

UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES INVERSIONS ET SYMÉTRIES

Soit P le plan de la géométrie inverse (c'est-à-dire muni d'un unique point à l'infini). Il est souvent dit qu'une transformation ponctuelle T de P , telle que deux points quelconques et leurs transformés soient cocycliques, est nécessairement une inversion ou une symétrie (par rapport à une droite). Au cours d'une leçon d'Agrégation faite à l'E.N.S. de Sèvres, Mlle Anne Fribourg a fait remarquer que cet énoncé n'est pas vrai sans autres hypothèses. Dans la discussion qui a suivi cette leçon, nous sommes parvenus à un énoncé correct, mais dont la démonstration utilise un peu de Topologie générale. Disons tout de suite que les difficultés viennent des points fixes de la transformation T . L'énoncé est le suivant :

THEOREME. — *Soit T une transformation ponctuelle biunivoque et continue de P , telle que deux points quelconques et leurs transformés par T soient cocycliques. On suppose qu'il existe deux points a, b , non fixes par T , tels que les droites $aT(a)$ et $bT(b)$ soient distinctes. Alors T est une inversion ou une symétrie par rapport à une droite.*

Soit O le point de rencontre (à distance finie ou à l'infini) des droites $aT(a)$ et $bT(b)$. Soit I l'inversion de pôle O et de puissance $\overline{Oa} \cdot \overline{OT(a)}$ (ou la symétrie par rapport à la médiatrice commune de $aT(a)$ et $bT(b)$ si O est à l'infini). Si m est un point non-fixe de T et distinct de a et b , $T(m)$ est le second point d'intersection des cercles $maT(a)$ et $mbT(b)$ (d'après la propriété de cocyclicité). On a donc $T(m) = I(m)$ pour tout point non-fixe m , même confondu avec a ou b .

Soient D l'ensemble des points fixes de T , et A l'ensemble des points m de P tels que $T(m) = I(m)$. Comme T et I sont des transformations continues, D et A sont des parties fermées de P . On vient de voir que $D \cup A = P$. Quant à $D \cap A$, c'est l'ensemble C des points fixes de I , c'est-à-dire la partie vide (si I est une inversion de puissance négative), une circonférence (si I est une inversion de puissance positive), ou une droite (si I est une symétrie).

Si $D \cap A$ est vide, le fait que P est connexe, que A et D sont fermés et que $D \cup A = P$ implique que l'un des deux ensembles A, D est vide et que l'autre est égal à P ; comme A contient a et b , on a $A = P$, de sorte que $T(m) = I(m)$ pour tout point m de P et que $P = I$.

Si $D \cap A$ est une circonférence ou une droite, elle partage le plan P en deux régions ouvertes P' et P'' , qui sont connexes et échangées par I . Les parties $P' \cap A$ et $P' \cap D$ sont disjointes et fermées relativement à P' ; comme P' est connexe, l'une est vide et l'autre est égale à P' . De $P' \cap D = P'$ on déduirait que a est un point de P'' (puisque a n'est pas un point fixe de T), d'où $T(a) = I(a) \in P'$ et $T(T(a)) = T(a)$ (puisque $P' \cap D = P'$ implique $P' \subset D$); ceci contredit la biunivocité de T . On a donc $P' \cap A = P'$, et de même $P'' \cap A = P''$. Ainsi A contient P', P'' et aussi la courbe $D \cap A$, de sorte que $A = P$. On a donc bien encore $T(m) = I(m)$ pour tout point m de P , et donc $T = I$. CQFD.

Deux contre-exemples.

1) Soient I une inversion, a et b deux points distincts homologues par I . On définit la transformation T par : $T(a) = a, T(b) = b, T(m) = I(m)$ pour m distinct de a et b . Les propriétés de cocyclicité et de biunivocité sont vraies. Mais T n'est pas continue. Cet exemple est dû à Mlle A. Fribourg.

2) Soient I une inversion de puissance positive, et P' l'intérieur de son cercle d'inversion. On définit T par : $T(m) = m$ pour $m \in P', T(m) = I(m)$ pour $m \notin P'$. Les propriétés de cocyclicité et de continuité sont vraies pour T . Mais T n'est pas biunivoque.

P. SAMUEL (professeur à l'E.N.S. de Jeunes Filles).