

L'ETUDE DES ARCS EN SIXIEME

L'étude des arcs en Sixième est importante. Elle n'est pas simple, parce que l'arc possède trois « dimensions » : son rayon, sa mesure (en degrés, par exemple) et sa longueur.

Nous serons mieux placés pour parler des arcs si nous disons d'abord quelques mots des angles.

Mesure des angles et rapporteur.

La mesure des arcs et la mesure des angles sont en étroite dépendance. Il suffit, pour s'en convaincre, de regarder un rapporteur, lequel sert, en premier lieu, à la mesure des angles, et qui n'est rien d'autre, cependant, qu'un arc gradué.

C'est cette graduation que les débutants voient, en priorité ; il importe d'éviter qu'ils ne voient qu'elle.

On aura soin, pour cela, lorsqu'on en sera à la mesure des angles, de tracer effectivement, à l'aide du rapporteur, bien entendu, les petits *angles* de 1 degré dont la somme est égale à l'angle à mesurer (un angle pas trop grand, 17° par exemple, parce que la figure est longue à faire et surchargée au centre).

Il est nécessaire que l'élève ait le souvenir visuel d'angles, sommes de petits angles de 1°, de manière à le bien convaincre que le rapporteur est essentiellement une somme d'*angles* égaux ; le fait que ces angles ne sont, sur son instrument, que des angles de 10° (et non de 1°), devra être à la fois souligné et expliqué par l'impossibilité matérielle de tracer tous les rayons de degré en degré ; l'élève devra être incité (et aidé) à imaginer les côtés non tracés, de manière à restituer au rapporteur sa qualité de *goniomètre*.

La mesure des arcs.

De même que la mesure des segments, de même que la mesure des angles, la mesure des arcs débute par l'étude des opérations fondamentales sur les arcs d'un même cercle :

- somme de deux ou plusieurs arcs ;
- comparaison et différence de deux arcs ;
- multiples et sous-multiples d'un arc.

Du point de vue concret, cette étude se réalise essentiellement au moyen du cercle-calque piqué en son centre et glissant sur le cercle donné ; ce cercle-calque joue le même rôle que la bande de papier pour les segments de droite.

Les unités d'arc.

Demandons-nous d'abord ce que sont les unités *légal*es d'arc.

Nous constaterons qu'il n'y en a pas.

Toutes les unités de mesure : géométriques, de masse, de temps, mécaniques, électriques, calorifiques, optiques font l'objet de la loi du 14 janvier 1948 modifiant la loi du 2 avril 1919 (voir l'Annuaire du Bureau des Longitudes) *.

Dans le paragraphe I, *unités géométriques*, on trouve les titres suivants :

- A) Longueurs.
- B) Superficies.
- C) Volumes.
- D) Angles.

Rien sur les arcs.

(*) Depuis la rédaction de cet article, notre Collègue Brachet a préparé une note sur le nouveau Système International (décret du 3 mai 1961) qui sera publié dans le Bulletin 223 (N.D.L.R.).

Corrélativement, l'AFNOR (Association française de Normalisation), dans sa Norme FD-X n° 02-002, intitulée « Unités de mesure. Définitions », définit les unités d' « angle plan », d' « angle solide », mais elle est muette sur les unités d'arc.

Le quadrant, l'arc de 1° , l'arc de 1 grade n'ont aucune existence légale.

Il en résulte clairement, juridiquement, en quelque sorte, que les unités d'arc découlent des unités d'angle, qu'elles en sont des corollaires, des annexes, des prolongements.

Nous sommes ainsi amenés à énoncer la définition générale :

Les unités d'arc, sur un cercle donné, sont les arcs interceptés par les unités d'angle, placées au centre.

Nous ne pouvons donc pas ne pas faire jouer un rôle fondamental à l'angle au centre.

Angle au centre et arc intercepté.

Nos jeunes élèves les manieront aisément, en utilisant, à nouveau, le cercle-calque piqué en son centre. Ils découvriront ainsi, sans la moindre difficulté, que, ayant tracé un cercle :

I. *Si on construit deux angles au centre égaux, les deux arcs interceptés sont égaux.*

II. *Si on construit sur le cercle deux arcs égaux, et si on trace leurs angles au centre, ces deux angles au centre sont égaux.*

Dans I, les angles au centre égaux seront construits au moyen d'un calque piqué en O.

Dans II, les arcs égaux seront construits au moyen du cercle-calque piqué en O. Pour bien préciser, chaque fois, ce dont on parle, on devra toujours éviter d'appeler AOB l'angle au centre correspondant à l'arc AB ; on aura soin de prolonger OA et OB au-delà de A et B, d'appeler Ox et Oy les demi-droites ainsi tracées, et de dénommer xOy l'angle au centre correspondant à l'arc AB.

Ce long discours pour un mince détail a l'air enfantin ; en fait, les gens de métier savent bien que ce sont des petites équivoques de ce genre qui embrouillent les idées importantes ; elles sont d'autant plus dangereuses qu'on s'en méfie moins.

Revenons à la mesure des arcs.

Nous ne nous contenterons évidemment pas de la définition générale énoncée plus haut ; nous répéterons les définitions habituelles du quadrant (quart de cercle), du degré-arc ($1/90^\circ$ de l'arc-quadrant), etc... Mais, cette fois, cette répétition, cette réapparition des mêmes mots (degré, minute, seconde), des mêmes sous-multiples (de 60 en 60), ne fera pas figure d'heureux hasard, de truquage, de combine ; elle apparaîtra sous son jour exact : un enchaînement, une déduction, une conséquence.

Et il en sera de même pour cette propriété si simple, si commode, si importante, vers laquelle nous tendons depuis le début et qui est le couronnement de cette recherche :

Un angle au centre et l'arc intercepté sont mesurés par le même nombre, en unités correspondantes :

1° *degré-angle et degré-arc (et sous-multiples) ;*

2° *grade-angle et grade-arc (et sous-multiples).*

On aura soin, toutefois, d'arriver à cet énoncé par un chemin concret, en dessinant, au moins une fois, non seulement l'angle au centre et l'arc intercepté, mais aussi tous les petits angles au centre de 1° , interceptant des petits arcs de 1° .

Et alors, tous les élèves comprendront que le rapporteur, bien qu'il ne soit en apparence qu'un arc gradué, est, réellement et essentiellement, un *goniomètre*, destiné à mesurer les angles, et qu'il permet, *en outre*, de mesurer un arc de rayon quelconque en mesurant son angle au centre.

Périmètre du cercle. — Nombre π .

Là, nous ne suivons pas l'ordre indiqué par le programme ; nous nous en excusons et nous nous expliquons.

Pourquoi préférons-nous traiter « périmètre du cercle » avant « longueur d'un arc » ?

D'abord, parce qu'un cercle n'a que deux « dimensions », son rayon et sa longueur, tandis que l'arc en a trois. Il vaut mieux aller du simple (le cercle) au compliqué (l'arc), plutôt que de commencer par le compliqué (l'arc) en vue d'obtenir le simple (le cercle) comme cas particulier du compliqué (l'arc).

Mais, surtout, parce que nous sommes tous, petits et grands, beaucoup plus curieux de savoir calculer le périmètre d'un cercle que la longueur d'un arc, pour la bonne raison qu'en pratique, dans la vie courante, on a souvent besoin de calculer le périmètre d'un cercle de rayon donné, tandis qu'on n'a à peu près jamais besoin de la longueur d'un arc.

Cela dit, nous serons très brefs sur l'étude expérimentale de la proportionnalité du périmètre d'un cercle et de son rayon. Les deux sortes de cercles matériels se prêtant le mieux à la recherche sont, à notre avis, le cercle tracé sur une feuille de papier et l'un des deux bords d'une boîte de conserve cylindrique. On mesure le périmètre du premier au moyen d'un curvimètre et celui du second au moyen d'une bande de papier enroulée sur la boîte cylindrique ; une bande de papier calque permet de tracer par transparence le trait final juste au-dessus du trait initial tracé près de l'extrémité de la bande par laquelle on a commencé à l'enrouler.

Deux problèmes au sujet des arcs.

On trace aisément un arc connaissant son rayon R et sa mesure n ; sa longueur l en résulte ; il est naturel de se poser les deux questions suivantes :

1° Si R ne change pas, tandis que n est, par exemple, multiplié par 2, par 3..., qu'arrive-t-il à l ?

2° Si n ne change pas, tandis que R est, par exemple, multiplié par 2, par 3..., qu'arrive-t-il à l ?

Seule, la première de ces deux directions de recherche est indiquée dans le programme ; c'est cependant la seconde qui conduit au périmètre du cercle, à titre de cas particulier.

Voici un plan sommaire pour chacune de ces deux recherches.

Recherche I. — « Comparaison expérimentale des nombres mesurant un arc (en degrés, par exemple) et de la longueur de cet arc (en centimètres, par exemple). »
C'est le texte du programme ; il sous-entend : *sur un cercle de rayon donné.*

Traçons un cercle ; marquons un arc AB (nous prions notre lecteur de faire la figure) ; au moyen du cercle-calque piqué en O , construisons un arc CD double de l'arc AB : arc $CD = 2$ arc AB .

De cette construction, il résulte manifestement que :

$$\text{longueur arc } CD = 2 \text{ longueur arc } AB.$$

Traçons maintenant les demi-droites $Ox, Oy, \dots$ qui vont du centre aux points de division $A, B, \dots$; les angles au centre xOy, uOz, zOv sont égaux comme interceptant des arcs égaux ; donc : angle $uOv = 2$ angle xOy et, par suite, mesure angle $uOv = 2$ mesure angle xOy .

Enfin, tout angle au centre et l'arc intercepté sont mesurés par le même nombre, en degrés par exemple ; donc : mesure arc $CD = 2$ mesure arc AB .

Construisons maintenant, au moyen du cercle-calque, un arc EF triple de l'arc AB ; il est clair que longueur arc $EF = 3$ longueur arc AB , et la même suite d'opérations que plus haut nous montre que mesure arc $EF = 3$ mesure arc AB .

Et ainsi de suite. — Concluons :

Sur un même cercle, la longueur d'un arc est proportionnelle à sa mesure en degrés.

L'importance de cette conclusion mérite qu'elle soit confirmée par une *vérification expérimentale*, laquelle peut se faire de deux façons :

- 1° sur un cercle dessiné, au moyen du rapporteur et du curvimètre ;
- 2° au moyen du rapporteur et de la bande de papier, sur un cercle découpé dans du papier fort à la dimension exacte du fond d'une boîte cylindrique et collé au fond de cette boîte, la bande de papier étant enroulée sur la boîte, en affleurant le cercle et ses arcs.

Recherche II. — *Sur des cercles concentriques, un angle au centre intercepte plusieurs arcs, qui ont ainsi la même mesure, n , en degrés. Examiner si les longueurs de ces arcs ne seraient pas proportionnelles à leurs rayons.*

Mêmes méthodes que pour le cercle entier :

- 1° On opère sur un dessin, au moyen du décimètre et du curvimètre.
- 2° Si on préfère la bande de papier au curvimètre, on peut utiliser plusieurs boîtes cylindriques de rayons différents ; on découpe des cercles respectivement égaux aux fonds de ces boîtes ; sur chacun, on limite un arc de n degrés au moyen d'un angle au centre de n degrés ; on colle chaque cercle sur le fond de la boîte correspondante, etc...

Comme pour le cercle entier, on dresse un tableau des valeurs de R , l , $\frac{l}{R}$.

On voit apparaître l'énoncé :

Si plusieurs arcs de rayons différents ont la même mesure (en degrés, par exemple), leurs longueurs sont proportionnelles à leurs rayons.

Ainsi qu'on pouvait le prévoir, l'étude de la longueur d'un arc est moins simple que pour le cercle. Si on attendait d'en avoir fini avec la mesure et la longueur d'un arc pour aborder le périmètre du cercle, l'intérêt serait bien émoussé et, au total, le chemin parcouru beaucoup trop long, eu égard à la simplicité du résultat.

**

Nous ne nous sommes pas, à vrai dire, écarté du programme ; nous l'avons explicité, étoffé ; nous avons réalisé ses intentions, d'ailleurs excellentes (voir nos *Réflexions sur le nouveau programme de Sixième*, B.A.P.M. de mars 1958).

Ainsi que le recommandent les Instructions, nous nous sommes efforcés d'apprendre aux élèves « à regarder et à réfléchir », en dégageant « de l'observation et de l'expérience quelques notions claires et quelques définitions précises ».

François BRACHET.