

PROJET DE PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DANS LES CLASSES NON-SCIENTIFIQUES

Ce texte fait suite au projet, pour les classes de Seconde A et B, publié dans le *Bulletin* 215 (p. 393). Comme pour ce dernier, un premier projet, présenté par M. Barbut, a été étudié et révisé par la Commission des programmes de l'A.P.M. Le programme proprement dit et les commentaires ont été rédigés par M. Barbut, d'après les observations de la Commission.

Classe de Première

I. — ALGÈBRE

1° *La transitivité* : Notion de préordre (relation réflexive et transitive). Exemples (implication logique, chemin dans un réseau, etc...). Préordre d'un réseau.

Préordres antisymétriques ou ordres. Préordres symétriques : relations classificatoires (d'équivalence) ; partitions. Partition d'un ensemble associée à une application de cet ensemble dans un autre.

Ensembles quotients. Sous-partition d'une partition.

Tableau et réseau d'une classification. Préordres qui ne sont ni des ordres ni des classifications : ordre quotient par la relation d'équivalence : $x \geq y$ et $y \geq x$ (où $\geq$ désigne la relation de préordre).

Commentaires : Ce paragraphe devra être traité en soulignant le rôle fondamental de la transitivité : seules, les relations transitives permettent la classification, la mise en ordre. L'ordre et la classification apparaîtront comme deux extrêmes du préordre. L'absence de cycles dans un ensemble ordonné sera montrée.

Comme exemples de préordres, sur lesquels l'ordre quotient apparaît clairement, on peut citer les classes d'âge, les points de $\mathbb{R}^2$ pour la relation :

$$(x_1, x_2) \geq (x'_1, x'_2) \iff x_1 \geq x'_1$$

les propositions pour l'implication logique (classes de propositions équivalentes) ; enfin, la relation « il existe un chemin de x à y » entre sommets d'un réseau : le préordre du réseau (synonyme : fermeture transitive de la correspondance dont le réseau est une représentation).

Des contre-exemples devront être fournis : relations du type « presque » dans le langage ordinaire, perpendicularité, entre droites d'un plan... Bien sûr, tous les exemples d'ordres ou de classifications déjà vus en Seconde (parties d'un ensemble, diviseurs d'un nombre entier, parallélisme entre droites...) seront revus à cette occasion.

Il faudra enfin bien insister sur l'équivalence entre la donnée d'une partition dans un ensemble et celle d'une application de cet ensemble dans un autre. Cette équivalence sera rappelée chaque fois que l'on parlera de fonctions.

2° *Demi-treillis et treillis* : Notion de demi-treillis (défini à partir de la relation d'ordre : ordre tel que tout couple d'éléments admet un plus petit majorant commun). Exemples (en particulier, arbres). Propriétés de l'opération $\vee$ d'un demi-treillis ; caractérisation algébrique d'un demi-treillis :

$$x \vee x = x \quad x \vee y = y \vee x \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z).$$

Notion de treillis. Exemples de treillis non distributifs ; construction du treillis distributif libre à trois générateurs. Fermeture dans un ensemble ordonné. Fermeture dans un treillis : le plus grand minorant commun à deux fermés est un fermé.

Commentaires : Les exemples de treillis ne manquent pas dans le programme : parties d'un ensemble, diviseurs ; produit cartésien de plusieurs ensembles totalement

ordonnés. Dans le cas des treillis, on a un exemple particulièrement simple du passage du langage combinatoire au langage algébrique par la relation :

$$x \geq y \iff x \vee y = x \iff x \wedge y = y.$$

On commence par le cas, plus simple, du demi-treillis. L'ayant défini à partir de sa relation d'ordre, on montre réciproquement que tout ensemble où est définie une opération idempotente, commutative, associative, est un demi-treillis.

La notion de fermeture pourra n'être introduite qu'à propos des exemples qui en seront trouvés : fermeture transitive d'une correspondance, sous-groupe d'un groupe.

3° *Groupes* : Définition d'un groupe (définition usuelle ou quasi-groupe * associatif) ; leur équivalence. Relations d'équivalence compatibles avec l'algèbre d'un groupe ; sous-groupe, sous-groupes invariants (synonymes : sous-groupes normaux, ou distingués). Cas des groupes finis : théorème de Lagrange sur l'ordre des sous-groupes d'un groupe fini.

Construction de groupes finis d'ordre 6, 8, 12. Décomposition en cycles d'une permutation et classe d'intransitivité d'un groupe de permutations.

Les sous-groupes forment un treillis.

Structure algébrique quotient. Application à l'arithmétique. Produit direct de deux groupes.

Commentaires : En définissant les groupes, il faudra donner des exemples d'opé-

rations non associatives, somme $\frac{x+y}{2}$ dans l'ensemble des nombres ; les groupes

de permutation fourniront des exemples de groupes non commutatifs. Par construction d'un groupe, il faut entendre construction de sa table de Pythagore, d'un diagramme. On pourra également construire des tables de quasi-groupes finis (carrés latins).

La recherche de classifications compatibles à gauche (ou à droite) dans un groupe conduit à une définition des sous-groupes ; ceux-ci peuvent aussi être obtenus comme parties stables minimales contenant une partie donnée. Dans le cas des groupes finis, la correspondance bi-univoque entre classes conduit au théorème de la divisibilité de l'ordre d'un groupe par les ordres de ses sous-groupes.

Sur la structure algébrique quotient d'un groupe par un sous-groupe invariant, on montrera que les classes se composent entre elles suivant une loi de groupe homomorphe au groupe de départ. On reconnaîtra cette structure algébrique sur les exemples de groupes finis dont on aura construit la table, sur les classes résiduelles en arithmétique.

La définition du produit direct de deux groupes sera dégagée d'exemples, et utilisée comme moyen de construire de nouveaux groupes à partir de ceux qu'on connaît déjà ; ce sera l'occasion d'un retour fructueux sur les vecteurs du plan, de l'espace (par rapport à l'addition).

II. — ITERATION DES CORRESPONDANCES

1° *Récurrence et progressions* : Suite : $u_n = u_{n-1} + b$.

Equations aux différences premières et secondes associées. Somme des n premiers termes d'une progression arithmétique.

* Un ensemble dans lequel est définie une opération binaire $\circ$ est un quasi-groupe si l'équation :

$$x \circ y = z$$

détermine toujours, et de façon unique, le troisième élément du triplet (x, y, z) lorsque deux d'entre eux sont donnés.

Suite : $u_n = au_{n-1}$.

Equations aux différences successives associées. Somme des n premiers termes d'une progression géométrique.

Comparaison des deux types de croissance : papiers logarithmiques.

Suite : $u_n = au_{n-1} + b$.

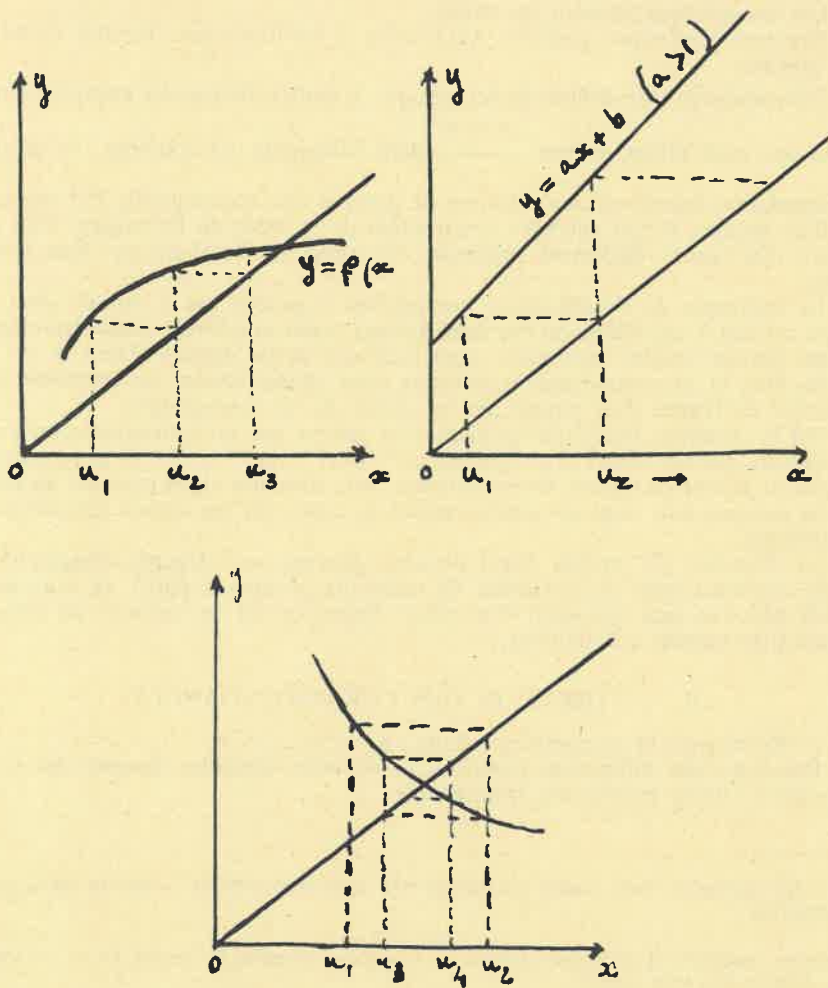
Démontrer que si $a > 1$, a^n tend vers l'infini avec n .

Limite de u_n lorsque $a < 1$ (2° et 3° suite).

Commentaires : Pour le comportement de a^n lorsque $n \rightarrow \infty$, on peut utiliser l'inégalité : $h > 0 : (1 + h)^n > 1 + nh$ facile à démontrer.

Des exemples de progression sont fournis par l'économie (intérêts, croissance) ou la démographie (malthusianisme) ; on peut en trouver d'autres, comme cette réalisation d'une échelle logarithmique qu'est le piano (autre ceux qu'a déjà fournis le cours).

D'autre part, pour les suites du type : $u_n = f(u_{n-1})$, il convient de familiariser les élèves avec l'image :



L'étude des suites proposées dans le programme est une façon d'introduire la notion de limite, dont la définition pourra être dégagée à cette occasion. Le passage d'une suite aux équations aux différences associées prépare l'introduction ultérieure des dérivées ; la sommation des termes successifs d'une suite à celle des intégrales.

2° *Itération d'une correspondance* dans un ensemble fini : Produit de deux correspondances entre ensembles finis ; opération correspondante sur leurs tableaux : produit des deux matrices (0, 1), c'est-à-dire des matrices dont les éléments n'ont que deux valeurs possibles. Cas des matrices de permutation. Union de deux correspondances entre deux ensembles finis ; somme de matrices (0, 1).

Ordre d'inclusion des correspondances entre ensembles finis. Fermeture transitive d'une correspondance dans un ensemble fini.

Commentaires : Ce paragraphe introduit d'une façon extrêmement naturelle les opérations matricielles. Une correspondance de E dans F suivie d'une correspondance $F \times G$ donnera une correspondance $E \times G$, où E, F et G sont des ensembles finis. Les tableaux des deux premières correspondances se composent pour donner celui de la troisième, qui par définition sera le produit des deux tableaux. Le calcul des éléments de ce troisième tableau se fait en regardant, pour un couple : (i, j) , $i \in E$, $j \in G$, s'il existe ou non un $k \in F$ tel que l'on ait : $k \in \Gamma i$, $j \in \Gamma' k$, Γ et Γ' étant les deux correspondances. On est donc amené à comparer la ligne i du premier tableau à la ligne j du second. Le nombre de coïncidences de 1 donne le nombre de chemins $i \rightarrow k \rightarrow j$, de i à j .

Cependant on peut aussi ne pas s'intéresser à ce nombre, mais seulement à l'existence d'un tel chemin ; dans le premier cas, on introduira les matrices à éléments entiers ; dans l'autre, les matrices à éléments booléens ($1 + 1 = 1$).

L'addition des tableaux sera de même définie en considérant l'union de deux correspondances : là aussi, on pourra soit compter, soit faire de l'algèbre booléenne.

Les matrices seront alors définies comme des tableaux dont les éléments a_{ij} sont éléments d'un anneau, et sur lesquelles on peut faire les opérations introduites.

Cette façon d'introduire les matrices présente l'avantage de donner un support intuitif à la théorie des processus de Markoff.

La fermeture transitive d'une correspondance interne servira d'exercice : calcul, sur des exemples simples, de la matrice de : $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma^2 \cup \Gamma^3 \cup \dots$, où Γ est la correspondance étudiée, et $\bar{\Gamma}$ sa fermeture transitive.

III. — TRANSFORMATIONS LINEAIRES

Systèmes d'équations linéaires à deux inconnues et deux équations.

Transformations linéaires dans R^2 : notation matricielle, cas des homothéties. Produit de deux transformations linéaires, produit de deux matrices (2×2), inverse d'une matrice.

Somme de deux matrices (2×2). Exemples de groupes finis de matrices.

Commentaires : Dans le paragraphe précédent, on a appris à composer entre eux des tableaux dont les éléments valent 0 ou 1, suivant deux opérations.

On va étudier maintenant cette structure algébrique systématiquement dans un cas particulier, celui de deux tableaux (2×2), mais avec des coefficients réels quelconques.

Les systèmes d'équations linéaires pourront être interprétés en terme de réseaux (par exemple, en considérant un réseau d'échanges économiques).

La linéarité de la transformation définie dans R^2 par les relations :

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned}$$

sera mise en évidence.

I. — FONCTIONS

1° *Continuité* d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dérivée d'une fonction. Dérivée et tangente à la courbe représentative de la fonction. Exemples de fonctions en escalier ou linéaires par intervalles.

Fonctions usuelles : $y = ax^n$ $n = 2, 3, -1, -2, \dots$

Leurs dérivées, leur variation. (On admet que si la dérivée est positive dans un intervalle, la fonction est croissante). Notion de fonction convexe dans un intervalle.

Dérivée d'une somme de fonctions, du produit de deux fonctions, de l'inverse d'une fonction.

Dérivée d'une fonction, composée, de la fonction réciproque d'une fonction.

Commentaires : Il s'agit d'apprendre à construire des courbes représentatives de fonctions usuelles, à calculer leurs dérivées ; mais l'existence de fonctions en escalier, ou à dérivée en escalier ne doit pas être oubliée *.

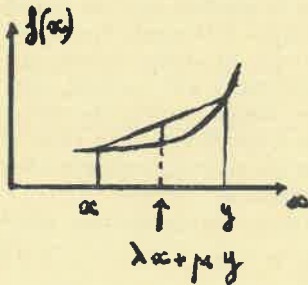
Les théorèmes sur les limites, l'existence des dérivées, peuvent être admis.

On mettra en évidence la linéarité de la dérivation.

Les fonctions convexes seront définies par l'inégalité :

$$\lambda f(x) + \mu f(y) \geq f(\lambda x + \mu y),$$

quels que soient x et y , et λ, μ , tels que : $\lambda \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$.



On démontrera que celles des fonctions étudiées qui sont convexes ont cette propriété.

2° *Primitives* : Primitives d'une fonction (on admet que les primitives d'une fonction identiquement nulle sont les fonctions constantes). Primitives d'une somme de fonctions. Application au calcul d'aires (axes rectangulaires).

Commentaires : Ce paragraphe est déjà au programme de la classe de philosophie.

On pourra introduire les notations telles que : $\int_b^a f(x)dx$, ou mieux : $I(f, a, b)$.

Il serait, d'autre part, important de montrer, à titre d'exercice, et en liaison avec ce qui est fait dans le paragraphe II, que les seules applications dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des fonctions en escalier définies dans un intervalle (ensemble ordonné où les opérations vectorielles ont un sens) satisfaisant à :

- 1) $f \geq g \Rightarrow I(f) \geq I(g)$,
- 2) $I(f + g) = I(f) + I(g)$,

(*) Ce sont celles de la pratique courante.

$$3) \quad I(\lambda f) = \lambda I(f),$$

4) invariance par rapport aux translations,

sont les aires limitées par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des x , etc...

3° *Fonction exponentielle et logarithme* : Recherche des solutions monotones de l'équation fonctionnelle :

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

(fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Convexité de la fonction exponentielle ; dérivées de l'exponentielle de base a (on admettra qu'une fonction convexe a une dérivée à droite et à gauche en tout point). Fonction logarithme définie comme solution monotone de l'équation :

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

ou comme fonction réciproque de l'exponentielle ; ou comme primitive de la fonction a/x , ($x > 0$, $a > 0$) ; équivalence de ces définitions.

Commentaires : On a étudié en Première l'exponentielle sur l'ensemble des entiers ; on a en particulier repéré qu'à l'équation : $u_n = au_{n-1}$, est associée l'équation aux différences : $\Delta_n = a\Delta_{n-1}$ (c'est-à-dire que ces différences croissent comme la fonction elle-même). D'autre part, on a également vu quelles fonctions transforment des sommes en sommes. On va maintenant transformer des sommes en produits et des produits en sommes.

Comme dans le cas de la fonction linéaire, l'équation :

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

sera d'abord étudiée pour des variables entières, puis rationnelles (d'où les notations a^{-n} , $a^{p/q}$ ($a = f(1)$)).

On démontre en particulier

$$\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(f\left(\frac{1}{p}\right)\right)^q \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

Mais il va de soi que le professeur a toute liberté, s'il le désire, de commencer par définir la fonction logarithme (comme primitive de a/x par exemple), puis l'exponentielle comme réciproque de la fonction logarithme. Ce qui est essentiel, c'est que les élèves aient bien compris les isomorphismes entre le groupe additif des nombres réels et le groupe multiplicatif des réels positifs conservant l'ordre. On pourra également à titre d'exercice traiter l'équation :

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

II. — DISTRIBUTIONS DE MASSES ET PROBABILITE

1° Distribution des masses sur un ensemble fini. Masse d'une partie de l'ensemble. Recherche, sur l'ensemble des parties d'un ensemble fini, de la fonction numérique la plus générale satisfaisant à :

$$m(A) \geq 0 \text{ et } A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B),$$

cas d'un ensemble fini totalement ordonné ; fonctions de répartition en escalier.

2° Barycentre d'un système de points du plan ; sa définition, ses coordonnées. Barycentre de la réunion de deux ensembles disjoints.

Moment d'inertie, par rapport à un point, d'un système de points ; son expression en fonction des abscisses des points dans le cas de points alignés.

3° Variable aléatoire réelle dans le cas d'un ensemble d'éventualités fini. Espérance d'une variable aléatoire réelle, axiomes des espérances.

Probabilité d'un événement, distribution de probabilité sur un ensemble fini.

Axiome des probabilités composées.

Formule de Bayes.

Distribution binômiale, formule du binôme.

Moment d'ordre deux et variance d'une variable aléatoire ; leur calcul dans le cas d'une distribution binômiale.

Inégalité de Bienaymé-Tchebicheff. Loi des grands nombres de Bernoulli.

Commentaires : L'introduction du calcul des probabilités est toujours délicate. Elle est facilitée par un maniement préalable des distributions de masses et des opérations vectorielles, et par une notion claire de ce que c'est qu'une fonction. Une façon de procéder (mais il va sans dire que là encore chacun est libre de suivre l'ordre qui lui convient) est d'axiomatiser la notion d'espérance d'une variable aléatoire, avant d'avoir prononcé le mot de probabilité : on est dans une situation d'incertitude, dans laquelle on sait qu'une éventualité va se réaliser parmi celles d'un ensemble donné ; d'autre part, on sait qu'à chaque éventualité correspond un nombre (gain ou perte) connu, et un seul ; ce qu'on connaît, c'est donc une fonction de l'ensemble des éventualités dans l'ensemble des nombres, fonction que l'on baptise variable aléatoire. D'autre part, ce que l'on veut construire, c'est un outil qui permette de prendre des décisions, de *calculer* ses décisions dans de telles situations d'incertitude. Or, un calcul bien familier, c'est celui des quatre opérations ; parmi celles-ci, deux ont un sens clair quant aux variables aléatoires que nous considérons : l'addition, la multiplication par un scalaire (structure de vectoriel de l'ensemble des fonctions d'un ensemble fini à $\mathbb{R}$) : on sait ce que c'est que d'acheter deux billets de loterie au lieu d'un seul.

L'espérance d'une variable aléatoire X est par définition le nombre $E(X)$ que nous allons lui faire correspondre : $E(X)$ est la valeur, le prix, que nous attribuons à cette situation complexe dans laquelle nous avons un ensemble d'éventualités, un gain attaché à chacune des éventualités, et une incertitude quant à celle des éventualités qui se réalisera. Le calcul des décisions (au sens vague du terme) dans les situations d'incertitude se fera sur la base du calcul (au sens précis) des espérances. Si nous *admettons la validité* d'un tel calcul, il est naturel de poser :

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= E(X) + E(Y) \\ E(\lambda X) &= \lambda E(X) \\ X \geq 0 &\Rightarrow E(X) \geq 0, \end{aligned}$$

et, enfin :

$$E(X) = x,$$

lorsqu'il n'y aura qu'une éventualité (plus d'incertitude) et que le gain correspondant est x .

On cherche alors quelles sont les applications de Ω dans $\mathbb{R}$ (où Ω est l'ensemble, supposé fini, des éventualités) qui satisfont à ces conditions. On trouve :

$$E(X) = \sum_{i \in \Omega} x_i E(X_i)$$

où $E(X_i)$ est l'espérance de la variable aléatoire qui vaut 0 quand $X \neq x_i$, et 1 quand $X = x_i$.

Par définition, $E(X_i)$ est la probabilité de l'ensemble d'éventualités (ou événement) dans lesquelles le gain est x_i . L'axiome des probabilités totales est un cas particulier de l'axiome d'additivité des espérances. Ayant vérifié que les probabilités ainsi définies dans Ω satisfont bien aux deux conditions :

$\Pr(\Omega) = 1$, $\Pr(A) \geq 0$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$,
on voit que les axiomes des espérances équivalent à distribuer la masse unité sur Ω , à *pondérer* les événements.

Ce qui reste arbitraire, c'est la façon de répartir cette masse : chaque répartition est une manière d'exprimer une opinion sur les éventualités possibles. Tenter de réduire l'arbitraire, c'est là l'objet de la Statistique ; on démontrant aux élèves la première Loi des grands nombres, on pourra leur faire comprendre que cet objet n'est pas vain.

III. — STATISTIQUE

Fréquence d'un événement ; expérimentation sur des urnes (par exemple celles que constituent des textes écrits : fréquence d'apparition des mots, lettres, etc...).

Définition des mots : échantillon extrait d'une population, moyenne d'un échantillon (extrait d'une population de nombres), variance.

Commentaire : A ce niveau, l'enseignement de la Statistique est essentiellement expérimental : manipuler le « hasard », mesurer des fréquences. La loi des grands nombres aura fait comprendre l'utilité du calcul de moyennes simples ou quadratiques ; mais on distinguera nettement la Statistique, science expérimentale du Calcul des Probabilités, qui est l'un de ses outils.