemble quotient E/R . Bien entendu, on peut imaginer d'autres définitions. Par exemple, étant donnés deux cercles distincts, concentriques ou non, on peut appeler faisceau l'ensemble des cercles lieux de points dont le rapport des puissances aux deux cercles donnés est constant. Cette définition, moins souple que la précédente, n'oblige plus à traiter séparément les faisceaux de cercles concentriques et souligne le caractère « linéaire » de la famille.

— L'étude des cercles C orthogonaux à un cercle donné et tangents à une droite ou à un cercle donné doit faire ressortir le fait que ces cercles C sont généralement tangents à un autre cercle (ou droite) fixe. La recherche du lieu du centre doit constituer l'essentiel de la leçon. Si le temps le permet, on peut donner quelques indications sur les différentes manières de considérer une conique comme lieu de centres de cercles orthogonaux à un cercle donné et tangents à un cercle ou à une droite donnée.

— Dans une étude de la correspondance homographique sur un cercle, un candidat démontre l'existence de l'axe d'homographie lorsque les points doubles sont

réels et distincts. Il admet cette existence dans les autres cas. Rappelons que dans tous les cas cette existence peut être déduite du théorème de Pascal : Etant donnés six points cocycliques $ABCA'B'C'$, les points $\alpha = BC' \cap B'C$, $\beta = CA' \cap C'A$ et $\gamma = AB' \cap BA'$ sont alignés. Pour obtenir ce dernier résultat, il suffit de couper les faisceaux de droites (de même birapport) $[B'A, B'B, B'C, B'A']$ et $[C'A, C'B, C'C, C'A']$ respectivement par les droites AB et $A'C$: on obtient les divisions homologiques $(\gamma\beta\nu A)$ et $(\beta\nu CA')$.

— La détermination des tangentes et des asymptotes d'une hyperbole H définie par un foyer F , la directrice correspondante Δ et l'excentricité e , a été l'occasion d'explications confuses et de calculs peu convaincants dans la mesure où ils semblaient dépendre de cas de figures. Puisqu'il s'agit de limites d'éléments géométriques, il convient tout d'abord de choisir un paramètre.

Pratiquement, il semble commode d'utiliser les correspondances biunivoques, entre les points de Δ et ceux de H , obtenues en assujétissant la droite qui joint les points homologues à passer par un point fixe de l'hyperbole. Si l'on recherche la tangente en M_0 , ce point fixe est M_0 . S'il s'agit de la recherche d'une asymptote, ce point fixe est à l'infini. Il n'est pas question, en classe de Mathématiques, d'étudier la stabilité des limites obtenues par changement de paramètre.

— Les leçons concernant l'hyperbole « rapportée à ses asymptotes » ont toutes débuté par l'application d'un théorème de Poncelet au point T où la tangente en M coupe une asymptote pour finalement faire intervenir un quadrangle harmonique. Sans chercher à minimiser les vertus d'une telle méthode, nous voudrions attirer l'attention sur une présentation plus modeste qui semble ignorée bien qu'elle ne soit pas nouvelle. M étant un point de l'hyperbole de foyers F et F' ($MF - MF' = 2a$), soient H et H' les points de contact d'une tangente commune aux cercles de centres F et F' qui passent par M . On vérifie aisément qu'une asymptote est médiatrice de HH' et que $HH' = 2b$. I désignant le milieu de HH' et I' son symétrique par rapport à la droite FF' , $\overline{MI} \cdot \overline{MI'} = -b^2$, on établit facilement la réciproque, puis l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes. L'étude minutieuse de cette figure conduit à de nombreux résultats.

— Logiquement, la définition d'un faisceau harmonique de droites, en géométrie élémentaire, devrait suivre le théorème selon lequel la perspective d'une division harmonique est harmonique. On éprouve un certain malaise devant un énoncé tel que : « Si un faisceau est harmonique, il reste harmonique. »

— Enfin, signalons que dans une leçon sur les droites et plans parallèles, il convient de dégager les notions de direction (de droite ou de plan). Le parallélisme de droites doit pouvoir être considéré comme une relation d'équivalence. Une direction de droites est une classe d'équivalence.

— En ce qui concerne les leçons d'« algèbre », nous ne présenterons que peu d'observations nouvelles. Nous nous contenterons de deux remarques. La première est relative à l'étude des congruences dans l'ensemble N des entiers naturels. $a \equiv a' \pmod{p}$ signifiant que $a - a'$ ou $a' - a$ est divisible par p , l'explication des propriétés $a \equiv a'$ et $b \equiv b' \implies a + b \equiv a' + b'$ et $ab \equiv a'b'$ n'est pas aisée. En revanche, les démonstrations de ces mêmes propriétés ne présentent aucune difficulté si l'on remplace N par Z .

Notre deuxième remarque concerne l'équation $a \cos x + b \sin x + c = 0$. Après avoir examiné les cas particuliers $a = 0$ et $b = 0$, un candidat suppose $a \neq 0$ pour pouvoir introduire un angle α tel que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$, puis trouve la condition d'existence des solutions ($c^2 \leq a^2 + b^2$) sans remarquer qu'elle est encore valable si $a = 0$ et $b \neq 0$. En fait, il est préférable de supposer $a^2 + b^2 > 0$. Cette dernière hypothèse entraîne l'existence de α et de ρ tels que $a = \rho \cos \alpha$, $b = \rho \sin \alpha$ ($\rho \neq 0$) et l'équa-

tion peut alors s'écrire $\cos(x - \alpha) + \frac{c}{\rho} = 0$. Elle n'admet de solutions que si

$$\left| \frac{c}{\rho} \right| < 1.$$

— On observera que ce rapport contient plus de suggestions que de critiques. Il ne tend nullement à imposer certaines idées ou certaines méthodes. Son but serait atteint s'il pouvait constituer, pour les candidats aux prochains concours, une aide efficace dans leur préparation aux épreuves orales.

II. -- Leçons de Mathématiques Spéciales

(Rapporteur : M. Couchet)

Tout en recommandant aux candidats de lire attentivement les rapports antérieurs, nous rappellerons que beaucoup trop de leçons sont dépourvues d'exercices, pourtant, pédagogiquement indispensables. Nous soulignerons de plus que le choix de ces exercices et leurs solutions permettent très souvent aux candidats d'affirmer plus facilement leur maîtrise.

L'ordre suivi dans le présent rapport est celui du programme du concours.

— Une première leçon sur les nombres réels, exposée à partir des suites de Cauchy, a valu à son auteur une note honorable, elle aurait pu être excellente si les relations et les opérations sur les classes d'équivalences avaient été étudiées avec plus de précision. Dans la même leçon un autre candidat, qui a utilisé les coupures, a parlé aussi de la définition des nombres réels par les suites de Cauchy : son exposé lourd et incomplet a atteint péniblement la moyenne ; notons que l'on peut, dans cette leçon, signaler que le procédé employé pour définir les nombres réels à partir des nombres rationnels ne donne pas de nombres nouveaux quand on l'applique aux nombres réels. Enfin, parlant des ensembles des nombres réels, un candidat n'a pu démontrer correctement que tout ensemble majoré admet une borne supérieure et, quoique les applications aux suites monotones et aux intégrales impropres aient été acceptables, la note n'a pas atteint la moyenne.

— Si l'on veut parler de torseurs, dans l'étude des systèmes de vecteurs, il faut d'abord les définir d'une manière précise, passer à l'égalité de deux torseurs et alors seulement on pourra, sans risque de confusion, aborder les différentes opérations et aboutir à un espace vectoriel. Le candidat, qui a exposé cette question, a fait un mélange indigeste de toutes ces notions : la note a été inférieure à la moyenne.

— Etudier des applications de nombres complexes en se limitant à quelques exemples précis exige que chaque exemple soit traité complètement ; c'est ce que n'a pas fait un candidat qui, exposant cette leçon, a terminé en butant sur la condition nécessaire pour que quatre points soient sur une circonférence.

— En algèbre linéaire, le jury avait retenu onze leçons ; cinq ont été cotées nettement au-dessous de la moyenne car, tant sur le plan théorique que celui des applications, elles ne contenaient que peu de choses, telle cette première leçon sur les espaces vectoriels où le jury n'a pratiquement entendu que les définitions d'un espace et d'un sous-espace vectoriels. Cinq autres leçons, qui contenaient des exposés corrects mais de maigres exemples et quelques affirmations gratuites, ont valu à leurs auteurs des notes voisines de 12. Enfin, une très bonne leçon sur les formes linéaires qui, avec quelques exemples, aurait pu être excellente, a été cotée 17.

— La leçon sur le P.G.C.D. de deux polynômes aurait pu être très bonne si le théorème de Gauss avait été étudié ; mais comme le reste formait un ensemble correct, la note a été très honorable. Par contre, la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples a fait l'objet d'un exposé où les pôles imaginaires conjugués furent étudiés dans la confusion la plus complète et où les pôles multiples ne furent abordés que quelques minutes avant la fin de la leçon.

— La rubrique « Fonction d'une variable réelle » a fourni 25 leçons. Malgré les rapports précédents, les formes indéterminées n'ont pas fait l'objet de bons exposés. Les exemples, souvent sans liaisons, ont été traités d'une manière incertaine, un candidat a même passé une bonne partie de sa leçon à chercher par deux métho-

des la limite pour $x \rightarrow 0$ de $e^{\frac{1}{\sin^2 x}} - \frac{1}{\lg^2 x}$!

Dans un exposé sur les variations d'une fonction numérique d'une variable réelle, un candidat, qui a fait preuve de maladresse en dérivant plusieurs fois une expression algébrique dans le but d'étudier son signe (alors qu'après une mise en facteur évidente il suffisait d'une dérivation), a terminé en affirmant que cette expression changeait de signe quand la variable passait par un zéro ! Par contre, les leçons sur les fonctions continues sur un segment ont été traitées très convenable-

ment (14, 14, 16) et il en a été de même de l'étude de $\int_a^\infty f(x)dx$ (14, 15).

— L'étude des séries (douze leçons) a révélé de grandes faiblesses. Un candidat qui avait à étudier la série de Taylor a abandonné, après avoir cherché vainement à établir la formule correspondante. Dans le développement en série d'une fraction rationnelle, le rôle joué par les pôles a été à peine soupçonné et le candidat a abandonné l'étude d'un exemple simple alors que l'absurdité du résultat trouvé provenait d'une erreur dans le calcul des racines du dénominateur.

Par contre, une leçon sur la somme et le produit de deux séries absolument convergentes a été excellente. Le candidat a d'abord défini les opérations sur les séries pour aboutir à un anneau ; il a ensuite examiné le cas des séries convergentes puis absolument convergentes et, enfin, a fait l'application de la théorie aux séries entières.

— La recherche des enveloppes de circonférences d'un plan a fait l'objet d'une bonne leçon où, les définitions ayant été bien précisées, il a été facile de distinguer les points fixes et les courbes stationnaires ; la note très honorable aurait pu être excellente si les exemples donnés n'avaient pas été traités aussi superficiellement. Par contre, une leçon sur les enveloppes de droites n'a pas présenté les mêmes qualités et, comme les exemples traités l'ont été avec maladresse, $[(\lambda^2 + 1)x + (\lambda^2 - 1)y + 1 = 0$ dont le caractère linéaire n'a pas été soupçonné] : la note a été sévère.

— Un manque total de rigueur a marqué une leçon sur les coordonnées polaires faite par un candidat fort bien noté à l'écrit en Analyse : la note a été faible. Les exposés sur les branches infinies de $\rho = f(\theta)$ ont été corrects, mais la classification des différents cas n'a pas été assez nette.

— Les leçons portant sur la géométrie projective ont été assez faibles, c'est ainsi que le jury a pu entendre que « les correspondances involutives formaient un groupe » que « la correspondance homographique réduite à la forme $yy' = k$ (origines distinctes) était une inversion ». Heureusement, la leçon sur la notion d'espace projectif a été solide ; elle aurait été très bonne si l'étude du changement de base n'avait pas été aussi pénible.

— L'exposé sur la courbure des courbes planes a été médiocre : après avoir trouvé $\frac{d\vec{M}}{ds} = \vec{\tau}$, un candidat qui « dérive une deuxième fois pour voir ce que cela

va donner » cherchera, par la suite, la développée de l'ellipse en calculant le rayon de courbure. Sur la développée et les développantes d'une courbe plane, la leçon a été encore plus mauvaise (25 minutes de calculs maladroits pour obtenir la développée de la parabole) ; heureusement, la courbure des courbes gauches a été traitée avec méthode et précision par un candidat qui n'a péché que par manque d'exemples.

— En consacrant trente minutes à la construction de la strophoïde droite « qui n'a qu'un point double car son équation est du 3^e degré », un candidat n'a pu, mal-

gré un deuxième exemple, souligner les propriétés des courbes algébriques. Pour une courbe algébrique, l'ordre de la courbe, l'ordre d'un point ont des caractères projectifs, le candidat invité à parler des courbes algébriques planes en géométrie projective n'a pas semblé le soupçonner et s'est borné à une étude théorique très superficielle appuyée, une fois encore, sur l'exemple de la strophoïde droite.

— Dans la génération de coniques par l'intersection de droites en correspondance homographique, un candidat, qui a utilisé très longuement que par cinq points dont trois non alignés passe une conique non décomposée et une seule, n'a pu faire de réponse satisfaisante quand le jury lui a demandé la démonstration de la proposition utilisée. Par contre, la leçon sur la décomposition en carrés des formes quadratiques a été très bonne ; la partie théorique, basée sur l'étude des formes bilinéaires, a été très soignée, ce qui n'a pas empêché l'auteur de traiter, avec exemples à l'appui, tout ce qui est nécessaire à la pratique de la décomposition.

— Une leçon sur le changement du système de référence a été correcte dans sa partie théorique, mais n'a comporté comme application que le calcul de l'accélération en coordonnées polaires : c'est peu. Les candidats qui ont traité le mouvement plan sur plan n'ont pas souligné que le centre instantané de rotation est indépendant de la loi horaire. Signalons d'autre part qu'il est indispensable, dans l'étude de cette question, de distinguer trois points qui coïncident à l'instant t si l'on ne veut pas faire de confusion par la suite. Enfin, dans l'étude analytique, se référer toujours au plan fixe est une source de complications.

— La leçon sur les cônes circonscrits à une même sphère n'a pas eu de succès. Elle a été traitée une première fois par un candidat qui a seulement démontré que l'intersection était formée de courbes planes et si, la deuxième fois, le candidat a poussé un peu plus loin l'étude de cette intersection, ni l'un ni l'autre n'ont pu parler des bases de Monge.

CONCOURS D'ADMISSION DANS LES CENTRES PEDAGOGIQUES REGIONAUX * MATHEMATIQUES 1961

Le Jury féminin et le Jury masculin ont encore proposé cette année le même jeu d'épreuves écrites, malgré son adaptation inégale aux besoins de chacun d'eux ; cette disposition cessera en 1962, mais elle justifie pour 1961 la présentation d'un rapport unique relatif aux opérations des deux Jurys.

I. Concours normal

	<i>Candidats</i>	<i>Candidates</i>
	—	—
Inscrits	31	24
Présents à la 1 ^{re} composition	24	20
Présents à la 2 ^e composition	23	20
Présents à l'oral	22	20

Les candidats qui ont remis les deux épreuves écrites ont été déclarés admissibles d'office ; ceux qui ont subi les épreuves orales ont été proposés pour l'admission d'office, le concours ne devant opérer qu'un classement, et non une sélection.

Pour la 1^{re} composition (Algèbre et Trigonométrie), les 24 candidats ont obtenu :

- 5 notes au-dessus de la moyenne, de 13,7 à 10,3 ;
- 18 notes au-dessous de la moyenne, de 8,3 à 0.

Les 20 candidates ont obtenu :

- 1 note égale à la moyenne ;
- 19 notes au-dessous de la moyenne, de 7,5 à 2,5.

Pour la 2^e composition (Géométrie), les 23 candidats ont obtenu :

- 6 notes au-dessus de la moyenne, de 13,2 à 10 ;
- 19 notes au-dessous de la moyenne, de 7,5 à 1,5.

Les 20 candidates ont obtenu :

- 2 notes au-dessus de la moyenne, 10,5 et 10 ;
- 18 notes au-dessous de la moyenne, de 9,5 à 1.

Pour les exposés, les 22 candidats ont obtenu :

- 14 notes au-dessus de la moyenne, de 18 (deux fois) à 11 ;
- 8 notes au-dessous de la moyenne, de 9 à 0.

Les 20 candidates ont obtenu :

- 7 notes au-dessus de la moyenne, de 18 à 10 ;
- 13 notes au-dessous de la moyenne, de 9 à 0.

Pour les interrogations, les 22 candidats ont obtenu :

- 10 notes au-dessus de la moyenne, de 15 à 10 ;
- 12 notes au-dessous de la moyenne, de 9 à 1.

Les 20 candidates ont obtenu :

- 10 notes au-dessus de la moyenne, de 18 à 11 ;
- 10 notes au-dessous de la moyenne, de 9 à 4.

* Voir les énoncés des épreuves écrites dans le *Bulletin* 216 (p. 505).

Moyennes générales. Elles s'échelonnent de la manière suivante :

Pour les candidats :

Du n° 1 au n° 8, de 12,9 à 10,2 ;

Du n° 9 au n° 22, de 9,4 à 3,4.

Pour les candidates :

Du n° 0 *bis* au n° 1, de 12,7 à 10,2 ;

Du n° 2 au n° 19, de 9,9 à 2,6.

II. Candidats des Ecoles Normales Supérieures

Candidats. — Aucun candidat n'est en provenance de la rue d'Ulm. St-Cloud fournit 3 inscrits, dont un seul se présente ; dispensé des épreuves écrites, ses notes d'oral sont 19 pour l'exposé, 18 pour l'interrogation.

Candidates. — Aucune candidate n'est en provenance de Sèvres. Fontenay fournit 11 candidates, dont 10 se présentent à l'oral ; leur moyenne générale va de 16 à 7,5, 7 candidates dépassant la moyenne.

III. Candidats et candidates en provenance des I.P.E.S. et ayant acquis leur licence, soit en deux ans, soit en trois ans, antérieurement à 1961

Ces candidats et candidates sont dispensés des épreuves écrites, et ils sont admis d'office dès qu'ils se présentent aux épreuves orales, quelle que soit la valeur de ces épreuves.

Les candidats sont inscrits au nombre de 114 ; 18 font défaut ; 96 passent les épreuves ; ils obtiennent les notes suivantes :

Pour l'exposé :

47 notes au-dessus de la moyenne, de 18 à 10 ;

49 notes au-dessous de la moyenne, de 9 à 1.

Pour l'interrogation :

46 notes au-dessus de la moyenne, de 17 à 10 ;

50 notes au-dessous de la moyenne, de 9 à 1.

Les candidates sont inscrites au nombre de 89 ; 4 font défaut ; 85 passent les épreuves ; elles obtiennent les notes suivantes :

Pour l'exposé :

38 notes au-dessus de la moyenne, de 19 à 10 ;

47 notes au-dessous de la moyenne, de 9 à 0.

Pour l'interrogation :

44 notes au-dessus de la moyenne, de 19 à 10 ;

41 notes au-dessous de la moyenne, de 9 à 1.

IV. Candidats et candidates en provenance des I.P.E.S. inscrits conditionnellement, et ayant achevé leur licence en trois ans lors de la session de juin 1961

Les candidats et candidates passent les épreuves orales dans les mêmes conditions que les candidats normaux de la catégorie III ci-dessus, mais ils n'ont consacré à peu près aucun moment à la préparation de ces épreuves, pour être restés avant tout soucieux du succès à la licence, dont ils avaient à compléter un, deux, voire trois certificats, en juin 1961.

Les candidats ayant régularisé leur licence sont inscrits au nombre de 76 ; un candidat seulement fait défaut ; 75 passent les épreuves, ils obtiennent les notes suivantes :

Pour l'exposé :

16 notes au-dessus de la moyenne, de 17 à 10 ;
59 notes au-dessous de la moyenne, de 9 à 0.

Pour l'interrogation :

20 notes au-dessus de la moyenne, de 16 à 10 ;
55 notes au-dessous de la moyenne, de 9 à 0.

Les candidates ayant régularisé leur licence sont inscrites au nombre de 56 ; 2 candidates seulement font défaut ; 54 passent les épreuves ; elles obtiennent les notes suivantes :

Pour l'exposé :

22 notes au-dessus de la moyenne, de 19 à 10 ;
32 notes au-dessous de la moyenne, de 9 à 0.

Pour l'interrogation :

27 notes au-dessus de la moyenne, de 19 à 10 ;
27 notes au-dessous de la moyenne, de 9 à 0.

Résultats généraux des candidats et candidates en provenance des I.P.E.S.

Les moyennes s'échelonnent de la manière suivante, dans le classement unique des candidats des deux catégories III et IV :

Candidats :

Du n° 1 au n° 55, moyennes de 17 à 10 ;
Du n° 56 au n° 171, moyennes de 9,5 à 1.

Dans les 43 rangs constituant le premier quart de la liste, il y a 33 candidats normaux pour 10 candidats conditionnels ; au-delà, la répartition devient à peu près équilibrée :

Candidates :

Du n° 1 au n° 61, moyennes de 19 à 10 ;
Du n° 62 au n° 139, moyennes de 9,5 à 0,5.

Dans les 34 rangs constituant le premier quart de la liste, il y a 24 candidates licenciées pour 10 candidates conditionnelles ; au-delà, la répartition est équilibrée.

V. Observations générales

Les candidats en provenance des I.P.E.S. ont fait preuve, en assez grand nombre, d'une désinvolture regrettable à l'égard du Concours et même à l'égard du Jury ; que, sur 30 défaillants, 13 n'aient pas daigné s'excuser en est une preuve évidente ; que, sur les 171 présents, il ait fallu attribuer 15 fois la note 1 et 12 fois la note 0, dans des épreuves élémentaires portant sur les programmes en vigueur dans les lycées et choisies de façon à écarter tout besoin d'érudition, cela prouve que trop de candidats n'ont fait aucun effort et n'ont compté que sur la reconduction en 1961 de la mesure de faveur qui privait le Jury de toute possibilité d'élimination en 1960 ; pour eux, la paresse est payante, ou bien l'inconscience.

Encore pouvait-on dire, en 1960, que les candidats ainsi admis dans les C.P.R., sans mérite de leur part, trouvaient au cours de leur année de stage une ambiance particulièrement favorable, avec les exemples et les conseils de professeurs hautement qualifiés qui leur faisaient prendre goût à l'enseignement et, surtout, leur fai-

saient apprendre les rudiments de Mathématiques élémentaires indispensables pour commencer à enseigner. C'était là l'excuse à la bienveillance extrême que le Jury n'avait jamais cessé de témoigner aux candidats depuis 1952 ; ce « chèque en blanc » tiré sur les C.P.R. avait toujours été honoré par les Centres, et le nombre des échecs aux épreuves pratiques à l'issue du stage s'était toujours montré infime.

Sans doute risque-t-il de n'en être plus de même en 1962, car un certain nombre de stagiaires ont été amenés à renoncer de façon totale ou partielle à leur stage et se sont vus privés de ces exemples, de ces conseils, de cet enseignement complémentaire indispensable ; il est à craindre qu'ils ne puissent recevoir dignement la charge d'enseigner en classe de Mathématiques élémentaires, comme on sera bien forcé de le leur demander, et comme leurs devanciers savaient s'en acquitter avec honneur, parfois même avec brio ; bref, le Jury peut redouter le handicap qui va peser sur eux, pour n'avoir été ni sélectionnés d'abord, ni formés ensuite ; aussi est-il amené à émettre le vœu que puissent être éliminés sur sa proposition les candidats dont la moyenne générale infime, de l'ordre de 0 ou de 1, tend à prouver qu'ils n'ont pas pris au sérieux leur tâche de candidats et qu'ils ne sauront pas faire face à leur tâche enseignante de l'avenir.

Cela dit, le Jury est heureux de signaler l'excellente qualité de candidats et de candidates, en nombre supérieur à celui des années précédentes ; six inscrits au concours ont été admis à l'Agrégation, trois d'entre eux s'étaient désistés légitimement, trois ont tenu à passer les épreuves du C.A.P.E.S.

L. THIBERGE, G. CAGNAC.

Inspecteurs généraux de l'Instruction Publique.

Annexe

Nous donnons dans cette Annexe un bref commentaire des épreuves écrites du concours, ainsi que la liste des exposés proposés aux candidats au cours de cette session ; nous croyons devoir rappeler que les épreuves portent sur le programme des classes du Premier et du Second Cycle des lycées, en vigueur l'année du concours, et que, lors de la session prochaine de 1962, les programmes nouveaux seront enseignés jusqu'en classe de Première inclusivement.

Première composition de Mathématiques

La première partie du problème concerne une résolution de triangle, destinée à montrer l'intérêt qui s'attache à l'introduction de l'expression

$$\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{A}{2}} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2} \right).$$

La seconde partie s'appuie sur une interprétation géométrique ; elle fait observer que si l'on pose

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2} + \operatorname{tg} \frac{b}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2}}, \text{ l'on a } \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{a}{2}} \times \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{b}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{b}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{c}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{c}{2}}$$

puis elle fait étudier dans l'ensemble des arcs $-\pi < x \leq \pi$ la loi de composition interne ci-dessus définie $c = a * b$, avec la structure de groupe commutatif, l'associativité étant interprétée par le théorème de Pascal ; on établit enfin les formules

$$\cos(a * b) = \frac{\cos a \cos b}{1 + \cos a \cos b}, \quad \sin(a * b) = \frac{\sin a + \sin b}{1 + \cos a \cos b}$$

qu'on applique à la résolution de certains types d'équations trigonométriques.

La fin du problème peut se ramener à la précédente ou se traiter d'une façon indépendante ; à un angle donné V elle associe les triangles T dont les trois angles A, B, C se transforment par les formules telles que $\left(\frac{\pi}{2} - A\right) * \left(\frac{\pi}{2} - A'\right) = \left(\frac{\pi}{2} - V\right)$ en trois angles A', B', C' qui soient aussi les trois angles d'un triangle T' ; on examine une condition de possibilité et une réciproque ; on démontre enfin que les formules

$$\frac{\sin A_1}{1 + \cos A_2} = \frac{\sin B_1}{1 + \cos B_2} = \frac{\sin C_1}{1 + \cos C_2} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin A_2}{1 + \cos A_1} = \frac{\sin B_2}{1 + \cos B_1} = \frac{\sin C_2}{1 + \cos C_1}$$
 caractérisent deux triangles T_1 et T_2 tels qu'ils puissent être mis en correspondance au moyen d'un angle V convenable de la façon indiquée ci-dessus.

Seconde composition de Mathématiques

Le texte propose l'étude des axes des rotations dans lesquelles deux droites données non coplanaires D et D' sont homologues ; ce sont les génératrices rectilignes d'un parabolôïde hyperbolique S , qui est aussi le lieu des points équidistants de D et D' . Le but du problème est de trouver élémentairement les sections de ce parabolôïde S par un plan perpendiculaire à l'axe ou parallèle à l'axe.

La première partie du problème se limite à des questions préliminaires simples de géométrie plane, dont certaines trouveront leur utilisation par la suite.

Les génératrices G et G_1 du parabolôïde S s'introduisent dans la seconde partie, à partir de la figure plane initiale. On montre que l'égalité des distances à D et D' est une propriété caractéristique des points de S qui permet de trouver, en utilisant un résultat de la première partie, l'hyperbole équilatère section de S par un plan perpendiculaire à l'axe.

Dans la troisième partie du problème on exploite le fait qu'on peut, sans modifier la surface S , remplacer le couple D, D' qui la détermine par une infinité d'autres couples (convenablement formés parmi les génératrices d'un conoïde de Plücker). Pour la recherche de la section de S par un plan R parallèle à l'axe, un choix judicieux du couple et la substitution à S d'un autre parabolôïde Σ ayant même section par le plan R permettent finalement d'utiliser dans des conditions intéressantes la propriété d'équidistance établie dans la seconde partie, et de se ramener à une propriété élémentaire de la parabole.

LIBELLE DES EXPOSES

Arithmétique

192 exposés ; le chiffre indiqué entre parenthèses devant chacun d'eux indique combien de fois il est revenu, parfois avec quelques variantes ; l'énoncé donné ci-dessous a parfois dû être abrégé.

- (2) *La division des nombres entiers* : quotient entier et reste.
(et technique opératoire).
- (2) *Restes de la division d'une somme, d'une différence, d'un produit par un entier.*
Dégager la notion de congruence. Applications (autres qu') à la recherche des caractères de divisibilité par 9, 11...
- (3) *Diviseurs communs à 2 nombres entiers* ; P.G.C.D. ; applications.
N. B. — Les nombres premiers n'ont pas été traités.
- (2) *Multiples communs à 2 ou plusieurs entiers* ; P.P.C.M.
N. B. — La décomposition en facteurs premiers est ultérieure.
- (4) *Nombres premiers* : définition, propriétés élémentaires.
N. B. — La décomposition en facteurs premiers est hors du sujet.

- (4) *Décomposition d'un entier en un produit de facteurs premiers* ; applications.
N. B. — P.G.C.D. et P.P.C.M. sont supposés acquis.
- (3) *Notion de système de numération* : définition, propriétés, exemples.
N. B. — Les techniques opératoires dans le système décimal sont hors du sujet.
- (2) *La notion de fraction*.
N. B. — Cet exposé se situe au niveau des exigences logiques du candidat.
- (1) *Fractions décimales ; nombres décimaux*.

Algèbre et Analyse

- (2) *Premier exposé concernant l'introduction des nombres relatifs*.
N. B. — Cet exposé se situe au niveau des exigences logiques du candidat.
- (3) *Monômes et polynômes à une ou plusieurs variables* : définition, identité, addition et multiplication, propriétés.
- (2) *Résolution et discussion d'un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues*.
- (1) *Somme et produit des racines d'une équation du second degré*. Recherche de 2 nombres connaissant leur somme et leur produit. Applications.
- (1) *Principe de la résolution de 2 équations entières à 2 inconnues x, y figurant symétriquement*. Exemples, applications.
- (3) *Principes de résolution d'une équation de la forme $\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)} = C(x)$ où A, B, C sont des fonctions données de x* .
- (3) *Racine n° d'un nombre positif ; fonction $y = \sqrt[n]{x}$; variation (dérivée) ; courbe représentative*. Formule $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$.
- (3) *Notion de dérivée d'une fonction d'une variable* : nombre dérivé, interprétation graphique, contre-exemples ; fonction dérivée, son signe.
- (4) *Différentielle d'une fonction d'une variable*.
N. B. — On suppose acquise la dérivation d'une fonction de fonction.
- (4) *Dérivée de la racine carrée d'une fonction dérivable*.
Variation d'une fonction de la forme $y = A(x) + \sqrt{B(x)}$.
- (2) Fonctions $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ ($aa' \neq 0$).
N. B. — Des exemples numériques peuvent suffire.
- (2) Fonctions $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ ($aa' \neq 0$).
N. B. — Des exemples numériques peuvent suffire.
- (3) *Notion de fonction primitive*. Application au calcul des aires planes.
- (3) *Fonction $y = \text{Log } x$ définie comme primitive de $\frac{1}{x}$ qui s'annule pour $x = 1$* .
Variations, courbe représentative. Formule $\text{Log } ab = \text{Log } a + \text{Log } b$.
- (3) *Fonction $y = \exp(x)$ définie comme fonction réciproque de $\text{Log } x$* .
Formule $\exp(a + b) = \exp a \cdot \exp b$. Notation e^x .
- (1) *Exposé des applications des fonctions logarithmique et exponentielle dans le cadre du programme de Sciences expérimentales*.
- (2) *Progressions géométriques* : étudier en particulier la somme des n termes d'une progression quand n augmente indéfiniment. Applications.
- (3) *Les combinaisons simples* :
Applications autres qu'au calcul des probabilités (ou : qu'à la formule du binôme).

(3) *Formule du binôme :*

Applications autres qu'au calcul des probabilités.

(3) *Probabilités simples ; applications.*

N. B. — L'analyse combinatoire et la formule du binôme ont été étudiées.

Trigonométrie et Cinématique

(1) *Inéquation $\sin x > a$: résolution, discussion. Application à une inéquation de la forme $A \sin^2 x + B \sin x + C > 0$ (A, B, C fonctions linéaires d'un même paramètre).*

(3) *Valeurs approchées de $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$, soit $x, 1 - \frac{x^2}{2}, x$ quand x est un petit angle exprimé en radians. Tables « S » et « T ».*

(2) *Limite $x \rightarrow 0$ de $\frac{\sin x}{x}$. Dérivée de $\sin x$, de $\sin(ax + b)$.*

Exemple numérique de variation d'une fonction comportant une fonction circulaire.

(2) *Résolution et discussion de $a \cos x + b \sin x = c$.*

Applications. Interprétations géométriques diverses.

(2) *Système de deux équations, l'une étant $x - y = a$,*

l'autre $\frac{\sin x}{\sin y} = k$ ou $\frac{\cos x}{\cos y} = k$ ou $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = k$;

on proposera des exemples n'entraînant pas l'usage des tables.

(1) *Système de deux équations, l'une étant $x + y = a$,*

l'autre $\sin x \sin y = b, \cos x \cos y = b, \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b$.

(1) *Relations trigonométriques du triangle quelconque :*

$$\text{I } \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} ; \\ A + B + C = \pi \end{array} \right. ; \quad \text{II } \left\{ \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{array} \right.$$

et passage algébrique d'un système à l'autre ($a, b, c > 0$; $0 < A, B, C < \pi$).

(2) *Vecteur-vitesse et vecteur-accélération dans un mouvement curviligne ; applications au mouvement circulaire uniforme.*

(3) *Mouvement vibratoire simple : sa relation avec le mouvement circulaire uniforme ; composition de mouvements de même période et même support.*

Géométrie dans le plan et dans l'espace

(2) *Trièdres supplémentaires : définition, propriétés, applications.*

(1) *Le théorème de Thalès dans le plan et dans l'espace. Applications aux propriétés de la multiplication d'un vecteur libre par un scalaire.*

(2) *La notion de vecteur : vecteurs liés, glissants, libres. Opérations (sauf la projection des vecteurs).*

(1) *Projection d'un vecteur sur une droite ou sur un plan ; propriétés de la projection relativement aux opérations sur les vecteurs.*

(1) *Perpendiculaire commune à deux droites : étude géométrique ; représentation en géométrie cotée. Applications.*

(2) *Conservation éventuelle de l'angle droit en projection orthogonale ; applications en géométrie pure ou descriptive.*

(3) *Produit de deux homothéties ; applications dans le plan et dans l'espace.*

(1) *Le volume de la pyramide.*

(3) *Arcs orientés d'un même cercle* ; formule de Chasles ; milieux d'un arc.

(2) *Angles orientés de droites, de vecteurs* dans le plan.

Lieux $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \alpha$, $(MA, MB) = \alpha$. Applications.

(4) Lieu $\frac{MA}{MB} = k$ ($k \neq 1$). Applications dans le plan et dans l'espace.

(1) *Transformation de $MA^2 + MB^2$* . Lieu $MA^2 + MB^2 = a^2$. Exemples.

(2) *Relation harmonique entre quatre nombres, entre quatre points d'une droite.*

N. B. — La projection d'une division harmonique est hors du sujet.

(3) *Faisceau harmonique de droites* ; polaire d'un point par rapport à deux droites ; applications.

(3) *La notion d'antiparallélisme* ; applications.

N. B. — Les propriétés des angles de droites sont connues.

(3) *Points conjugués par rapport à un cercle* ; polaire d'un point ; pôle d'une droite ; applications.

(1) *Points conjugués par rapport à une sphère* ; plan polaire d'un point ; droites conjuguées. Applications.

(3) *Les cercles orthogonaux dans le plan.*

(2) *Faisceaux linéaires de cercles* : définition, propriétés, applications.

(2) *Différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles* ; applications.

N. B. — L'étude des éléments radicaux de 2 ou 3 cercles ou d'un faisceau est supposée faite.

Géométrie des transformations

(2) *Notion de figures égales, de figures isométriques inégales.*

(1) *La rotation considérée comme transformation ponctuelle* dans le plan. Définition. Applications à un lieu et à une enveloppe.

(1) *Notion de figures directement égales dans le plan*, notion de déplacement plan. Montrer que tout déplacement plan est une translation ou une rotation.

(1) *Rotation autour d'une droite de l'espace* : montrer qu'elle est un produit de demi-tours. Application : produit de deux rotations d'axes concourants.

(1) *Rotation autour d'une droite de l'espace* : représentation en descriptive (l'axe de rotation est vertical) ; applications.

(2) *Le cube : ses symétries* : représentation descriptive ou cotée d'un cube à diagonale verticale ; section par le plan horizontal du centre.

(2) *Le tétraèdre régulier* : sa représentation quand deux arêtes opposées sont parallèles à un même plan de projection.

(1) *La similitude directe plane* : définition, propriétés, applications.

(1) *Applications de la similitude directe plane* aux problèmes de lieux, d'enveloppes, de constructions géométriques.

(3) *Divisions semblables sur deux droites coplanaires* ; applications.

(1) *Notion de groupe de transformations* telle qu'on peut la dégager du programme de la classe de Mathématiques ; exemples et contre-exemples.

(2) *L'inversion : définition.* Deux couples de points homologues sont-ils toujours cocycliques ? Y a-t-il une réciproque ? Applications.

(1) *L'inversion conserve-t-elle les angles ?* Applications dans le plan et l'espace.

(1) *Comment l'inversion transforme-t-elle les angles dans le plan ?* Applications.

(3) *Relation liant la distance de deux points et la distance des points inverses.*

(2) *Transformation d'un cercle par inversion* (le pôle n'est pas sur le cercle, mais dans son plan).

- (3) *Inversion des cercles dans l'espace* : applications géométriques, en particulier à l'étude des cercles d'une même sphère.
- (3) *La projection stéréographique* ; ses applications géométriques et cartographiques.
- (3) *Le cône oblique à base circulaire* ; ses sections circulaires, ses symétries.

Géométrie des coniques

- (2) *Intersection d'une droite et d'une conique* définie par un foyer, la directrice associée et l'excentricité.
- (2) *Tangente à la parabole* ; générations tangentielles de la parabole.
- (2) *Tangente en un point d'une conique* définie par un foyer, la directrice, l'excentricité ; propriétés caractéristiques de la tangente liées à ce mode de génération.
- (1) *Tangente en un point d'une hyperbole* définie par un foyer et le cercle directeur relatif à l'autre foyer ; générations tangentielles de l'hyperbole.
- (3) *Branches infinies. Directions asymptotiques. Asymptotes.* Exposé des définitions et applications à l'hyperbole (on précisera comment celle-ci est définie).
- (2) *Equation de l'hyperbole rapportée à ses axes de symétrie* (à partir de la définition bifocale) ; passage à l'équation rapportée aux asymptotes.
- (2) *L'ellipse, projection orthogonale du cercle.*
N. B. — Les théorèmes d'Apollonius sont hors du sujet.
- (2) *Y a-t-il équivalence entre les définitions des coniques à centre par foyer, directrice, ou par foyer, cercle directeur ?*
- (1) *Section plane du cylindre de révolution.*
- (1) *Sections hyperboliques d'un cône de révolution.*

Cosmographie

- (3) *Inégalité des jours et des nuits* aux diverses latitudes et aux diverses époques de l'année. Cet exposé ne comporte pas l'emploi de tables.
- (1) *Les phases de la Lune* ; il n'est demandé aucun emploi de tables dans cet exposé, d'ordre qualitatif.
- (1) *Longitude et latitude sur la surface terrestre* : définition ; divers procédés de mesure.
- (2) *Représentation plane de la surface de la Terre* : divers systèmes cartographiques.

RAPPORT

SUR LA COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES *

(CLASSE DE PREMIÈRE)

AU CONCOURS GÉNÉRAL

DES LYCÉES ET ÉCOLES NORMALES EN 1961

On se reportera à l'énoncé (1) pour les notations et le numérotage des questions. Le sujet proposé consistait à étudier quelques propriétés de deux points M et N, situés sur la diagonale OI d'un cube et symétriques par rapport à I.

$$OI = a ; IM = IN = b, \text{ avec } b < a.$$

1°

Il est évident que les angles $\widehat{IOA}$, $\widehat{IOB}$, $\widehat{IOC}$ sont égaux et ont pour cosinus $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Enfin : $\cos \widehat{IOJ} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$

On démontre aisément que MR est parallèle à AI et que NS est parallèle à IB. Le triangle IAB étant équilatéral, l'angle aigu des droites MR et NS est donc égal à $\frac{\pi}{3}$.

2°

Les droites MR et NS se projettent orthogonalement sur le plan OAB suivant les droites RP et SQ respectivement. Celles-ci se coupent en T qui est la trace de (D) sur OAB.

— Le parallélisme de MP et de TF et les égalités :

$$MP = PR = OR = ST = TF$$

entraînent que MPTF est un rectangle. Il en est de même du quadrilatère NQTE ($NQ \parallel TE$ et $NQ = QS = OS = RT = TE$).

— Etude des triangles MFN, MEN, NEF et MEF.

$\widehat{MFN}$ se projette sur le plan OAB suivant l'angle droit $\widehat{PTQ}$. Or, MF est parallèle au plan de projection, donc $\widehat{MFN}$ est droit. Le triangle MFN est rectangle en F. De même, le triangle MEN est rectangle en E.

Le triangle NEF est évidemment rectangle en E et, en outre, $NE = EF$. Par suite, ce triangle est rectangle et isocèle. Il en est de même du triangle MEF (rectangle en F et $MF = FE$).

Les triangles MFN et MEN sont égaux (hypoténuse commune MN et $MF = PT = QT = NE$). De même, les triangles NEF et MEF sont égaux (EF commun et $MF = NE$).

* Le jury était composé de M. Maillard, inspecteur général, président ; Mlle Lema-surier, professeur (E.N.S.I.) au lycée Claude-Bernard ; M. Benméraï, professeur (Mathématiques Supérieures) au lycée Louis-le-Grand ; M. Debey, professeur (Institut agronomique) au lycée Henri-IV ; M. Serruques, professeur (Navale) au lycée Saint-Louis.

(1) Voir *Bulletin de l'A.P.M.*, n° 216 (p. 546).

3°

I étant le milieu de MN, hypoténuse des triangles rectangles MFN et MEN, on a : $IM = IN = IF = IE$.

I est donc le *centre de la sphère circonscrite* au tétraèdre MNEF, le rayon de cette sphère est b .

Arêtes du tétraèdre : a) $NE = MF = EF$.

$$NE = MF = EF = PT = \frac{PQ}{\sqrt{2}} = \frac{MN}{\sqrt{3}} = \frac{2b\sqrt{3}}{3}$$

b) $NF = ME$.

$$NF = ME = PT\sqrt{2} = \frac{2b\sqrt{6}}{3}$$

c) $MN = 2b$.

Aires des faces :

$$\text{aire (MEF)} = \text{aire (NEF)} = \frac{MF^2}{2} = \frac{2b^2}{3}$$

$$\text{aire (MNE)} = \text{aire (MNF)} = \frac{NF \times MF}{2} = \frac{2b^2\sqrt{2}}{3}$$

Volume :

$$V = \text{aire (MEF)} \times \frac{QT}{3} = \frac{4b^3\sqrt{3}}{27}$$

4°

(Faire la figure dans le plan OAB).

L'égalité évidente des triangles JBS et JAR entraîne :

$$JS = JR \text{ et } \widehat{SJR} = 1 \text{ droit.}$$

Le quadrilatère JSJR est donc un carré.

Il en résulte que : $KJ = KR = KO$. Le point K, équidistant de O et de J, est situé sur AB. On démontre facilement que le lieu de K est le segment ωB (ω milieu de AB). Le lieu de T en résulte, puisque $\vec{OT} = 2 \cdot \vec{OK}$.

La droite IK appartient au plan IAB. La projection orthogonale de J sur la droite IK appartient donc au plan IAB et à la sphère de diamètre IJ et, par suite, au cercle d'intersection. Son lieu s'en déduit, en vertu du lieu de K.

5°

Les égalités : $KO = KJ' = KS = KT = KJ = KR$ prouvent que le cercle, de centre K et de rayon OK, contient les points : O, J', S, T, J et R. Son diamètre étant JJ', il passe aussi par L et T'.

$$\text{On a : } OK^2 = \frac{OT^2}{4} = \frac{OR^2 + OS^2}{4} = \frac{OP^2 + OQ^2}{8}$$

$$\text{Or : } OP = (a - b) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ et } OQ = (a + b) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Donc : } r^2 = OK^2 = \frac{a^2 + b^2}{6}$$

Enfin, les points K, G, R', S', L' sont alignés sur la diagonale S'L' du carré S'LL'S.

6°

$$IK^2 = IJ^2 + KJ^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2 + b^2}{6} = \frac{3a^2 + b^2}{6}.$$

La distance des centres des deux sphères est : $d = \sqrt{\frac{3a^2 + b^2}{6}}$.

Leurs rayons sont : b et $r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{6}}$.

La condition de contact est : $d = |b \pm r|$ ou $d = |b + \varepsilon r|$ (1),
avec : $\varepsilon = +1$ (contact extérieur) ou $\varepsilon = -1$ (contact intérieur).

Une première élévation au carré fournit :

$$2\varepsilon br = d^2 - b^2 - r^2 = \frac{a^2 - 3b^2}{3} \quad (2).$$

Une deuxième élévation au carré fournit :

$$36b^2r^2 = (a^2 - 3b^2)^2 \text{ ou } 6(a^2 + b^2)b^2 = (a^2 - 3b^2)^2$$

soit : $3b^4 - 12a^2b^2 + a^4 = 0$ (3).

On en déduit : $\frac{b^2}{a^2} = 2 + \frac{\sqrt{33}}{3}$, ou : $\frac{b^2}{a^2} = 2 - \frac{\sqrt{33}}{3}$.

La condition $b < a$ exige que l'on ne peut conserver que : $\frac{b^2}{a^2} = 2 - \frac{\sqrt{33}}{3}$.

On trouve alors que : $\frac{a^2 - 3b^2}{a^2} = \sqrt{33} - 5$ qui est positif. La relation (2)

prouve alors que $\varepsilon = +1$. Le contact est extérieur. Valeur approchée de $\frac{a}{b}$ (question non posée).

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2 - \frac{\sqrt{33}}{3}}. \text{ Or : } \sqrt{33} \simeq 5,7445626$$

$$2 - \frac{\sqrt{33}}{3} \simeq 0,0851458$$

On en déduit : $\frac{b}{a} \simeq 0,292$ par excès.

7° (a variable, b fixe, $b < a$)

K est aligné avec R' et S' (5°) et les points R' et S' sont fixes puisque

$$OR' = OS' = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

Le lieu de K est la demi-droite, portée par la droite R'S', d'origine S' et qui ne contient pas R'.

Les sphères (U) contiennent le cercle fixe :

dans le plan zOJ' ;

dont le centre est le milieu du segment R'S' ;

$$\text{dont le rayon est } \frac{OJ'}{2} = \frac{OS'}{\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{6}}.$$

Enfin, les plans KIJ passent par la droite menée par J' parallèlement à Oz.

Résultats et observations

1° 282 candidats ont pris part à l'épreuve. Le nombre est en augmentation sur celui du concours de 1960 qui était 226. Après une première et double correction, un lot de copies retenues a donné lieu à une nouvelle correction par l'ensemble du jury.

L'impression générale est bonne. Le jury a pu proposer 4 prix (dont le 3° *ex-æquo*) et 9 accessits. La copie classée 1^{re} a mérité 17,5 sur 20 et la 13° (9° accessit) 13,6 sur 20.

2° La bonne qualité du peloton de tête ne doit pas faire croire que l'ensemble des candidats est d'un niveau très supérieur à celui des années précédentes. Malgré les recommandations contenues dans le rapport du concours de 1960, une « proportion importante de copies nulles encombre inutilement le concours ». Le jury insiste encore pour que « la sélection soit faite avec plus de discernement par les professeurs et les chefs d'établissements ».

Une statistique sommaire donne les résultats suivants :

Notes entre	0 et 5	(sur 20) :	38 %	(dont quelques zéros)
—	5 et 10	:	39 %	
—	10 et 13	:	18 %	
—	13 et 17,5	:	5 %	

Il y a donc environ 40 % des candidats, au moins, qui ne sont pas dignes de se présenter au concours.

3° La présentation matérielle laisse encore à désirer : trop de ratures, marge inexistante.

4° Pour ce qui concerne le détail, il a été noté :

2° question. — On oublie de démontrer dans un grand nombre de copies que deux des triangles sont isocèles.

3° question. — Les calculs sont généralement exacts.

4° question. — Certains candidats ont fait appel, bien inutilement, à une représentation analytique pour la détermination des lieux de K et de T. Dans deux copies seulement, apparaît le souci de préciser, avec soin, le lieu de la projection de J sur IK.

5° question. — Les méthodes employées pour démontrer que huit points sont cocycliques (et que cinq autres sont alignés) sont souvent longues.

6° question. — Si l'équation fournissant $\frac{b}{a}$ est généralement obtenue dans les copies récompensées, le choix méthodique de la solution du problème fait, souvent, défaut.

7° question. — Cette question a été assez bien résolue (par les candidats qui l'ont abordée).

Pour terminer, le Président du Jury recommande aux professeurs d'attirer l'attention des élèves, qui seront désignés pour les concours futurs, sur la nécessité d'améliorer la présentation matérielle des copies :

- marge importante, tracée à la règle ;
- absence de ratures ;
- clarté et simplicité des figures, celles-ci devant être dessinées en face du texte correspondant ;
- précision du texte de la solution et rédaction de celle-ci en bon français.

Le jury, après cet avertissement, tiendra le plus grand compte de l'observation (ou de l'inobservation) de ces indications dans l'appréciation des copies des concours à venir.

L'Inspecteur général, Président du Jury,
R. MAILLARD.

PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES POUR LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Vu l'arrêté du 15 septembre 1945 modifié fixant les programmes enseignés dans les établissements d'enseignement du Second Degré ;

Le Conseil Supérieur de l'Éducation Nationale entendu dans sa séance du 28 février 1962,

LE MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ARRÊTE :

Article premier. — L'enseignement des Mathématiques dans la classe de Mathématiques sera donné conformément au programme annexé au présent arrêté.

Art. 2. — Le Directeur général de l'organisation et des programmes scolaires est chargé de l'exécution du présent arrêté dont les dispositions entreront en vigueur à la rentrée scolaire 1962.

Fait à Paris, le 6 mars 1962.

VOCABULAIRE ET SYMBOLES

(L'introduction des définitions et des symboles mentionnés ci-après peut être faite soit à l'occasion de l'étude de telle ou telle question du programme, soit dans un bref chapitre initial ne comportant aucun développement théorique sur les diverses notions présentées, qui seront illustrées par quelques exemples simples).

Définitions et symboles relatifs à quelques notions sur les ensembles : appartenance ; sous-ensemble ; inclusion ; réunion ; intersection ; ensemble vide ; ensembles complémentaires.

Définition d'une relation d'équivalence entre éléments d'un ensemble.

Définition d'une relation d'ordre entre éléments d'un ensemble.

Symboles conventionnels indiquant : une implication logique, une équivalence logique.

Signification des symboles dits « quantificateurs » : « quel que soit » ; « il existe ».

*
**

ARITHMÉTIQUE, ALGÈBRE ET NOTIONS D'ANALYSE

I. Les nombres. Extensions successives de la notion de nombre

NOTE PRÉLIMINAIRE.

1° Les trois premiers paragraphes de ce chapitre I (entiers naturels, entiers relatifs, rationnels) sont destinés à résumer, en une sorte de synthèse, les notions sur les nombres acquises dans les classes précédentes, en procédant à une mise au point destinée à faire apparaître les quelques propriétés fondamentales qui permettent de dégager l'idée de certaines « structures ». Quels que soient l'ordre et le mode d'exposition choisis, il importe de ne pas s'attarder sur ces théories, dont les résultats sont déjà connus des élèves.

2° *Aucune question d'ordre théorique ne devra être posée, aux épreuves écrites et orales du Baccalauréat, sur les diverses notions qui font l'objet de ce chapitre I. Bien entendu, les résultats généraux concernant les nombres, les propriétés des opérations, leurs conséquences essentielles, qui sont du reste mis en œuvre dans les autres chapitres du programme, doivent être parfaitement connus.*

1° *Les entiers naturels.*

Comparaison. Addition (somme) ; associativité, commutativité. Le problème de la soustraction n'est pas toujours possible.

Multiplication (produit) ; associativité ; commutativité ; distributivité par rapport à l'addition. Le problème de la division n'est pas toujours possible.

Définition de la puissance n° ; propriétés résultant de l'associativité et de la commutativité de la multiplication.

2° *Les entiers relatifs.*

Définition. Addition (somme) ; propriétés fondamentales. Nombres opposés. Soustraction (différence).

L'ensemble des entiers relatifs a une structure de « groupe » pour l'addition.

Comparaison ; entiers positifs et négatifs. Valeur absolue.

Multiplication (produit) ; propriétés fondamentales. Le problème de la division n'est pas toujours possible.

L'ensemble des entiers relatifs a, pour ces opérations, une structure « d'anneau ».

3° *Les nombres rationnels.*

Fraction ; fractions équivalentes ; notion de « classes d'équivalence » ; nombres rationnels. Egalité.

Addition et soustraction ; propriétés fondamentales. Comparaison.

Multiplication ; propriétés fondamentales ; nombres inverses. Division (quotient exact).

L'ensemble des rationnels a, pour ces opérations, une structure de « corps ».

Puissances entières (exposants entiers positifs, négatifs, nul) : propriétés fondamentales.

Valeurs absolues ; propriétés relatives aux sommes, aux produits, aux quotients.

4° *Notions sur les nombres réels.*

Nécessité d'une extension de la notion de nombre, au-delà des rationnels ; indications sommaires (à partir d'exemples) sur un mode de construction des réels, sur la définition des opérations élémentaires les concernant, sur leur comparaison.

Exposé (sans démonstration) des propriétés fondamentales des opérations sur les nombres réels. L'ensemble des nombres réels a une structure de « corps ».

Correspondance entre les nombres réels et les points d'une droite munie d'une origine et d'un vecteur-unité.

5° *Les nombres complexes.*

Définition. Représentation géométrique. Module, argument. Egalité. Nombres complexes opposés, nombres complexes conjugués. Nombre complexe nul.

Addition, soustraction, multiplication, division. Corps des nombres complexes.

Puissance n° d'un nombre complexe donné sous « forme trigonométrique », formule de Moivre. Racines n° d'un nombre complexe (on se bornera à la démonstration d'existence et à la représentation géométrique des n racines n°).

(L'application des nombres complexes à l'étude de problèmes de géométrie plane, notamment de problèmes sur la similitude et l'inversion, est en dehors du programme).

*

**

II. Arithmétique

1° Analyse combinatoire.

Permutations, arrangements, combinaisons sans répétition.

2° Les entiers : division, divisibilité, nombres premiers. (Les théories énumérées ci-après concernent essentiellement les entiers naturels, mais l'emploi éventuel des entiers relatifs dans certaines de ces questions n'est nullement exclu).

Multiples d'un entier ; problème de la division d'un entier par un autre ; quotient à une unité près (quotient entier), reste.

Notions sur les congruences modulo n ; opérations élémentaires.

Diviseurs communs à plusieurs nombres, plus grand diviseur commun ; nombres premiers entre eux.

Multiples communs à plusieurs nombres, plus petit multiple commun.

Nombres premiers ; propriétés élémentaires. Décomposition d'un entier en un produit de nombres premiers. Applications : diviseurs d'un nombre ; diviseurs communs et multiples communs à plusieurs nombres ; condition pour qu'un entier soit égal au carré, à la puissance n° , d'un entier.

3° Application aux fractions.

Simplification des fractions ; fractions irréductibles. Réduction de fractions à un dénominateur commun, au plus petit dénominateur commun.

Condition pour qu'un rationnel soit le carré, la puissance n° d'un rationnel.

4° Numération.

Principe des systèmes de numération ; notion de base. Numération décimale.

5° Fractions décimales, nombres décimaux.

Condition pour qu'une fraction soit équivalente à une fraction décimale. Nombres décimaux ; comparaison ; addition, soustraction, multiplication.

Valeurs approchées à $\frac{1}{10^n}$ près par défaut et par excès d'un nombre rationnel ; représentation par des nombres décimaux ; la suite des valeurs décimales approchées par défaut d'un nombre rationnel présente une périodicité (l'étude générale des nombres décimaux périodiques, la démonstration d'existence et la recherche d'une « fraction génératrice », sont en dehors du programme).

Définition des quotients $\frac{1}{10^n}$ près par défaut et par excès d'un nombre décimal par un autre.

6° Nombres réels.

Rapport d'un nombre à un autre, défini comme quotient exact ; équivalence des relations :

$$\frac{a}{b} = c \quad \text{et} \quad a = bc, \quad \text{pour } b \neq 0.$$

Rapports égaux (proportions).

Définition (sans démonstration d'existence) de la racine n° arithmétique d'un nombre réel positif ou nul. Propriétés élémentaires de calcul des radicaux (racine n° d'un produit, d'un quotient, d'une racine p°), condition d'égalité de :

$$\sqrt[m]{a^p} \quad \text{et} \quad \sqrt[m']{a^{p'}} \quad (a > 0),$$

(les exposants fractionnaires pourront n'être définis qu'à l'occasion de l'étude de la fonction exponentielle).

7° Progressions arithmétiques, progressions géométriques.

Définition ; calcul de la somme d'un nombre fini de termes.

8° Calculs approchés.

Valeurs approchées d'un nombre ; encadrement ; marge d'incertitude (erreur absolue ; erreur relative). Valeurs approchées d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient de nombres dont on connaît des valeurs approchées.

Valeurs approchées à $\frac{1}{10^n}$ près par défaut et par excès d'un nombre réel ;

comparaison des valeurs approchées par défaut à $\frac{1}{10^n}$ et $\frac{1}{10^{n+1}}$ près.

Suite des carrés des entiers naturels ; racine carrée entière d'un entier naturel, reste. Indications sur la recherche pratique de la racine carrée entière. (L'étude de la règle classique « d'extraction de la racine carrée » est en dehors du programme).

Racines carrées à 1 près, à $\frac{1}{10^n}$ près, par défaut et par excès d'un nombre réel positif.

*
**

III. Premières définitions sur les fonctions

(Certaines des notions introduites par ce bref chapitre trouveront naturellement leur emploi aussi bien en algèbre et en analyse qu'en géométrie, notamment dans l'étude des transformations).

Application d'un ensemble dans un ensemble. Variables. Fonctions.

Composition des applications ; fonction composée (fonction de fonction) d'une variable.

Application biunivoque d'un ensemble sur un ensemble ; fonctions réciproques.

Opérations élémentaires sur des fonctions (à valeurs réelles) définies sur un même ensemble : addition, soustraction, multiplication, division (fonction-somme, ..., fonction-quotient) ; puissance n° , racine n° d'une fonction.

*
**

IV. Fonctions polynômes et fractions rationnelles (coefficients réels et variables réelles)

1° Fonctions polynômes — forme réduite, degré.

Identité (on pourra admettre que l'égalité numérique pour toutes valeurs des variables entraîne l'identité formelle). Polynôme nul.

Addition, soustraction, multiplication des polynômes ; anneau des polynômes.

Formule du binôme.

2° Polynômes d'une variable x ; division par $(x - a)$; application aux polynômes $x^n \pm a^n$.

Changement de variables $x = X + k$; application aux formes canoniques $aX^2 + b$, $aX^3 + bX + c$, des polynômes du second et du troisième degré.

3° Fraction rationnelle définie comme fonction-quotient d'un polynôme par un autre ; domaine d'existence.

Exemples simples de transformations de fractions rationnelles ; transformations des fractions :

$$\frac{ax + b}{a'x + b'}, \quad \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'},$$

par un changement de variable $x = X + k$, conduisant à l'une des formes :

$$A + \frac{B}{X}, \quad AX + B + \frac{C}{X}, \quad A + \frac{BX + C}{X^2 + D}.$$

*
**

V. Généralités sur les fonctions d'une variable réelle

1° *Représentation graphique* dans un repère cartésien (rappel).

2° *Sens de variation sur un intervalle.*

Propriétés élémentaires de fonctions monotones sur un intervalle.

Définition d'un maximum ou d'un minimum d'une fonction en un point.

3° *Notions sur les limites.*

Définitions concernant les limites (finies ou infinies) d'une suite u_n lorsque l'entier naturel n tend vers l'infini, et d'une fonction lorsque la variable tend vers une valeur finie ou vers l'infini. Énoncé (sans démonstration) des propriétés élémentaires des limites : unicité, opérations élémentaires (somme, produit, quotient, racine n°), cas d'indétermination.

4° *Continuité d'une fonction.*

Définition d'une fonction continue : pour une valeur de la variable, sur un intervalle (la notion de continuité uniforme est en dehors du programme). Opérations élémentaires. Continuité d'une fonction composée (fonction de fonction), formée à partir de deux fonctions continues (sans démonstration).

On admettra, sans démonstration, la propriété suivante : si une fonction f est continue sur un intervalle fermé (a, b) , et si les valeurs numériques $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, la fonction s'annule au moins pour une valeur de la variable comprise entre a et b . Application au cas d'une fonction continue et monotone sur un intervalle fermé.

Existence de la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle fermé (on admettra la continuité de cette fonction réciproque) ; représentation graphique dans un repère cartésien normé.

5° *Dérivées.*

Révision des questions figurant au programme des classes de Première A', C, M, M' : définition de la dérivée pour une valeur de la variable ; fonction dérivée ; opérations élémentaires (dérivées d'une constante, d'une somme, d'un produit, d'un quotient) ; interprétation géométrique en coordonnées cartésiennes, équation de la tangente en un point de la courbe représentative.

L'existence d'une dérivée entraîne la continuité de la fonction.

Dérivée d'une fonction composée (formée à partir de deux fonctions dérivables). Dérivée de la fonction réciproque d'une fonction monotone dérivable ; interprétation géométrique.

Définition des dérivées successives.

6° *Dérivées de quelques fonctions (révision et compléments).*

Dérivée par rapport à x de x^n , de x^{-n} , de $\sqrt{x}$, de $\sqrt[n]{x}$ (n entier naturel). Dérivée de la puissance n° , de la racine n° d'une fonction dérivable.

Dérivée des fonctions circulaires $\sin$, $\cos$, tg , cotg (révision). Dérivée de fonctions composées formées à partir des fonctions circulaires. Dérivées successives d'un polynôme, de $\sin(ax + b)$, de $\cos(ax + b)$.

7° Application des dérivées.

Énoncé, sans démonstration, du théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis ; interprétation géométrique.

Comparaison de deux fonctions ayant la même fonction dérivée sur un intervalle. Étude du sens de variation d'une fonction au moyen du signe de la fonction dérivée.

8° Fonctions primitives.

Définition d'une fonction primitive d'une fonction (on admettra l'existence d'au moins une primitive pour toute fonction continue). Relation entre deux primitives d'une fonction sur un même intervalle ; existence d'une primitive unique prenant, en un point donné de l'intervalle de définition, une valeur fixée.

Exemples de primitives déduites de la connaissance des dérivées de quelques fonctions usuelles ; en particulier, primitives d'un polynôme, de $\frac{1}{x^n}$ (n entier naturel supérieur à 1), de $\sin(ax + b)$, de $\cos(ax + b)$.

9° Application des primitives au calcul d'aires et de volumes.

(Aucune difficulté ne sera soulevée au sujet des notions d'aire et de volume. On admettra l'existence et les propriétés des aires et des volumes dont le calcul est demandé ici).

Aire d'un domaine plan limité par un arc de la courbe représentative, relative à un repère cartésien orthonormé, d'une fonction $f(x)$ continue (on pourra se borner au cas d'une fonction monotone), positive ou nulle, par l'axe des abscisses, et par deux « coordonnées », l'une fixe, l'autre variable (abscisse x) : cette aire représente une primitive de la fonction donnée. Convention de signes pour la définition de l'aire lorsque la fonction donnée n'est pas toujours positive ou nulle. Application à des calculs d'aires planes.

Application des primitives au calcul de quelques volumes : pyramide à base triangulaire, tronc de pyramide à bases parallèles triangulaires (extension des formules trouvées au cas de bases polygonales quelconques) ; cône à base circulaire, tronc de cône à bases parallèles circulaires ; segment sphérique, volume de la sphère.

**

VI. Étude de quelques fonctions d'une variable réelle

1° Étude de la variation et de la représentation graphique (repère cartésien) des fonctions :

a) $ax^3 + bx^2 + cx + d$ (forme réduite $AX^3 + BX + C$) ; $ax^4 + bx^2 + c$;

b) $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ $a' \neq 0$ (sur des exemples, sans théorie générale, en utilisant éventuellement la forme réduite : $A + \frac{BX + C}{X^2 + D}$) ;

c) $\frac{ax^2 + bx + c}{x - k}$, $\sqrt{ax + b}$, $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

(en liaison avec l'étude des coniques).

2° Fonctions circulaires.

Reprise complète de l'étude des fonctions circulaires sinus, cosinus, tangente, cotangente, figurant au programme des classes de Première A', C, M, M'.

Exercices d'application portant sur les formules d'addition et de multiplication par deux, sur la transformation en produit de la somme ou de la différence de deux sinus ou cosinus et sur la transformation inverse.

Transformation des fonctions :

$a \cos x + b \sin x$ et $a \cos^2 x + 2b \sin x \cos x + c \sin^2 x$,
conduisant respectivement aux formes :

$A \cos (x - k)$ et $A \cos (2x - k) + B$.

Application de la formule de Moivre dans le cas des exposants 2, 3, 4.

Exemples simples d'étude de fonctions composées formées à partir des fonctions circulaires.

3° Fonctions logarithmiques.

Définition de la fonction logarithme népérien de x (notation : $\text{Log } x$) comme primitive, nulle pour $x = 1$, de la fonction $\frac{1}{x}$ ($x > 0$). Représentation par l'aire d'un trapèze mixtiligne (repère orthonormé).

Propriété fondamentale : $\text{Log } (ab) = \text{Log } a + \text{Log } b$, et ses conséquences logarithme népérien d'un produit, d'un quotient, d'une puissance n^e (exposant positif ou négatif), d'une racine n^e .

Limites de $\text{Log } x$ lorsque la variable positive x tend vers l'infini ou vers 0 ;
limite de $\frac{\text{Log } x}{x}$ lorsque x tend vers l'infini.

Base des logarithmes népériens, définition du nombre e .

Courbe représentative de la fonction logarithme népérien (repère cartésien orthonormé).

La fonction $K \text{Log } x$ (K constante non nulle) a les propriétés fondamentales de calcul de la fonction $\text{Log } x$. Définition de la fonction logarithmique de base a (a constante positive, différente de 1) :

$$\log_a x = K \text{Log } x \text{ avec } K \text{Log } a = 1.$$

Relation entre $\log_a x$ et $\log_b x$. Courbes représentatives des fonctions logarithmiques.

Logarithmes décimaux.

4° Fonctions exponentielles.

Définition de la fonction exponentielle de base a comme fonction réciproque de la fonction logarithmique de base a ($a > 0$, $a \neq 1$). Propriétés fondamentales de la fonction exponentielle de base a , représentée provisoirement par le symbole $\exp_a$:

$$\exp_a(u) = v \iff u = \log_a v \quad (v > 0) ;$$

$$\exp_a(0) = 1 ; \quad \exp_a(1) = a ;$$

$$\exp_a(u + u') = \exp_a(u) \cdot \exp_a(u') ;$$

et ses conséquences, en particulier :

$$\exp_a(n \cdot u) = [\exp_a(u)]^n, \quad \exp_a(n) = a^n \quad (n \text{ entier relatif}) ;$$

$$\exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p}.$$

Notation a^x .

Dérivée de a^x , de e^x .

Courbes représentatives des fonctions exponentielles (repère cartésien orthonormé).

(Pour les fonctions logarithmiques et exponentielles, leur étude est strictement limitée à celle des questions indiquées ci-dessus : en particulier, l'étude de fonctions composées faisant intervenir des logarithmes et des exponentielles est en dehors du programme).

5° Exposants fractionnaires.

Relation $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ ($a > 0$). Propriétés élémentaires de calcul des exposants fractionnaires.

(L'étude générale de la fonction puissance d'exposant rationnel ou réel est en dehors du programme).

*
**

VII. Equations et inéquations

- 1° Transformations élémentaires d'équations et d'inéquations. Changements d'inconnues. Interprétations graphiques.
- 2° Résolution de l'équation du second degré à coefficients réels (racines réelles, racines complexes conjuguées).
- 3° Exemples d'équations et d'inéquations, dont l'étude se ramène à l'étude d'équations ou d'inéquations du premier ou du second degré, ou à l'application des propriétés élémentaires des fonctions usuelles, et, notamment, des fonctions circulaires.

Décomposition d'un trinôme bicarré à coefficients réels en un produit de polynômes du premier ou du second degré à coefficients réels. Equation bicarrée à coefficients réels.

Equation $a \cos x + b \sin x + c = 0$.

4° Systèmes d'équations. Transformation d'un système : par la méthode dite « de substitution » ; par le remplacement de l'une des équations par une combinaison linéaire des équations du système.

Révision de l'étude d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues ; interprétation géométrique.

Exemples simples de systèmes d'équations et d'inéquations.

5° Recherche des fonctions une ou deux fois dérivables y de la variable x vérifiant les équations :

$y' = P(x)$, $y'' = P(x)$, $P(x)$ étant un polynôme en x ,

$y' = ay$ (a constante),

$y'' + \omega^2 y = 0$ (ω constante réelle. On admettra, après avoir découvert les solutions de la forme $A \cos \omega x + B \sin \omega x$, que l'équation n'en admet pas d'autres).

VIII. Calcul numérique

De nombreux exercices de calcul numérique seront faits, à l'occasion de l'étude des fonctions usuelles et à l'occasion de problèmes, pour mettre en application les notions de valeurs approchées, l'encadrement, d'ordre de grandeur d'un résultat ou d'une erreur.

Usage de tables de valeurs numériques de fonctions usuelles ; usage de tables de logarithmes. Notions pratiques très simples sur l'interpolation.

*
**

GEOMETRIE ET CINEMATIQUE

I. Géométrie descriptive

(La géométrie descriptive doit être traitée non comme une discipline séparée, mais comme une partie de la géométrie, où sont étudiés quelques problèmes de représentation de figures de l'espace. Les notions de géométrie descriptive, et, plus généralement, l'opération de projection sur des plans convenablement choisis, trouvent leur emploi, soit comme moyen de recherche, soit comme moyen de représentation, dans de nombreuses questions, par exemple : symétries du cube, du tétraèdre régulier, projection orthogonale d'un cercle, etc...).

Représentation d'un point et d'un ensemble de points à l'aide de projections orthogonales sur deux plans rectangulaires. Vocabulaire relatif aux droites et plans occupant des positions particulières par rapport aux plans de projection.

Changement de plan frontal, changement de plan horizontal.

Représentation des droites et des plans ; problèmes d'intersection, de parallélisme, d'orthogonalité (une fois expliquées les solutions géométriques de ces problèmes, on se bornera à traiter quelques exercices d'application simples, en utilisant éventuellement un changement de plan).

Problème de la perpendiculaire commune à deux droites et de leur plus courte distance :

1° lorsque les deux droites sont horizontales (ou frontales) ;

2° lorsque l'une d'elles est verticale (ou de bout).

Rotation autour d'un axe vertical ou de bout (liaison avec l'étude de la transformation par rotation).

Rabattement d'un plan sur un plan horizontal ou frontal (liaison avec la transformation par affinité plane). Relèvement.

Distance de deux points, d'un point à une droite, d'un point à un plan ; angle de deux droites.

II. Compléments de géométrie orientée

1° Géométrie plane.

Angle orienté de deux demi-droites ou de deux vecteurs (rappel). Angle orienté de deux droites.

Mesure, dans un plan orienté, d'un angle orienté de deux demi-droites, de deux droites. Formules de Chasles. Repérage d'une direction d'axe ou de droite dans un plan orienté muni d'un axe polaire : angle polaire.

2° Géométrie dans l'espace.

Orientation d'un trièdre, comparaison des sens de deux trièdres orientés.

Orientation de l'espace. Espace orienté par le choix d'un trièdre orienté.

III. Compléments sur le cercle en géométrie plane et sur la sphère

1° Ensemble des points M d'un plan tels que, A et B étant deux points de ce plan, l'angle orienté de vecteurs $(\vec{MA}, \vec{MB})$, ou l'angle orienté de droites (MA, MB), soit égal à un angle donné.

2° Puissance d'un point par rapport à un cercle. Différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles, axe radical de deux cercles.

Cercles orthogonaux.

Faisceaux linéaires de cercles ; faisceaux orthogonaux.

3° Points conjugués, polaire d'un point par rapport à un cercle ; pôle d'une droite, droites conjuguées.

Définition d'une transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle ; transformé d'une division harmonique de quatre points alignés.

4° Cônes et cylindres circonscrits à une sphère.

IV. Coordonnées cartésiennes dans l'espace. Notions de géométrie analytique

(Le rappel des notions de géométrie analytique plane acquises en Seconde et en Première interviendra naturellement à l'occasion de l'étude de divers chapitres du présent programme ou à l'occasion de problèmes : il ne doit pas donner lieu à une révision systématique).

1° Définition d'un repère cartésien dans l'espace : axes obliques, axes rectangulaires, choix des unités sur les axes, vecteurs-unités ; repère orthonormé.

Composantes scalaires (coordonnées) d'un vecteur ; coordonnées d'un point. Représentation vectorielle d'un vecteur, d'un point, au moyen de leurs coordonnées et des vecteurs-unités. Paramètres directeurs d'une direction de droites.

Changement de coordonnées par translation du repère.

2° Barycentre d'un système de n points affectés de coefficients dont la somme n'est pas nulle, définition. Coordonnées du barycentre. Centre de gravité d'un triangle, d'un tétraèdre. Transformation d'une somme $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$.

3° Représentations paramétriques d'une droite.

4° *Repère orthonormé* : expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs.

Distance de deux points ; cosinus de l'angle de deux vecteurs ; condition d'orthogonalité de deux vecteurs ou de deux droites. Equation normale d'une droite en géométrie plane, d'un plan dans l'espace.

Equation d'une sphère donnée par son centre et son rayon. Equation d'un cône ou d'un cylindre de révolution ayant pour axe de révolution l'un des axes de coordonnées.

Hélice circulaire ; représentation paramétrique ; $x = a \cos u$, $y = a \sin u$, $z = bu$; projection orthogonale sur un plan contenant l'axe Oz.

(*L'étude de problèmes sur les droites et les plans, intersections, positions relatives, parallélisme... est en dehors du programme*).

5° *Vecteur variable fonction d'un paramètre* : Dérivée vectorielle relativement à un repère donné (indépendant du paramètre). Coordonnées du vecteur dérivé (repère cartésien normé). Dérivées successives.

Dérivée d'une somme vectorielle, du produit d'un vecteur par un scalaire (variable), du produit scalaire de deux vecteurs.

V. Transformations ponctuelles (plan et espace)

1° Généralités.

Transformation réciproque d'une transformation. Transformations involutives. Composition de transformations (produit) ; associativité. Groupe de transformations.

2° Translation.

Révision des questions figurant au programme de Seconde A', C, M, M'. Produit de translations ; groupe des translations.

3° Déplacements et symétries en géométrie plane.

Rotation autour d'un point ; symétrie par rapport à un point. Symétrie (orthogonale) par rapport à une droite (symétrie axiale).

Produit de deux symétries axiales ; toute translation ou rotation est un produit de deux symétries axiales. Produits de translations, de rotations et de symétries axiales : formes réduites (une translation, ou une rotation, ou le produit d'une symétrie axiale et d'une translation parallèle à l'axe).

Déplacement. Forme réduite d'un déplacement ; centre de rotation. Groupe des déplacements.

4° Déplacements dans l'espace.

Rotation autour d'un axe ; retournement (symétrie orthogonale par rapport à une droite).

Produits de deux retournements (axes coplanaires, axes non coplanaires). Toute translation ou rotation est un produit de deux retournements.

Produits de translations et de rotations, forme réduite ; « déplacement » hélicoïdal.

Déplacement dans l'espace. (On pourra admettre que tout déplacement est équivalent à un déplacement hélicoïdal). Groupe des déplacements.

5° Symétries dans l'espace.

Symétrie par rapport à un point ; symétrie par rapport à un plan. Produits de deux telles symétries.

Toute translation ou rotation est un produit de deux symétries par rapport à un plan.

6° Plans de symétrie, axes, centres d'une figure.

Définitions. Exemples : couple de droites, couple de plans, triangle équilatéral, cube, tétraèdre régulier.

7° Homothétie (plan et espace).

Révision des questions figurant au programme de Seconde A', C, M, M'. Produits de deux homothéties, d'une homothétie et d'une translation. Groupe des homothéties-translations.

Applications de l'homothétie. Cercles homothétiques dans l'espace. Centres d'homothétie de deux sphères, de trois sphères prises deux à deux.

8° Similitudes.

Similitude (directe) en géométrie plane. Forme réduite ; centre de similitude.

Définition des figures semblables dans l'espace (se correspondant par le produit d'un déplacement et d'une homothétie positive). L'étude générale de la transformation « Similitude » dans l'espace, la recherche d'une forme réduite sont en dehors du programme.

Rapport des aires de deux polygones plans semblables, rapport des volumes de deux polyèdres semblables.

9° Affinité (géométrie plane).

Définition. Produit de deux affinités ayant même axe et même direction. Transformée d'une droite : transformée de la tangente en un point d'une courbe.

Affinité orthogonale ; interprétation à l'aide d'une rotation et d'une projection orthogonale.

10° Inversion.

Définition. Produit de deux inversions ayant même pôle ; produit d'une inversion et d'une homothétie ayant pour centre le pôle d'inversion. Cercle (ou sphère) d'inversion.

Etude, en géométrie plane seulement, des questions suivantes relatives à l'inversion :

Conservation du contact ; problème de la conservation des angles.

Transformés d'une droite, d'un cercle. Inversions pouvant échanger : une droite et un cercle, deux cercles.

Transformés par inversion des cercles d'un faisceau linéaire.

VI. Coniques

(Le choix des définitions, l'ordre de présentation des diverses questions sur les coniques et, notamment, de leurs propriétés caractéristiques, ne sont nullement imposés, ni même suggérés, par l'ordre d'énumération adopté ci-après).

1° Définition et propriétés caractéristiques ponctuelles de l'ellipse, de l'hyperbole, de la parabole :

Géométrie plane : Lieu des centres des cercles passant par un point donné et tangents à une droite ou à un cercle donné ; lieu des points dont la somme ou la différence des distances à deux points donnés a une valeur donnée.

Géométrie plane : Lieu des points dont le rapport des distances à un point donné et à une droite a une valeur donnée.

Sections planes d'un cône de révolution. Sections planes d'un cylindre de révolution.

Equation de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées à leurs axes de symétrie.
Equation de la parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet.

Etude de la courbe représentée, en coordonnées rectangulaires, par l'équation :
 $y^2 = ax^2 + bx + c$.

2° Existence de la tangente à une conique en un point.

Asymptotes de l'hyperbole. Equation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Propriétés élémentaires des tangentes relativement aux foyers : projections orthogonales d'un foyer sur les tangentes ; symétriques d'un foyer par rapport aux tangentes.

Notion d'enveloppe de droites, en géométrie plane, à propos de l'étude de l'ensemble des droites telles que la projection orthogonale d'un point donné sur chacune d'elles soit sur un cercle donné, ou sur une droite donnée, et de l'ensemble des médiatrices des segments joignant un point fixe aux différents points d'un cercle ou d'une droite.

3° Affinités orthogonales faisant correspondre une ellipse et son cercle principal ; ellipse considérée comme projection orthogonale d'un cercle. Aire de l'ellipse.

(L'étude des diamètres des coniques, l'extension à une conique, considérée comme projection ou perspective d'un cercle, des propriétés des éléments conjugués par rapport à un cercle, sont en dehors du programme).

VII. Cinématique

1° *Mouvement d'un point. Sa relativité. Trajectoire.*

Modes de définition d'un mouvement :

- par les coordonnées du mobile par rapport à un repère cartésien fixe ;
- par la donnée d'un support géométrique de la trajectoire et par une loi horaire.

2° *Vecteur-vitesse d'un point.*

Vecteur-vitesse à un instant donné.

Coordonnées du vecteur-vitesse, lorsque le mouvement est défini par rapport à un repère cartésien donné. Vecteur-vitesse de la projection du mobile sur un plan ou sur une droite fixe.

Détermination du vecteur-vitesse lorsque l'on connaît le support géométrique de la trajectoire et la loi horaire.

Mouvement circulaire : vecteur-vitesse, vitesse angulaire.

3° *Vecteur-accélération d'un point.*

Hodographe. Définition du vecteur-accélération à un instant donné. Coordonnées du vecteur-accélération, lorsque le mouvement est défini par rapport à un repère cartésien donné. Vecteur-accélération de la projection du mobile sur une droite ou sur un plan fixe.

4° *Etude particulière des mouvements suivants (description du mouvement, propriétés du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération) :*

- Mouvement rectiligne uniforme.
- Mouvement rectiligne uniformément varié.
- Mouvement circulaire uniforme.
- Mouvement rectiligne vibratoire simple.

Relation entre ces deux derniers mouvements. Mouvement rectiligne défini par l'équation horaire : $x = a \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\omega t + \beta)$.

- Mouvement hélicoïdal uniforme.

5° Mouvement d'un point dont le vecteur-accélération reste équipollent à un vecteur fixe donné (liaison avec le mouvement d'un point pesant dans le vide) : trajectoire, mouvements projetés sur un axe parallèle et sur un plan perpendiculaire au vecteur-accélération.

6° *Mouvement de translation d'un corps solide par rapport à un repère donné.*

Trajectoires, vecteurs-vitesse, vecteurs-accélération des divers points invariablement liés au corps.

Changement de repère (mouvement d'un point), composition des vitesses uniquement dans le cas où le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation.

PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DE LA CLASSE DE 1^{re} T

LE MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ARRÊTE :

Article premier. — L'Enseignement des Mathématiques dans la Classe de Première T sera donné conformément au programme annexé au présent arrêté.

Art. 2. — Le Directeur général de l'organisation et des programmes scolaires est chargé de l'exécution du présent arrêté dont les dispositions entreront en vigueur à la rentrée scolaire 1962.

Fait à Paris, le 6 mars 1962.

ALGÈBRE — TRIGONOMETRIE — NOTIONS D'ANALYSE

I. Polynôme et fonction homographique.

1° Révision de l'étude, faite dans la Classe de Seconde, du polynôme du second degré, de l'équation et de l'inéquation du second degré, de la fonction :

$$y = ax^2 + bx + c \text{ et de sa représentation graphique.}$$

Comparaison d'un nombre aux racines d'une équation du second degré.

2° Division d'un polynôme ordonné suivant les puissances décroissantes de la variable par $x - a$. Reste. Application.

3° Transformation de la fraction rationnelle $\frac{ax + b}{cx + d}$ conduisant à la forme

$$\frac{a}{c} + \frac{k}{x - h}.$$

Fonction (homographique) $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ de la variable x : existence, sens de

variation, étude lorsque x tend vers l'infini ou vers $-\frac{d}{c}$; représentation graphique dans un système de coordonnées cartésiennes (non nécessairement normé) ; symétries de la courbe représentative.

II. Dérivées.

En ce qui concerne la notion de limite, déjà rencontrée dans l'étude des fonctions précédentes, on se bornera à donner les définitions indispensables ; ainsi que

l'énoncé des propriétés utilisées ; la démonstration de ces propriétés est en dehors du programme.

1° Révision : Dérivée d'une fonction pour une valeur donnée de la variable fonction dérivée.

Dérivée d'une fonction constante, d'une somme de fonctions dérivables, du produit et du quotient de deux fonctions dérivables ; dérivée d'un polynôme.

2° Interprétation géométrique de la dérivée d'une fonction dont la courbe représentative est rapportée à un repère cartésien (non nécessairement normé) ; équation de la tangente en un point de cette courbe.

3° Énoncé, sans démonstration, du théorème permettant de déduire le sens de variation d'une fonction sur un intervalle du signe de sa dérivée.

Application aux fonctions $y = ax^2 + bx + c$, $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ déjà étudiées.

Étude uniquement sur des exemples numériques, de fonctions de la forme : $y = x^3 + px + q$ et $y = ax^4 + bx^2 + c$; courbes représentatives (repère ortho-normé).

4° Définition de la dérivée seconde (en vue de l'étude des mouvements rectilignes).

III. Fonctions circulaires.

1° Extension de la notion d'arc de cercle. Arc orienté. Mesure algébrique d'un arc orienté sur un cercle orienté.

Extension de la notion d'angle de deux demi-droites (ou de deux vecteurs) dans un plan. Angle orienté de deux demi-droites. Mesure algébrique d'un angle orienté de deux demi-droites dans un plan orienté.

Formule de Chasles pour les arcs de cercle orientés et pour les angles orientés de deux demi-droites. Arcs (ou angles) opposés, supplémentaires, complémentaires.

2° Cercle trigonométrique. Sinus, cosinus, tangente, cotangente d'un arc (ou d'un angle de demi-droites) orienté ; fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, de la variable (numérique) x : définition, existence, périodicité.

Relations entre $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$. Relations entre les fonctions circulaires de x , $-x$, $\pi \pm x$, $\frac{\pi}{2} \pm x$.

3° Equations $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$. Usage des tables de valeurs numériques des fonctions circulaires.

4° Démonstration des formules classiques d'addition relatives à :
 $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\operatorname{tg}(a \pm b)$.

Expressions de $\sin 2a$, $\cos 2a$, en fonction de $\sin a$ et $\cos a$. Expressions de $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\operatorname{tg} 2a$ en fonction de $\operatorname{tg} a$.

Transformation en produit de la somme ou de la différence de deux sinus ou de deux cosinus et transformation inverse.

5° Sens de variation des fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$; étude de $\operatorname{tg} x$ (resp. $\operatorname{cotg} x$) (1), lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$ (resp. 0).

6° Inégalité $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Dérivées des fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.

7° Courbes représentatives de ces fonctions (axes rectangulaires).

(1) resp. : lire *respectivement*.

8° Valeurs approchées du $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ et $\cos \alpha \left(\alpha \text{ et } 1 - \frac{\alpha^2}{2} \right)$ pour un « petit angle » ayant pour mesure α en radians.

(En ce qui concerne les fonctions circulaires, l'étude des variations est strictement limitée à celle des fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ de la variable indépendante x , l'étude de variations d'autres fonctions dont l'expression ferait intervenir les symboles sinus, cosinus, tangente ou cotangente, est en dehors du programme).

IV. Applications.

1° Cinématique du point dans le cas du mouvement rectiligne. — Equation horaire ; définition du vecteur-vitesse, du vecteur-accélération ; leurs mesures algébriques.

Mouvement rectiligne uniforme. Mouvement rectiligne uniformément varié.

Diagrammes de ces mouvements.

2° Etude de problèmes, pouvant faire appel à l'ensemble des connaissances des élèves, et dont la résolution conduit à des équations et des inéquations du premier degré ou du second degré, les inconnues pouvant être éventuellement des sinus, des cosinus, des tangentes, des cotangentes.

GEOMETRIE (PLAN ET ESPACE) ET NOTIONS DE GEOMETRIE ANALYTIQUE PLANE

I. Produit scalaire.

Définition du produit scalaire de deux vecteurs, propriétés élémentaires, commutativité. Produit scalaire d'un vecteur et d'une somme vectorielle, distributivité. Produit scalaire de deux sommes vectorielles. Carré scalaire de la somme ou de la différence de deux vecteurs.

Expression des sommes $MA^2 \pm MB^2$ relatives à trois points M, A, B, faisant intervenir les vecteurs définis par le milieu du segment AB et le point M. Somme et différence des carrés de deux côtés d'un triangle.

II. Géométrie plane.

1° Notions sur les polygones réguliers :

Ligne polygonale régulière : définition, cercle circonscrit et cercle inscrit ; application aux polygones réguliers. Symétries d'un polygone régulier.

Valeur des angles d'un polygone régulier convexe de n côtés.

Carré, octogones réguliers, hexagone régulier, triangle équilatéral.

2° Périmètre du cercle (on admettra l'existence d'une longueur supérieure au périmètre de tout polygone convexe inscrit, et inférieure au périmètre de tout polygone convexe circonscrit). Indications sommaires sur le principe de la méthode des périmètres pour le calcul du nombre π .

Longueur d'un arc de cercle. Radian.

3° Aires de polygones plans : rectangle, triangle, parallélogramme, trapèze.

Rapport des aires de deux triangles semblables.

Aire du cercle. Aire du secteur circulaire.

4° Relations :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A ; \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A ; S = pr, \text{ dans un triangle donné.}$$

(Les problèmes de « résolution de triangles », comportant l'étude de l'existence d'un triangle auquel on impose certaines conditions, sont en dehors du programme).

5° Division harmonique de points alignés ; relations caractéristiques (révision des notions au programme de Seconde T).

Faisceau harmonique de droites (concurrentes ou parallèles). Polaire d'un point par rapport à deux droites ; applications aux constructions élémentaires sur les divisions et faisceaux harmoniques.

Ensemble des points dont le rapport des distances à deux droites est donné.

Segments déterminés sur un côté d'un triangle par les bissectrices de l'angle opposé.

III. Notions de géométrie analytique plane.

1° Plan rapporté à un repère orthonormé :

Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs du plan.

Distance de deux points. Cosinus de l'angle de deux vecteurs ; condition d'orthogonalité de deux vecteurs.

2° Droites définies par une équation cartésienne :

Révision des questions du programme de Seconde T relatives à la représentation analytique de la droite (repère quelconque) ; équation, intersection de deux droites, parallélisme : applications aux équations et inéquations du premier degré à deux inconnues, équation d'une droite définie par deux points ou par un point et sa direction.

Cas d'un repère orthonormé : coordonnées d'un vecteur normal à une droite ; distance d'un point à une droite ; condition d'orthogonalité de deux droites.

(L'étude des représentations paramétriques de droites est en dehors du programme).

3° Plan rapporté à un repère orthonormé :

Equation d'un cercle défini par son centre et son rayon, ou par deux points diamétralement opposés. Problème inverse : étude de l'ensemble des points (x, y) définis par l'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Intersection d'une droite et d'un cercle définis par leurs équations, en se bornant, pour l'étude théorique, au cas où l'origine des coordonnées est le centre du cercle.

4° Définition géométrique de la parabole, foyer, directrice, paramètre, axe, sommet.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé : équation d'une parabole dont l'axe est parallèle à l'un des axes de coordonnées. Application à l'étude de la courbe représentative de la fonction $y = ax^2 + bx + c$ (paramètre, foyer, directrice).

Equation de la tangente en un point à une parabole, rapportée à son axe de symétrie et à sa tangente au sommet, propriétés de la sous-tangente et de la sous-normale relative à l'axe de symétrie.

(L'étude théorique des générations tangentielles de la parabole, l'étude théorique de l'intersection d'une droite et d'une parabole sont en dehors du programme).

5° Equation de la tangente en un point de la courbe représentative de la fonction : $y = \frac{k}{x}$ (axes rectangulaires ou obliques), propriétés simples de cette tangente par rapport aux asymptotes.

IV. Géométrie dans l'espace.

1° Angle d'une droite et d'un plan. Ligne de plus grande pente d'un plan par rapport à un autre.

Aire de la projection orthogonale d'un polygone plan.

2° Définition d'un trièdre, d'un angle polyèdre, d'un polyèdre.

Prismes et pyramides ; sections par des plans parallèles au plan de base.

Volume des parallélépipèdes et des prismes.

Formule de volume d'une pyramide (sans démonstration).

3° Surfaces cylindriques et surfaces coniques, translations (resp. homothéties) laissant invariante une surface cylindrique (resp. conique).

Cas des surfaces à directrice circulaire ; sections par des plans parallèles au plan de la directrice, section par un plan parallèle aux génératrices (cylindre) ou passant par le sommet (cône). Plan tangent.

Volume du cylindre à bases circulaires.

Volume du cône à base circulaire (sans démonstration).

Définition de l'axe d'un cercle. Définition des surfaces cylindriques et coniques de révolution. Formules (sans démonstration) de l'aire latérale d'un cylindre de révolution, d'un cône de révolution, d'un tronc de cône de révolution.

4° Sphère. Symétries. Plan tangent, intersection d'une sphère et d'une droite. Positions relatives d'une sphère et d'un plan ; sections planes d'une sphère. Positions relatives de deux sphères ; intersection de deux sphères. Sphères passant par un cercle donné ; sphère circonscrite à un tétraèdre.

Formules, sans démonstration, de l'aire de la zone sphérique et de l'aire de la sphère.

(L'étude des cônes et cylindres circonscrits à une sphère est en dehors du programme).

5° Puissance d'un point par rapport à une sphère. Plan radical de 2 sphères. Axe radical de 3 sphères. Centre radical de 4 sphères.

6° Ensemble des points dont le rapport des distances à deux points donnés a une valeur donnée.

Ensemble des points dont la somme ou la différence des carrés des distances à deux points donnés a une valeur donnée.

GEOMETRIE DESCRIPTIVE

Représentation du point, de la droite, du plan.

Changement de plan frontal de projection.

Intersection de deux plans.

Intersection d'une droite et d'un plan.

Droite et plan perpendiculaires.

Rabattement d'un plan sur un plan horizontal.

CALCUL NUMERIQUE

Même programme qu'en Seconde T.

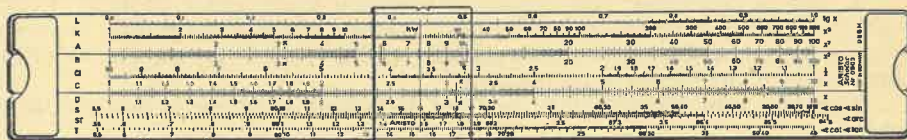
L'exposé du cours et la solution de problèmes donneront lieu toute l'année à un entraînement progressif à des exercices nombreux et variés de calcul numérique.

ARISTO

-SCHOLAR

0903
0903 LL
0903 VS

La règle à calcul appropriée aux besoins de l'Elève

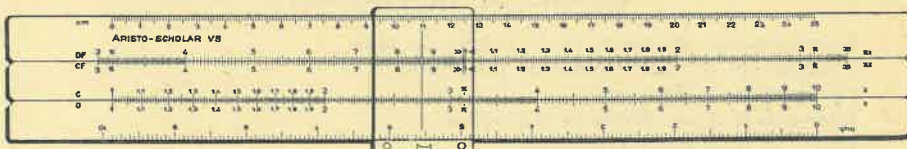


ARISTO-Scholar 0903



ARISTO-Scholar 0903 LL

Recto semblable à celui de la 0903



ARISTO-Scholar 0903 VS-2

Recto semblable à celui de la 0903

De nombreux Professeurs préfèrent à la règle à calcul ARISTO-Scholar 0903 modèle standard, l'ARISTO-Scholar VS pour les avantages que lui procurent ses échelles décalées et leur disposition extrêmement claire.

Certains débutent en utilisant l'ARISTO-Scholar 0903 LL afin de pouvoir se servir de cette même règle à calcul à 2 échelles exponentielles dans les classes supérieures.

Il existe un grand modèle de démonstrations pour le tableau noir de chaque règle à calcul.

Agence générale pour la France:

LA DIFFUSION GÉNÉRALE FRANÇAISE

17, rue du Colisée · PARIS 8ème · ELYsées 95—31

DENNERT & PAPE · ARISTO-WERKE · HAMBURG

CHRONIQUE DES REFORMES

Le Ministère de l'Education Nationale a présenté aux Conseils d'Enseignement un projet d'unification des classes de Quatrième et Troisième Modernes et Techniques qui a suscité de vives et diverses critiques. Il est d'abord surprenant que ces projets aient été présentés après de longs mois pendant lesquels certains Conseils, celui du Second Degré en particulier, n'ont jamais été réunis.

Le Bureau de l'A.P.M. a été invité par la Fédération des Associations de Parents d'Elèves à s'associer à une motion de protestation. Le Bureau, tout en désapprouvant les projets *tels qu'ils étaient présentés* (on va voir plus loin que cette mention est indispensable), n'a pas cru pouvoir signer cette motion dont tous les attendus ne pouvaient convenir à notre Association. Il a cependant répondu aux auteurs de cette motion la lettre suivante :

Monsieur, le Bureau de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public remercie M. le Président de la Fédération des Associations de Parents d'Elèves des Lycées et Collèges français de lui communiquer la motion relative à la réforme de l'organisation des études dans le Second Degré.

Il exprime à son tour son hostilité aux méthodes de travail actuelles de l'Administration du Ministère de l'Education Nationale. Celle-ci s'abstient de réunir le Conseil de l'Enseignement du Second Degré et envisage de prendre par arrêtés d'importantes décisions qui exigeraient une étude préalable approfondie et devraient continuer à faire l'objet de décrets.

Le Bureau de l'Association des Professeurs de Mathématiques trouverait en particulier extrêmement grave pour la formation des futurs scientifiques la suppression de la deuxième langue dans les sections Modernes.

Veuillez agréer, Monsieur...

Le Bureau de l'A.P.M.

*
**

Il est indispensable de préciser aussi quelques points sur la manière dont le Ministre actuel conçoit la réforme de l'enseignement. Rappelons donc les faits :

1° Jusqu'ici, dans les Quatrièmes et les Troisièmes des sections Modernes des Lycées, l'enseignement comporte deux langues vivantes étrangères obligatoires ; l'horaire de Mathématiques est de 3 heures. Dans les Collèges d'Enseignement général, une seule langue vivante est enseignée ; l'horaire de Mathématiques est de 4 heures.

2° Le projet initialement présenté par le Ministre, et sur lequel nos représentants dans les divers Conseils ont été invités à se prononcer, supprimait l'enseignement de la deuxième langue dans les classes de Quatrième et Troisième des Lycées.

3° Après les votes des Conseils d'Enseignement et du Conseil Supérieur, le Ministre semble s'être rallié au rétablissement et à la généralisation de la deuxième langue.

On rapprochera cette suite de faits de la déclaration officielle suivante du même Ministre :

« En fait, les critiques qui ont été suscitées récemment dans une partie de l'opinion sont nées à partir du moment où il a été envisagé de faire bénéficier les Collèges d'Enseignement général, dans les classes de Quatrième et de Troisième, du même programme moderne que les Lycées. »

On dira que, l'affaire ne concernant pas l'Enseignement des Mathématiques, nous n'avons pas à nous en mêler. Ce n'est pas mon avis. La défense et le progrès de l'Enseignement des Mathématiques ne peuvent bénéficier de l'emploi de tels procédés par lesquels les carpes deviennent des lapins et tous les élèves, si j'ose dire, des dindons.

En tant que professeurs de Mathématiques soucieux des profondes réformes que réclame notre enseignement dans son ensemble et celui des Mathématiques en particulier, nous avons de bonnes raisons de nous soucier de l'enseignement des langues vivantes :

1° Comme scientifiques, nous pensons qu'un enseignement moderne et technique doit comporter deux langues vivantes étrangères. Celles-ci jouent un rôle de premier plan, au xx^e siècle, dans une culture générale adaptée aux conditions de l'époque. Pour de futurs scientifiques ou techniciens, l'usage et la connaissance de deux langues sont des moyens d'action irremplaçables.

2° Mais, d'un point de vue plus restreint, en tant que professeurs de l'Enseignement Public, nous avons également des réformes à faire adopter concernant notre spécialité. Il est donc bon que nous soyons exactement avertis de la conception qu'a le Ministre de l'Education Nationale sur ce que parler veut dire. Même lorsque « parler » signifie ici « écrire ».

La crise de recrutement.

Les journaux ont fait état d'un rapport de la Commission des Affaires Culturelles de l'Assemblée Nationale sur l'insuffisance des effectifs de professeurs. On se réjouira avant tout d'apprendre qu'une telle Commission existe et qu'elle utilise les brefs loisirs que lui laissent les importantes sessions parlementaires « que vous savez » pour étudier la crise de recrutement.

Nous regrettons cependant avoir ignoré que les honorables Parlementaires étaient partis enquêter. Nous nous serions fait un plaisir de verser à leur dossier les rapports établis par la conférence des 3 et 4 décembre 1960 organisée par l'A.P.M., l'Union des Physiciens et l'Union des Naturalistes. On sait que les conclusions de cette conférence ont été égarées par M. Paye lorsqu'il a déménagé du bureau de la Direction générale de l'Organisation scolaire et des Programmes pour celui de Ministre. Nous avons heureusement gardé des copies (cf. *Bulletin* 214 bis, p. 227) et nous en expédions aussitôt un exemplaire au Président de ladite Commission.

Il est d'ailleurs remarquable (et combien flatteur pour nous !) de constater les nombreux points communs au rapport de la Commission parlementaire et à nos modestes travaux : vœu de voir autoriser l'attribution de demi-services (en particulier pour des femmes chargées de famille), rendre les traitements des débutants compétitifs avec ceux de l'Industrie, nécessité de favoriser la formation scientifique et pédagogique continue des maîtres, etc...

Il est également vrai qu'il y a aussi de sérieuses divergences. Nous ne sommes pas du tout acquis à cette idée d'une « prime de rendement » pour les équipes de professeurs ayant plus de 80 % de réussites aux examens ; nous ne désirons pas avoir à passer tous les cinq ans des examens qui feraient, paraît-il, la preuve de notre qualification ; nous ne souhaitons pas la multiplication des catégories de professeurs, etc...

Mais ces divergences ne peuvent empêcher la discussion et nous sommes prêts à discuter avec qui le désirera. Même avec cet honorable parlementaire qui est présenté comme ancien professeur de lycée et qui écrit, sur notre compte, les amènes propos que voici :

« Il n'est pas d'observateur sérieux qui ne signale depuis des années le relâchement de la discipline, du travail, de la conscience professionnelle : absences fréquentes pas toujours justifiées, mauvaise volonté pour tout travail en dehors des heures de cours : correction de copies, d'examens, conseils de classe.

« ...La licence, l'agrégation, le C.A.P.E.S. sont des examens ou des concours

d'érudition qui garantissent le savoir, mais non la capacité de le faire passer dans le cerveau des élèves. Ils peuvent faire titulariser des inaptes, dont il sera impossible de se débarrasser, sinon par l'avancement de la méthode. »

Les professeurs en exercice, quel que soit l'affadissement de leur conscience professionnelle, ont trop de sens civique pour mettre en doute la qualification d'un honorable parlementaire à parler de ce qu'il ne connaît pas bien. Il ignore en effet que le CAPES comporte une année de stage, que l'érudition tant critiquée des examens et concours dont il parle semble bien être une vertu en comparaison de la précipitation dans laquelle son absence précipite le jugement.

Il est en tout cas assez plaisant, lorsqu'on est professeur en exercice dans l'Enseignement Public, de se voir reprocher certain manque de conscience professionnelle par un ancien professeur qui, sauf erreur de notre part, a voté la loi d'aide à l'enseignement privé, enlevant ainsi à l'Enseignement Public de nombreux moyens qui lui font cruellement défaut.

Les robinets de papa.

Dans la *Voix des Parents* de mars 1962, M. E. M., de Saint-Germain-en-Laye, écrit sous le titre « Nous ne sommes plus au pays de Descartes » :

« Il est évident que l'introduction de la symbolique des ensembles dans les programmes du premier cycle nous amène aux limites du ridicule ; et, pourtant, n'est-ce pas l'aboutissement logique d'une suite d'erreurs dont l'une des premières, — et non la moindre —, fut la suppression quasi totale de l'enseignement de l'arithmétique ? N'est-il pas insensé qu'un élève de Première ou de Mathématiques Élémentaires soit aujourd'hui incapable de résoudre les bons vieux problèmes de partage, de robinets et de courriers sans le secours des x et des y et sans mettre en branle l'appareil aveugle des équations algébriques ? »

C'est évidemment sans malice que nous présentons cet extrait. Il nous paraît utile d'attirer l'attention de *tous* les professeurs sur le caractère malheureusement non exceptionnel de telles réactions. Cela provient, évidemment, d'une mauvaise information sur les programmes tels qu'ils sont (voir par exemple l'importance de l'arithmétique en Cinquième), les réformes telles qu'elles se font peu à peu (voir les notions d'arithmétique rappelées dans les nouveaux programmes de Seconde) et telles qu'elles devraient se faire (voir les projets de programmes pour les classes non-scientifiques dans le présent *Bulletin*).

Je dois à l'obligeance de notre Collègue Brachet la réunion de lettres publiées par *Le Figaro* sous le titre « Manuels scolaires et charabia ». Nous en prenons pour notre grade ! Mais qu'est-ce que le charabia ? Une notion très relative certainement. Voici l'exemple qu'en donne un monsieur A. G. (de Saint-Cloud) ; il cite cet extrait du livre de Seconde de Lentin et Girard (collection Maillard) : « La même conjonction OU possède deux sens différents que certaines langues distinguent... Le OU est *exclusif* (ou *alternatif*)..., le OU est *inclusif* (ou *disjonctif*). »

Et pourtant, si j'écris :

1° « M. A. G. lit trop vite ou il ne comprend pas ce qu'il lit »,

2° « De deux choses l'une, ou M. A. G. lit trop vite, ou il ne comprend pas ce qu'il lit »,

j'ai la conviction de ne pas dire la même chose ; à la place de M. A. G., je préférerais la première proposition dans laquelle le ou est *disjonctif*, ce qui laisse la place à l'interprétation la plus favorable : texte non compris parce que lu trop vite.

En tout cas, sachons gré à ces lecteurs ou parents d'élèves qui sont si attentifs à notre enseignement parce qu'ils savent bien son importance. Soyons assurés que leur appui ne nous manquera pas lorsque nous demanderons à notre administration de faire tout ce qu'elle doit faire pour renforcer la qualification des maîtres. Et soyons également assurés que ces critiques se montreront de bons défenseurs lorsqu'ils auront bien saisi les raisons de notre fièvre réformatrice.

G. W.

P.-S. — J'allais envoyer les derniers manuscrits à notre imprimeur lorsque j'ai lu un article de M. Soula, Professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Montpellier, sur « La théorie des ensembles et l'enseignement des Mathématiques » dans l'*Education Nationale* du 15 mars 1962.

M. Soula reconnaît l'importance fondamentale de la théorie des ensembles en Mathématiques, mais met en doute ses vertus dans l'enseignement élémentaire ; c'est évidemment son droit le plus strict.

Il compare la situation actuelle à celle du début du siècle lorsque les manuels de Carlo Bourlet se proposaient d'exposer et de répandre la géométrie de Méray. Celle-ci, publiée en 1874, suivait de peu le célèbre « Programme d'Erlangen » (1872) dans lequel Félix Klein mettait en valeur l'importance des groupes pour ordonner l'étude des propriétés invariantes par transformation. Et puisque l'enseignement élémentaire n'a pas réussi dans cette voie, dit M. Soula, avec la théorie des ensembles, il en sera de même et pour la même raison : c'est trop abstrait !

Je ne résiste pas au besoin de poser diverses questions :

1° Est-il exact que les idées de Klein soient mortes et enterrées ? Même si les programmes officiels ne font pas encore explicitement mention du mot groupe, la tendance dans l'enseignement tel qu'il vit n'est-elle pas de mieux distinguer le domaine affine du domaine métrique, par exemple ? N'y aurait-il pas avantage à ce que cette distinction essentielle soit plus franchement formulée ? Et cela à quel niveau ?

2° Est-il exact que l'introduction du vocabulaire et des notions essentielles de la théorie des ensembles soit une surcharge, une difficulté supplémentaire pour les débutants ? Cette introduction va-t-elle nécessairement vers plus d'abstraction, ou bien plutôt ne consiste-t-elle pas à mettre l'abstraction à sa place (phase d'un cycle qui opère de l'expérimentation plus ou moins concrète à une abstraction plus ou moins « avancée ») ?

Pourquoi le *Bulletin* de l'A.P.M. ne ferait-il pas une utile publicité à toutes les réponses qui lui parviendront, en particulier de la part de ceux qui enseignent les débutants ?

M. Soula conclut son article : « Je demande seulement que l'enthousiasme soulevé par les richesses anciennes ou nouvelles des Mathématiques ne fasse pas perdre le bon sens. »

« Enthousiasme », on comprend ce que M. Soula veut dire, « ça ne durera pas », et le bon sens, c'est le sien. Je ne suis pas content, parce que ce n'est pas le mien. Et vous, qu'en pensez-vous ?

PROFESSEURS AVEUGLES

Depuis 1940, toute fonction enseignante était interdite aux aveugles. Un décret de 1959 a amélioré leur situation : ils peuvent maintenant se présenter aux concours de recrutement de l'Enseignement du Second Degré et de l'Enseignement technique, mais seulement pour la philosophie, les lettres et les langues vivantes dans le second cycle, et pour l'éducation musicale dans les deux cycles.

Tout enseignement scientifique reste encore interdit aux aveugles. Pourtant, la Commission chargée de préparer le décret avait été favorable à l'enseignement des Mathématiques par les aveugles. Le Conseil Supérieur de l'Education Nationale a été d'un avis contraire. Pourquoi ?

Je crois qu'on a cru qu'un aveugle ne pouvait pas enseigner les Mathématiques parce qu'il lui était impossible d'écrire au tableau. Cela ne serait (peut-être) exact que pour quelqu'un qui aurait perdu la vue avant l'âge scolaire. Mais le décret lui-même fournit le moyen de parer à une telle incapacité d'un aveugle. Le décret précise en effet que, « à chaque professeur aveugle, sera adjoint un fonctionnaire agréé par lui et chargé de l'assister ». Cette assistance ne doit pas être limitée au maintien de la discipline, mais peut normalement comporter l'utilisation du tableau. Je signale

que la question des figures est résolue par l'emploi de figures préfabriquées jouant le même rôle que les cartes murales et les planches de sciences naturelles.

A-t-on ignoré deux précédents récents ou bien a-t-on négligé d'en tenir compte ? L'un de ces précédents est le cas d'un élève de l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud qui, ayant perdu la vue en 1915 par suite d'une blessure de guerre, a pu néanmoins terminer ses études et faire une longue carrière universitaire sans aucun incident. En dernier lieu, il était professeur de Mathématiques au Collège des Sables-d'Olonne. Un Inspecteur général m'a déclaré que son enseignement était d'excellente qualité.

Je ne suis pas qualifié pour donner un avis sur le second cas, mais les membres de l'A.P.M. qui ont été étudiants, soit à Strasbourg entre les années 1919 et 1922, soit à Rennes entre 1922 et 1957, pourront donner un avis sur l'enseignement des Mathématiques par un aveugle.

On se trompe fréquemment, dans un sens ou dans l'autre, sur les possibilités des aveugles. C'est pourquoi j'ai jugé utile d'informer mes collègues de l'A.P.M. Ainsi, ils ne seront pas surpris s'ils apprennent, un jour ou l'autre, que des démarches sont entreprises pour obtenir l'amélioration du décret de 1959 en faveur des mathématiciens aveugles.

L. ANTOINE, *aveugle de guerre,*
Professeur honoraire de Mathématiques
à la Faculté des Sciences de Rennes.

CHRONIQUE DES REGIONALES

Clermont-Ferrand. — La nouvelle Régionale a constitué son Bureau présidé par M. Blanc, professeur à la Faculté des Sciences. Le Secrétaire général est notre Collègue Schaeffer, professeur à l'Ecole Normale d'Instituteurs, membre du Comité de l'A.P.M.

Cette nouvelle Régionale nous adresse le communiqué suivant :

COMMEMORATION DU TROISIEME CENTENAIRE DE LA MORT DE BLAISE PASCAL

1. La Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand organise, du 4 au 8 juin 1962, un colloque de Mathématiques (Logique, Probabilités, Analyse numérique, Physique mathématique). Les membres de l'A.P.M. qui désirent participer à ce colloque sont invités à se faire connaître, le plus tôt possible, au Secrétariat Scientifique : 3, rue Kessler, Clermont-Ferrand.

2. La Faculté des Sciences de Clermont organise, du 3 au 11 juin 1962, dans les locaux rénovés de l'ancien Lycée Blaise-Pascal, une exposition de machines à calculer avec le concours du Palais de la Découverte, du Conservatoire National des Arts et Métiers et des principaux constructeurs.

Cette exposition comportera une partie rétrospective consacrée à l'histoire de la machine à calculer de Pascal à nos jours et une partie d'actualité où plusieurs ordinateurs traiteront des problèmes scientifiques à la demande du public.

3. La Régionale de l'A.P.M. de Clermont-Ferrand invite tous les professeurs de Mathématiques à assister à deux conférences qui seront données le samedi après-midi 9 juin 1962 sur le développement des machines à calculer et ses conséquences pédagogiques et à participer à la visite de l'exposition qui sera spécialement organisée à l'intention des professeurs de Mathématiques le dimanche matin 10 juin.

Les professeurs intéressés pourront prendre contact avec M. Schaeffer, 21, rue Colbert, à Clermont-Ferrand.

Nancy. — (N.D.L.R. : Dans le Bulletin 221, p. 122, nous avons laissé échapper le paragraphe ci-dessous ; nous prions les lecteurs et notre Collègue Muller de nous excuser. L'étude de notre Collègue paraîtra dans le Bulletin 223).

Dans la séance du 7 décembre, R. Muller, du lycée de Gérardmer, donne des développements extrêmement élégants de géométrie dans un espace ponctuel associé à un espace vectoriel sur un corps fini. Notre Collègue a pu associer ses élèves de Mathématiques Élémentaires à son travail.

Le bloc-notes de l'A.P.M.

● Une école d'été.

La Fondation des Universités néerlandaises pour la coopération internationale nous prie d'annoncer qu'elle organise une session d'été, du 1^{er} au 11 août, à Nyenrode Castle, Breukelen (Pays-Bas), sur le thème : « Distribution asymptotique, modulo 1 ».

Les conférences auront lieu en anglais. Renseignements et inscriptions : The Registrar, NUFFIC, 27, Molenstraat, The Hague (Pays-Bas).

● Journées Decroly.

Nous regrettons de n'avoir pu annoncer plus tôt l'organisation, par l'école Decroly, de Bruxelles (Directrice : Mme Libois), les 9 et 10 avril, de deux journées pour la présentation des résultats d'expériences faites au niveau secondaire (12 à 18 ans), dans le cadre de la réforme préconisée par l'O.E.C.E. (*programme de Dubrovnik*, 1960).

Nous espérons pouvoir publier des échos de ces intéressantes journées.

● Les Bulletins de l'A.P.M.

Au programme du bref 3^e trimestre de cette année scolaire, deux Bulletins normaux en mai et juin, ainsi que la parution du Cours de l'A.P.M. et la brochure réunissant les textes de notre collègue Balibar, « En lisant Gödel ».

Evidemment, nous ne promettons pas trop fort : nous ferons de notre mieux. Et, pour éviter d'autres retards en 1962-63, nous pensons publier le Bulletin normal de rentrée *avant* celui qui réunit les sujets de concours. Ce dernier serait donc retardé à novembre et joint à la 42^e année.

A l'impression :

LE COURS DE L'A.P.M.

1. Groupes, anneaux, corps

par André et Germaine REVUZ

Un volume de 176 pages (format du *Bulletin*) sur papier couché,
couverture « surfin chamois »

*
**

Ce volume contient la rédaction complète des conférences faites en 1960-61 par notre Président André REVUZ. Ces exposés ont été rédigés et complétés de la solution détaillée des nombreux exercices par Mme Germaine REVUZ.

Spécialement conçues pour les professeurs, ces conférences ont eu et continuent d'avoir le plus grand succès. L'édition en volume mettra à la disposition de tous les Collègues, qu'ils aient déjà suivi les conférences ou qu'ils n'aient pu le faire, un outil de travail unique en son genre. Cours de mathématiques pour « grands commençants », comme dit aimablement son auteur, cet ouvrage est conçu pour aider chacun de nous à enrichir sa culture mathématique et renouveler son enseignement.

*
**

L'édition du volume est prévue pour le printemps 1962. Il sera alors mis en vente au prix de 20 NF (pour les membres de l'A.P.M., 15 NF).

Tous les Collègues ont avantage à souscrire :

- vous bénéficierez d'un tarif réduit : 10 NF ;
- vous aiderez le Bureau de l'A.P.M. dans son travail d'édition ;
- vous soulagerez la Trésorerie de l'A.P.M.

SOUSCRIVEZ : c'est votre devoir.

FAITES SOUSCRIRE VOS COLLÈGUES : c'est votre avantage.

Souscrivez sans attendre : prolongation des délais de souscription au 30 avril 1962. Virement au c.c.p. de l'A.P.M. en précisant :
Souscription Cours A.P.M. 1.

mathématiques collection Bréard

Après avoir acquis dans les classes du 1^{er} cycle des techniques de calcul arithmétique, algébrique, vectoriel ; après avoir utilisé les symétries, l'élève doit, dans le second cycle et dès la Seconde, mettre au point ses connaissances mathématiques et envisager une construction solide des Mathématiques.

classe de 2^e A' C M M' 576 p. 17,50 NF

A partir de notions élémentaires sur les ensembles et les correspondances, on construit l'anneau $\mathbb{Z}$ des **entiers relatifs**, le corps $\mathbb{Q}$ des **rationnels**, et on aborde le corps $\mathbb{R}$ des **réels**.

Les **fonctions** polynômes et les fonctions rationnelles, les **équations** et les **inéquations** trouvent alors leur place.

Mais, surtout, il est possible d'exposer les **débuts de la géométrie** (géométrie affine et géométrie métrique euclidienne du plan et de l'espace) de façon satisfaisante. La métrique euclidienne se déduit du **produit scalaire** ; les **isométries** sont présentées sans utilisation de la notion fautive de superposition.

classe de 2^e A B 430 p. 11 NF

Le manuel, dans le même esprit que celui de 2^e A', C, M, M' mais plus réduit, contient les développements du programme commun à tous les élèves et du programme complémentaire facultatif.

Les **nombres** ne sont pas « construits » comme en 2^e A', C, M, M', mais leurs propriétés sont étudiées dans une optique moderne.

La **géométrie** est largement développée, tant dans le plan que dans l'espace ; la superposition des figures n'est pas utilisée.

classe de 1^{re} A' C M M' 350 p. 9,50 NF

Un certain nombre de notions envisagées en Seconde A', C, M, M' sont révisées et complétées : équations, inéquations, fonctions élémentaires et surtout débuts de la géométrie de l'espace réel $\mathbb{R}$.

La **géométrie affine** et la **géométrie métrique** euclidienne sont bien séparées ; les propriétés affines et les propriétés métriques des figures sont nettement mises en évidence ; la **trigonométrie** est largement traitée.

Les idées de continuité de limite, introduites par la **notion de « voisinages »**, permettent l'étude de la dérivation et des variations des fonctions.

Les **aires** des surfaces, planes et gauches, les volumes des solides sont présentés simplement. Les polygones réguliers mènent au périmètre du cercle, c'est-à-dire ramènent à la notion de limite.

De **nombreux problèmes**, judicieusement choisis, sont traités complètement et constituent deux leçons très importantes.

COURS DE MATHÉMATIQUES

R. MAILLARD

NOUVEAUTÉ :

Nouveau cours de mathématiques
conforme aux programmes de Première A'CMM
prescrits par l'arrêté du 2 Mai 1961



G. GIRARD et A. LENTIN

ALGÈBRE CLASSES DE 1^{re} A'CMM'

TRIGONOMÉTRIE ET NOTIONS D'ANALYSE

Cartonné 16,5×24 cm., 336 pages, illustré. **8,80 NF**

GÉOMÉTRIE CLASSES DE 1^{re} A'CMM'

Cartonné 16,5×24 cm., 272 pages, illustré. **7,60 NF**

Déjà parus dans ce nouveau cours :

Classe de Sixième : Mathématiques, par R. CAHEN **5,90 NF**

Classe de Cinquième : Mathématiques, par R. CAHEN **7,90 NF**

Classe de Quatrième : Mathématiques, par R. MAILLARD et E. CARALP... **7,90 NF**

Classe de Troisième : Mathématiques, par R. MAILLARD, R. CAHEN, E. CARALP **9,50 NF**

Classes de Seconde A'CMM' : Mathématiques, par G. GIRARD et A. LENTIN **12 NF**

Classes de Seconde AB : Mathématiques, par R. CAHEN (sous presse)

PARAIT ÉGALEMENT CETTE SEMAINE

ANDRÉ MASSÉ,

LA PRATIQUE DES OPÉRATIONS

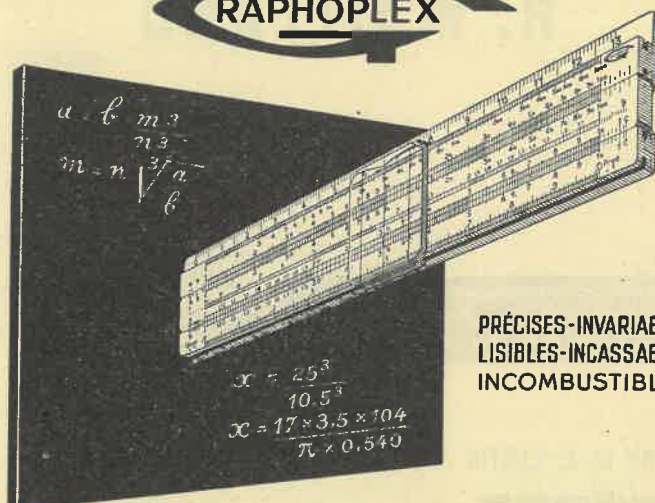
Arithmétique - Système métrique - Nombres complexes

Broché 13,5×21 cm., 64 pages. **2 NF**

CLASSIQUES HACHETTE

79, Boulevard Saint-Germain, Paris 6^e

RAPHOPLEX



**PRÉCISES-INVARIABLES
LISIBLES-INCASSABLES
INCOMBUSTIBLES**

Règles à Calculs

INSTRUMENTS DE DESSIN

Pochettes de compas. Qualité supérieure

Equerres et Règles en plexiglas transparent

☆☆☆

Tarifs spéciaux pour commandes groupées

Catalogue sur demande

SEREB

148, rue de Noisy-le-Sec, Bagnolet

AVRon 11-83 - 18-65

→ **NOUVEAUTÉS**

Sous la direction de **R. DEDRON**

Inspecteur général de l'Instruction publique

ARITHMÉTIQUE

avec notions d'**AXIOMATIQUE**

CLASSE DE MATHÉMATIQUES

par **G. ANGLADE**

Professeur agrégé au Lycée Lakanal

Prix : **13,50 NF**

Spécimen sur demande

COLLECTION « REDECOUVERTE »

dirigée par **R. DEDRON**

Inspecteur général de l'Instruction publique

CAHIER DE TRAVAUX PRATIQUES DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE 5^e ARITHMÉTIQUE

par **E. ARNAUD**

Professeur au Lycée Lavoisier

Prix : **3,90 NF**

P. AUBRY

Professeur agrégé au Lycée Louis-le-Grand

Déjà parus : Classe de 5^e GEOMETRIE **3,90 NF**
Classe de 6^e **3,90 NF**

Spécimens sur demande

Tous les professeurs susceptibles d'être examinateurs au Baccalauréat ont intérêt à se procurer

LE BACCALAURÉAT 1962 GUIDE DU CANDIDAT

par **R. ECHARD**

Inspecteur de l'Académie de Paris

Prix : **4,80 NF**

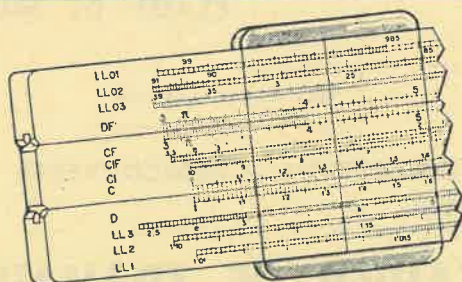
Le nouveau Guide du candidat au Baccalauréat ne contient pas de circulaires contradictoires et **périmées**.

Toutes les instructions et circulaires parues jusqu'en novembre 1961

en vente chez votre libraire

→ **MAGNARD**

122, boulevard Saint-Germain, Paris, 6^e



NEPERLOG

(Double-face)

Correspondances entre les échelles de chaque face assurée par un curseur double-face.

Echelles. Log-Log e^x et e^{-x} permettant les calculs des puissances et racines positives ou négatives des nombres compris entre : 1,01 à 10^5 et de 0,991 à $2 \cdot 10^{-5}$.

Echelles πx et $\frac{1}{\pi x}$ évitant les cas hors règle.

Possibilités de calculs étendues avec un minimum de manipulations.



BREVETÉ S. G. D. G.

21, Rue de Montsouris - PARIS (XIV^e)

Tél. : POR 38-10

CHEZ VOTRE FOURNISSEUR

MASSON et C^{ie}, Éditeurs à PARIS

COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES

G. CAGNAC

L. THIBERGE

Inspecteurs généraux de l'Instruction publique

NOUVEAUTE :

ALGÈBRE

2^e

A', C, M et M'

E. GILET

Censeur des Etudes du Lycée J.-B.-Say

Y. CROZES

Professeur agrégé au Lycée Henri-IV

Programmes 1960

Un volume, avec figures et exercices ; cartonné **19 NF**

EN PREPARATION :

GÉOMÉTRIE

2^e

A', C, M et M'

E. GILET

Censeur des Etudes du Lycée J.-B.-Say

Y. CROZES

Professeur agrégé au Lycée Henri-IV

PROGRAMMES 1960

Un volume, avec figures et exercices ; cartonné **Fin 62**

LIBRAIRIE CLASSIQUE EUGÈNE BELIN

8, rue Férou, PARIS, VI

MATHÉMATIQUES

Nouveaux manuels conformes aux programmes 1960-1961

par M. MONGE, Professeur agrégé

classe de 2^e A', C, M, M', **Algèbre** 10,00

— d^e — **Géométrie** 11,50

classe de 2^e A, B **Algèbre et Géométrie** 13,50

classe de 1^{re} A', C, M, M' **Algèbre et Trigonométrie**
..... mai 1962

— d^e — **Géométrie** 15 septembre 1962

classe de 1^{re} A, B en préparation

M. MONGE et P. RUFF

classe de **Mathématiques Élémentaires** (programme 1962)

Volume n° 1, « **Ensembles et nombres** », à paraître en 2 fascicules.

1^{er} fascicule : **Notions simples sur les ensembles et extensions de la notion de nombre** 15 sept. 1962

2^e fascicule : **Arithmétique** 1^{er} janvier 1963

G. CASANOVA

Professeur agrégé au Lycée Louis-le-Grand

PROPÉDEUTIQUE, GRANDES ÉCOLES

Relativité restreinte 14,50

BACCALAURÉAT 1962



NOUVEAUTE

VIENT DE PARAÎTRE :

LA COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES AU BACCALAURÉAT

1^{re} partie, séries A', C, M et M'.

*Exercices et Problèmes résolus
Méthodes de recherche, Conseils, Commentaires*

par

A. COMBES

Professeur au Lycée Voltaire
à Paris

et

A. BENOIT

Professeur au Lycée Condorcet
à Paris



Volume 14 X 21 cm, de 192 pages, sous couverture illustrée, plastifiée . . 8 NF



50 exercices et 21 problèmes résolus couvrant la totalité du nouveau programme et conformes aux modalités actuelles de l'examen.

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD - GRENOBLE

9, Grande Rue - Téléphone 44.01.96

6 bis, rue de l'Abbaye - Tél.: ODE 60.90 - PARIS

COURS DE MATHÉMATIQUES

par ROUX et MIELLOU
Professeurs au Lycée de Grenoble

TARIF JUIN 1961
Taxe locale incluse

Arithmétique 6°	épuisé
Dessin géométrique 6° et 5°	1,88 NF
Arithmétique 5°	4,58 NF
Géométrie 5° et 4° - Programme 1958	6,72 NF
Arithmétique et Algèbre 4° - Programme 1958	5,10 NF
Arithmétique et Algèbre 3°	5,10 NF
Géométrie 3° - Programme 1958	6,52 NF
Géométrie 5°, 4°, 3° - Programme 1958	13,25 NF
Algèbre 2° A.B.C.M. - Programmes 1947	9,18 NF
Compléments de mise à jour au 18 juillet 1960, Algèbre 2° C.M.	1,62 NF
Géométrie 2° A.B.C.M. - Programmes 1947	9,18 NF
Compléments de mise à jour au 18 juillet 1960, Géométrie 2° C.M.	6,12 NF

NOUVEAUTÉS :

ALGÈBRE 2° A'CM et M' - Progr. 18 juillet 1960	10,18 NF
GÉOMÉTRIE 2° A'CM et M' - Progr. 18 juill. 60	15,— NF
ALGÈBRE et TRIGONOMETRIE 1 ^{re} - Toutes sections	12,24 NF
GÉOMÉTRIE 1 ^{re} A'CM et M' - Progr. 2 mai 1961	10,20 NF

GÉOMÉTRIE 1 ^{re} A.B. - Progr. 2 mai 1961	A paraître
ALGÈBRE 1 ^{re} A.B.	4,38 NF

Cet ouvrage est toujours valable, le programme 1961 n'étant applicable qu'en 1962 pour ces sections.

QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAUREAT, 1 ^{re} partie, A.B.C.M.	5,14 NF
--	---------

N. B. — Il n'existe pas de corrigés d'exercices pour ces ouvrages