

SUR UNE ETUDE DU TETRAEDRE

par R. ESTÈVE

Professeur honoraire au Lycée Jacques-Decour

Objet. — Il est certainement difficile d'écrire du nouveau sur le tétraèdre, car il a été étudié depuis longtemps et sous différents aspects. Il nous a paru toutefois que, si des cas particuliers ont été étudiés à fond, comme par exemple le tétraèdre orthocentrique et le tétraèdre équifacial, naturellement aussi le tétraèdre régulier (n'a-t-on pas, du reste, A étant l'ensemble des tétraèdres orthocentriques et B l'ensemble des tétraèdres équifaciaux, $A \cap B =$ l'ensemble des tétraèdres réguliers), il n'en a pas été de même du cas général, c'est-à-dire du tétraèdre quelconque : c'est ainsi, en particulier, que nous n'avons jamais vu — à moins que nous n'ayons pas su voir, ce qui est tout de même possible, et alors on voudra bien nous excuser — la mention de *sphère des douze points* (ou *sphère d'Euler*) dans le cas du tétraèdre quelconque. Cette sphère est surtout mentionnée dans le cas du tétraèdre orthocentrique et elle voisine alors avec une sphère analogue, celle qui passe par les milieux des arêtes du tétraèdre et par les pieds des perpendiculaires communes aux arêtes opposées. La façon actuelle d'étudier l'homothétie, avec la notion si fructueuse de produit, permet de combler cette lacune et le plus simplement possible. Ce sera là une partie de notre article. Une autre, à la fin, sera consacrée à des questions de maximum et minimum absolus, relatives au tétraèdre, analogues à celles qui ont été traitées sur le triangle dans un article précédent.

Etude du tétraèdre quelconque. — Nous amorcerons cette étude — il faut bien avoir un point de départ — par la notion de centre de gravité de plusieurs points, de quatre dans le cas du tétraèdre. C'est évidemment là une notion linéaire, affine si l'on veut, mais qui conduit peut-être plus directement à l'introduction de la sphère des douze points, qui, elle, est une notion métrique. Comme l'étude que nous nous proposons est métrique, il n'y a aucun inconvénient.

Soit donc un tétraèdre ABCD et G le centre de gravité de ses sommets ($\mathbf{GA} + \mathbf{GB} + \mathbf{GC} + \mathbf{GD} = \mathbf{0}$) ; on sait, en effet, qu'il existe un point et un seul, G, satisfaisant à cette relation, puisque $\mathbf{GA} + \mathbf{GB} + \mathbf{GC} + \mathbf{GD}$ peut s'écrire $\mathbf{GA} + 3\mathbf{GG}_1$ (G_1 , centre de gravité de BCD), ce qui situe, pour avoir $\mathbf{GA} + 3\mathbf{GG}_1 = \mathbf{0}$, le point G aux $3/4$ de $\mathbf{AG}_1$, donc aussi aux $3/4$ de $\mathbf{BG}_2$, aux $3/4$ de $\mathbf{CG}_3$ et aux $3/4$ de $\mathbf{DG}_4$. On peut remarquer aussi, avec I milieu de AB et J milieu de CD, que

$$\mathbf{GA} + \mathbf{GB} + \mathbf{GC} + \mathbf{GD} = \mathbf{0}, \text{ s'écrit } 2\mathbf{GI} + 2\mathbf{GJ} = \mathbf{0},$$

ce qui situe G au milieu de IJ, donc aussi aux milieux de KL et MN, les notations étant évidentes.

D'où sept droites remarquables et six plans remarquables qui concourent : les quatre droites joignant chacune un sommet au centre de gravité de la facette opposée, les trois droites joignant chacune les milieux de deux arêtes opposées, et les six plans passant chacun par une arête et le milieu de l'arête opposée.

Cela étant, introduisons la sphère circonscrite au tétraèdre : sphère (O) de centre O. Comme $\mathbf{GG}_1 = -1/3 \mathbf{GA}$, l'homothétie (G, $-1/3$) transforme le tétraèdre ABCD en le tétraèdre $G_1G_2G_3G_4$ et la sphère (O) en la sphère (ω) de centre ω , circonscrite au tétraèdre $G_1G_2G_3G_4$. Son centre ω est tel que $\mathbf{G}\omega = -1/3 \mathbf{GO}$.

Mais les sphères (O) et (ω) sont encore homologues dans une homothétie de rapport $1/3$ (de la première à la seconde). Si S est le centre de cette homothétie, on a $S_\omega = 1/3 SO$. On en tire :

$$SG + G_\omega = 1/3 SG + 1/3 GO \quad \text{ou} \quad SG - 1/3 GO = 1/3 SG + 1/3 GO.$$

D'où $SG = GO$ et S est donc le symétrique de O pour G.

Comme $OA + OB + OC + OD = 4 OG$, on a aussi :

$$OA + OB + OC + OD = 2 OS$$

et, par suite, $OS = 1/2 (OA + OB + OC + OD)$, ce qui lie ainsi le point S d'une façon simple au tétraèdre ABCD.

Pour pousser plus loin cette étude, projetons la figure obtenue jusqu'ici sur les plans des facettes, par exemple sur le plan BCD : A donne a (pied de la hauteur issue de A), B, C, D, G_1 sont conservés, O donne A' (centre du cercle circonscrit au triangle BCD), G donne G' tel que $aG' = 3/4 aG_1$, S donne S' tel que $A'S' = 2 A'G'$ et ω donne ω' tel que $G'\omega' = -1/3 G'A'$. Quant à la somme $OA + OB + OC + OD$, elle donne $A'a + A'B + A'C + A'D$, c'est-à-dire, avec α orthocentre de BCD, $A'a + A'\alpha$ (propriété connue facile à retrouver), ou $2 A'\alpha$, α' , milieu de $a\alpha$. Donc, $1/2 (OA + OB + OC + OD)$ ou OS se projette suivant $A'\alpha'$ et, comme O se projette en A' , S se projette en α' . La projection S' de S (nous l'appellerons désormais S') est donc au milieu de $a\alpha$.

Le schéma suivant :

(ω) [hom. (G, — 3)] (O) [hom. (S, 1/3)] (ω),
que l'on peut écrire :

(ω) prod. [hom. (G, — 3) hom. (S, 1/3)] (ω),

où le produit n'est autre que la symétrie (ω), prouve que G_1 et A_1 ($SA_1 = 1/3 SA$) sont symétriques pour ω . La sphère (ω), ayant un diamètre en G_1A_1 , passe donc en A'_1 , projection orthogonale de A_1 sur le plan BCD. Elle passe donc aussi par les projections respectives B'_1 , C'_1 , D'_1 des points B_1 , C_1 , D_1 analogues à A_1 , c'est-à-dire homologues de B, C, D dans l'homothétie (S, 1/3), mais sur les plans CDA, DAB, ABC.

La sphère (ω) passe donc ainsi par les points remarquables G_1 , G_2 , G_3 , G_4 , A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , A'_1 , B'_1 , C'_1 , D'_1 , au nombre de 12 : c'est pour cette raison qu'elle est dite *sphère des douze points* ou *sphère d'Euler*.

Remarquer que si $SA_2 = 3 SA'_1$, la sphère (O) passe en A_2 , et donc aussi aux points analogues B_2 , C_2 , D_2 , c'est-à-dire homologues de B'_1 , C'_1 , D'_1 dans l'homothétie (S, 3).

A noter également que la sphère (ω) coupe le plan BCD suivant le cercle de diamètre $G_1A'_1$, c'est évident.

Tétraèdres particuliers. — On peut particulariser de différentes façons. L'une d'elles consiste à particulariser dans le plan d'une facette, par exemple dans le plan BCD, la figure obtenue jusqu'ici dans l'étude précédente. En particulier, on peut supposer les points a et α confondus, ces points étant liés par des questions d'orthogonalité qui justifient leur rapprochement : ceci conduira au *tétraèdre orthocentrique* (arêtes opposées orthogonales dans les trois couples). En particulier, aussi, on peut supposer que la droite $a\alpha$ est une hauteur du triangle BCD, par exemple celle passant par B : ceci conduira au *tétraèdre orthogonal* (arêtes opposées orthogonales dans un seul couple). On peut encore supposer d'autres positions relatives particulières pour les points intéressants du plan BCD, tels que a , α , A' , S' , G' , ω' ...

Une autre façon d'opérer, puisque l'étude entreprise repose surtout sur les sphères (O) et (ω), est de particulariser la position relative de ces sphères : il est certain que la première qui vient à l'esprit est celle où les centres sont confondus, en admettant, bien entendu, l'existence d'un tétraèdre correspondant ; ceci conduira au *tétraèdre équifacial* (facettes égales ou arêtes opposées égales dans chaque couple, ce qui revient au même). Ceci peut faire penser à envisager un tétraèdre où les arêtes opposées sont égales dans un seul couple, ou bien égales dans deux couples, ou encore égales et orthogonales à la fois dans un seul couple. Et nous sommes loin d'avoir épuisé toutes les positions relatives des sphères (O) et (ω). Le sujet est donc vaste.

Cas où a et α sont confondus. Tétraèdre orthocentrique. — L'étude du tétraèdre orthocentrique étant classique, facile à reprendre avec le produit scalaire, ou même autrement, nous rappellerons simplement les propriétés les plus importantes. L'hypothèse que a et α sont confondus entraîne que les arêtes opposées sont orthogonales dans les trois couples et que les quatre hauteurs du tétraèdre passent par un même point (orthocentre) : c'est par l'existence de ce point que l'on définit le tétraèdre orthocentrique (tétraèdre où les quatre hauteurs passent par un même point), et de là vient aussi sa dénomination. Réciproquement, si un tétraèdre est orthocentrique, son orthocentre se projette sur le plan d'une facette quelconque, en l'orthocentre de cette facette, et les arêtes opposées sont orthogonales dans les trois couples (remarquer que l'orthogonalité dans deux couples entraîne l'orthogonalité dans les trois). De cela résulte évidemment que, dans un tétraèdre, les points des couples $\alpha\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ (les notations sont évidentes) sont confondus en même temps ou distincts en même temps.

Le tétraèdre étant orthocentrique, et H étant son orthocentre, on voit facilement que S est en H, S' en a (ou α) et que, dès lors, les douze points remarquables de la sphère d'Euler sont, ici, G_1 , G_2 , G_3 , G_4 , a , b , c , d et les points situés aux tiers des vecteurs $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{HD}$. Tout cela est du reste connu.

Le tétraèdre étant toujours orthocentrique, chacun des segments IJ, KL, MN est diagonale commune à deux rectangles (ces rectangles sont au nombre de trois), et on en déduit $IJ = KL = MN$: les six points I, J, K, L, M, N sont donc cosphériques. I', J', K', L', M', N' étant les points où cette sphère recoupe l'ensemble des arêtes, on a, en particulier, $I'J \perp I'I$ ou AB. Comme $CD \perp AB$, on a aussi $CDI' \perp AB$ et, par suite, $I'J' \perp AB$. De même $I'J' \perp CD$. Ceci revient à dire que I'J' est la perpendiculaire commune aux deux arêtes opposées AB et CD. De même KL est la perpendiculaire commune à AC et DB et MN la perpendiculaire commune à AD et BC. La sphère passant par les milieux des arêtes d'un tétraèdre orthocentrique passe donc aussi par les pieds des perpendiculaires communes relatives aux couples d'arêtes opposées. Elle est dite *deuxième sphère d'Euler*.

Cas où O et ω sont confondus. Tétraèdre équifacial. — ABCD étant supposé exister avec une telle propriété, les points O, ω , G, S y sont confondus. On a alors $GA = GB = GC = GD$: en particulier, G est dans le médiateur de AB et aussi dans celui de CD. I étant le milieu de AB et J celui de CD, GI est perpendiculaire à AB et GJ perpendiculaire à CD : comme I, G, J sont alignés, IJ est médiatrice (spatiale) commune à AB et CD, donc axe de symétrie du tétraèdre. Dans cette symétrie, A donne B, B donne A, C donne D et D donne C : donc $AC = BD$ et $AD = BC$. Les facettes ABC et BAD sont égales. On en conclut aisément que les quatre facettes sont égales et le tétraèdre est dit *équifacial*. Remarquons

aussi que, dès lors, $Aa = Bb = Cc = Dd$ et, comme O et G sont confondus, O est équidistant des plans des facettes, et, par suite, centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre. Le rayon de cette sphère est le quart de la valeur commune des hauteurs.

Réciproquement, soit un tétraèdre équifacial ABCD. Les triangles ABC et ABD étant égaux ($AC = BD$, $AD = BC$), leurs hauteurs homologues Ch et Dk sont égales. Le milieu I de AB étant aussi celui de hk, les plans perpendiculaires à AB en h, I, k sont équidistants, et, comme les extrêmes coupent CD en C et D, le médian coupe donc CD en son milieu J. IJ est ainsi médiatrice de AB et G, qui est au milieu de IJ, est donc tel que $GA = GB$. On en déduit aisément que G est équidistant de A, B, C, D. Donc, G et O sont confondus et, par suite, ω avec eux.

La marche suivie prouve l'existence du tétraèdre équifacial, puisqu'elle donne divers moyens de l'obtenir.

D'où l'énoncé suivant :

Le tétraèdre équifacial a ses sphères (O), (ω) et inscrite concentriques, et il est le seul dans ce cas.

On peut voir aussi, facilement, que les centres de gravité (du volume, de la surface et de l'ensemble des arêtes) y sont confondus. Par transposition autour de IJ, KL, MN, on trouve aisément $Ga = Gb = Gc = Gd$. De plus, comme G (ou S) se projette sur le plan BCD par exemple au milieu de ax , on a aussi $Ga = Gx$. On en déduit :

$$Ga = Gb = Gc = Gd = Gx = Gy = Gz = G\delta.$$

Il existe donc une sphère de centre G passant aux points $a, b, c, d, x, y, z, \delta$. Comme cette sphère passe aussi par les milieux des hauteurs (ce que l'on voit immédiatement), on peut dire qu'elle est une autre sphère des douze points pour le tétraèdre équifacial.

Tétraèdre régulier. — On peut le définir comme un tétraèdre ayant toutes ses arêtes égales ou bien comme un tétraèdre ayant pour facettes des triangles équilatéraux (définitions équivalentes). L'une ou l'autre prouve son existence.

On voit tout de suite que le tétraèdre régulier est à la fois orthocentrique et équifacial.

La réciproque est vraie. Si ABCD est à la fois orthocentrique et équifacial, le plan médiateur de AB, par exemple, contient CD, et l'on a, en particulier, $CA = CB$: on en déduit que toutes les arêtes sont égales, et le tétraèdre est régulier.

Cas où ax est une hauteur de la facette BCD. Tétraèdre orthogonal. — Si ax est une hauteur de BCD, par exemple celle de B, Ba est perpendiculaire à CD, et, comme Aa est aussi perpendiculaire à CD, le plan ABa est perpendiculaire à CD : d'où $AB \perp CD$.

Réciproquement, si $AB \perp CD$, on a $ABa \perp CD$: donc, $Ba \perp CD$ et ax passe en B.

Par analogie, $b\beta$ passe en A, $c\gamma$ en D et $d\delta$ en C.

On peut donc noter que, si l'une des droites $ax, b\beta, c\gamma, d\delta$ est hauteur dans la facette qui la contient, il en est de même des trois autres dans les facettes qui les contiennent.

Nous appellerons *tétraèdre orthogonal* tout tétraèdre dans lequel les arêtes opposées sont orthogonales dans un seul couple. Le tétraèdre orthocentrique est donc triorthogonal.

Si $AB \perp CD$, le plan ABa est $\perp$ CD, donc à ACD : la hauteur Bb est donc dans ce plan. D'où le concours des hauteurs de A et B (en P). Par analogie, les hauteurs de C et D concourent (en Q). Si le plan ABP

coupe CD en E, EP est la troisième hauteur du triangle ABE (les deux autres étant Aa et Bb). F étant son pied sur AB, on en déduit que EF est la perpendiculaire commune à AB et CD. S, dont les projections sur les plans BCD, CDA, DAB, ABC sont respectivement les milieux de $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$, $\delta\delta$, se trouve donc dans les plans ABE et CDF, donc sur leur droite d'intersection EF (ou PQ). De plus, si la perpendiculaire en α au plan BCD rencontre PQ en P' et la perpendiculaire en β au plan ACD rencontre PQ en P'', on a $PP' = 2 PS$ et $PP'' = 2 PS$. D'où la coïncidence de P' et P''.

S est ainsi le milieu du segment PP', et donc aussi du segment analogue QQ'.

Si l'on appelle *cohauteur* d'un sommet du tétraèdre la perpendiculaire à la facette opposée en son orthocentre, on peut donner l'énoncé suivant :

Si un tétraèdre a deux arêtes opposées orthogonales (tétraèdre orthogonal), les hauteurs issues des sommets de chacune de ces arêtes se coupent, ainsi que les cohauteurs correspondantes, et les quatre points obtenus appartiennent à la perpendiculaire commune aux deux arêtes et y sont symétriques, associés par hauteurs et cohauteurs correspondantes, pour le point S.

Si un tétraèdre est triorthogonal (orthocentrique), les hauteurs se coupent donc deux à deux et, comme elles ne sont pas coplanaires, elles concourent toutes en un même point et, pour une raison analogue, il en est ainsi des cohauteurs, lesquelles sont du reste confondues avec les hauteurs. Le point de concours unique est alors le point S ou H (orthocentre).

Le sujet du tétraèdre est loin d'être épuisé, non seulement dans le cas général, mais aussi du côté des cas particuliers que l'on peut concevoir en grand nombre, comme nous l'avons déjà dit, en particulierisant soit dans le plan d'une facette (les seuls points α , α , A' se prêtent déjà à beaucoup), soit de toute autre façon (arêtes, facettes, etc.) (1).

Questions de maximum et de minimum absolus relatives au tétraèdre.

— Les questions que nous allons résoudre maintenant sont analogues à celles que nous avons résolues, dans un article précédent, relativement au triangle (n° 214, page 265).

ABCD étant un tétraèdre quelconque et I le barycentre des points massifs (A, α), (B, β), (C, γ), (D, δ), ($\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$), écrivons la relation de Leibniz pour un point M quelconque de l'espace :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 + \delta MD^2 = \alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2 + \delta ID^2 + (\alpha + \beta + \gamma + \delta) MI^2.$$

On en déduit immédiatement que la somme du premier membre de cette égalité est maximum ou minimum lorsque M est en I suivant que $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ est négative ou positive et, donc, en particulier, si α , β , γ , δ sont tous positifs.

Cela étant rappelé, soit ABCD un tétraèdre quelconque, I un point intérieur et $abcd$ le tétraèdre podaire de I pour ABCD : a , b , c , d sont donc les pieds des perpendiculaires menées de I sur les plans BCD, CDA,

(1) Les collègues désireux d'avoir sur ce sujet, particulièrement dans le cas général et dans les cas particuliers classiques (tétraèdre orthocentrique, tétraèdre équilatéral, tétraèdre régulier), des résultats plus substantiels, pourront consulter avec intérêt l'ouvrage suivant : P. COUDERC et A. BALLICIONI, *Premier livre du tétraèdre*, Editeur Gauthier-Villars.

DAB, ABC. En raisonnant comme il a été fait pour le triangle dans l'article mentionné, on voit que $\alpha Ia^2 + \beta Ib^2 + \gamma Ic^2 + \delta Id^2$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont proportionnels aux volumes des tétraèdres $Ibcd, IcdA, Idab, Iabc$, donnant ainsi I comme barycentre des points massifs $(a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma), (d, \delta)$, est le minimum de la somme $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 + \delta MD^2$, où M est un point quelconque de l'espace et $A'B'C'D'$ le tétraèdre podaire de M pour ABCD. Ceci suppose évidemment que I est choisi d'abord et que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en découlent comme il a été dit. Mais en est-il de même si les nombres positifs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont donnés d'abord, autrement dit, existe-t-il alors un point I qui soit le barycentre des points massifs $(a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma), (d, \delta)$, où $abcd$ est le tétraèdre podaire de I pour ABCD ?

En admettant l'existence de I, on a alors :

$$(1) \quad \frac{\alpha}{\text{vol. } Ibcd} = \frac{\beta}{\text{vol. } IcdA} = \frac{\gamma}{\text{vol. } Idab} = \frac{\delta}{\text{vol. } Iabc}.$$

Comme il faut faire apparaître, à partir de vol. $Ibcd$ par exemple, vol. IBCD, la méthode n'est certainement pas aussi simple que dans le plan (*).

Si P, Q, R sont les points à l'unité de distance de A sur les arêtes du trièdre A du tétraèdre ABCD et P', Q', R' les points analogues sur les arêtes du trièdre supplémentaire (nous appellerons les trièdres APQR et AP'Q'R' tétraèdres unitaires en A pour le tétraèdre ABCD), on a, en remarquant que le trièdre supplémentaire et le trièdre $Ibcd$ sont symétriques pour le milieu de AI, vol. $Ibcd = Ib.Ic.Id.u'(A)$, où $u(A)$ et $u'(A)$ désignent les volumes des tétraèdres unitaires APQR et AP'Q'R' (la notation u' ne désigne donc pas une dérivée).

De plus, on établit facilement les relations suivantes, en posant $\widehat{PAP'} = \varphi$, $\widehat{CAD} = b$ et dièdre $\widehat{AB} = B$:

$$u(A) = \frac{1}{6} \sin b \cos \varphi, \quad u'(A) = \frac{1}{6} \sin B \cos \varphi.$$

On en déduit $u'(A) = \frac{\sin B}{\sin b} u(A)$. Comme on aurait de même $u'(A) = \frac{\sin C}{\sin c} u(A)$ et $u'(A) = \frac{\sin D}{\sin d} u(A)$, on établit ainsi, au passage, l'analogie des sinus pour le trièdre ABCD et, par suite, pour un trièdre quelconque. Nous désignerons désormais par $k(A)$ la valeur commune des trois rapports en sinus et par $s(A)$ l'aire de la facette BCD du tétraèdre ABCD opposée à A. Naturellement, il en découle des notations analogues en B, C et D.

Dès lors, les relations (1) deviennent, en y remplaçant les quatre volumes par leurs valeurs $Ib.Ic.Id.u(A).k(A)$, $Ic.Id.Ia.u(B).k(B)$, $Id.Ia.Ib.u(C).k(C)$, $Ia.Ib.Ic.u(D).k(D)$, puis celles-ci par les valeurs proportionnelles $\frac{u(A).k(A)}{Ia}$, $\frac{u(B).k(B)}{Ib}$, $\frac{u(C).k(C)}{Ic}$, $\frac{u(D).k(D)}{Id}$ et enfin ces dernières par les valeurs proportionnelles $\frac{p}{\text{vol. } IBCD}$, $\frac{q}{\text{vol. } ICDA}$, $\frac{r}{\text{vol. } IDAB}$,

(*) Si une méthode plus simple nous a échappé, qu'on veuille bien nous en excuser.

$\frac{s}{\text{vol. IABC}}$ où p désigne le produit $u(A) \cdot k(A) \cdot s(A)$ et q, r, s des produits analogues en B, C, D :

$$\frac{\text{vol. IBCD}}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)} = \frac{\text{vol. ICDA}}{\left(\frac{q}{\beta}\right)} = \frac{\text{vol. IDAB}}{\left(\frac{r}{\gamma}\right)} = \frac{\text{vol. IABC}}{\left(\frac{s}{\delta}\right)}.$$

I est donc le barycentre des points massifs $\left(A, \frac{p}{\alpha}\right), \left(B, \frac{q}{\beta}\right), \left(C, \frac{r}{\gamma}\right), \left(D, \frac{s}{\delta}\right)$. Ceci prouve l'existence de I, car la réciproque est vraie (démonstration à rebours de la précédente).

Cependant, les valeurs de p, q, r, s étant assez compliquées, essayons de les remplacer par des quantités proportionnelles plus simples. Pour cela, calculons $\frac{p}{q}$ par exemple, car p et q ont certainement des facteurs communs. On a, V étant le volume du tétraèdre ABCD :

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \frac{V}{AB \cdot AC \cdot AD} \cdot \frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{CAD}} \cdot s(A) \cdot \frac{BA \cdot BC \cdot BD}{V} \cdot \frac{\sin \widehat{CBD}}{\sin \widehat{BA}} \cdot \frac{1}{s(B)} \\ &= \frac{s(A)}{2 s(B)} \cdot \frac{2 s(A)}{s(B)} = \frac{[s(A)]^2}{[s(B)]^2}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \frac{p}{[s(A)]^2} = \frac{q}{[s(B)]^2}.$$

Comme on raisonnerait de même avec $\frac{p}{r}$ et $\frac{p}{s}$, on en conclut que p, q, r, s sont proportionnels aux carrés des aires $s(A), s(B), s(C), s(D)$ (il n'y a pas lieu de confondre les deux sortes d' s).

Notons, au passage, que $u'(A), u'(B), u'(C), u'(D)$, étant les quotients respectifs de p, q, r, s par $s(A), s(B), s(C), s(D)$, sont donc proportionnels à $s(A), s(B), s(C), s(D)$.

Notons bien que I est le barycentre des points A, B, C, D avec les masses respectives $\frac{[s(A)]^2}{\alpha}, \frac{[s(B)]^2}{\beta}, \frac{[s(C)]^2}{\gamma}, \frac{[s(D)]^2}{\delta}$.

Remarquons qu'il y a réciprocity entre ces quatre nombres et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Remarquons aussi, puisque $\alpha \mathbf{Ia} + \beta \mathbf{Ib} + \gamma \mathbf{Ic} + \delta \mathbf{Id} = 0$, qu'une question de Statique vient d'être résolue.

Tous les résultats trouvés nous conduisent donc aux énoncés suivants :

1° Dans un tétraèdre, le rapport du volume du tétraèdre unitaire sur le trièdre supplémentaire en un sommet à l'aire de la facette opposée à ce sommet est indépendant du sommet.

2° Le barycentre des sommets A, B, C, D d'un tétraèdre avec les masses positives respectives $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ est en même temps le barycentre des sommets de son tétraèdre podaire avec les masses

$$\frac{1}{\alpha} [s(A)]^2, \frac{1}{\beta} [s(B)]^2, \frac{1}{\gamma} [s(C)]^2, \frac{1}{\delta} [s(D)]^2.$$

3° La somme $\alpha \mathbf{MA}^2 + \beta \mathbf{MB}^2 + \gamma \mathbf{MC}^2 + \delta \mathbf{MD}^2$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont posi-

tifs et A'B'C'D' est le tétraèdre podaire de M pour ABCD, a sa plus petite valeur lorsque M est au barycentre des points A, B, C, D avec les masses

$$\frac{1}{\alpha} [s(A)]^2, \frac{1}{\beta} [s(B)]^2, \frac{1}{\gamma} [s(C)]^2, \frac{1}{\delta} [s(D)]^2.$$

4° La position d'équilibre d'un point M soumis aux forces $\alpha MA'$, $\beta MB'$, $\gamma MC'$, $\delta MD'$, où A'B'C'D' est le tétraèdre podaire de M pour ABCD, est le barycentre des points A, B, C, D avec les masses réciproques (au sens indiqué plus haut) de α , β , γ , δ .

Nous avons supposé α , β , γ , δ positifs. En faisant appel à la notion de volume algébrique, on peut voir que certains des énoncés précédents sont encore valables avec α , β , γ , δ de signes quelconques, sous certaines conditions toutefois que l'on peut préciser aisément.

Un cas particulier intéressant (côtés masses) est celui où α , β , γ , δ sont égaux (ou proportionnels) à $[s(A)]^2$, $[s(B)]^2$, $[s(C)]^2$, $[s(D)]^2$, car alors le point I est le centre de gravité du tétraèdre (désigné plus haut par G). La somme

$$[s(A)]^2 MA'^2 + [s(B)]^2 MB'^2 + [s(C)]^2 MC'^2 + [s(D)]^2 MD'^2$$

est donc minimum en G et on a évidemment la même conclusion pour la somme (vol. MBCD)² + (vol. MCDA)² + (vol. MDAB)² + (vol. MABC)².

Un autre cas particulier intéressant (toujours côté masses) est celui où α , β , γ , δ sont égaux entre eux (à 1 par exemple). Le point I est alors le barycentre des points A, B, C, D avec pour masses les carrés des aires des facettes opposées et c'est alors la somme $MA'^2 + MB'^2 + MC'^2 + MD'^2$ qui est minimum en ce point.

Remarquer que, dans le premier cas, c'est la somme

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$$

qui est minimum en I et que, dans le second, c'est la somme

$$[s(A)]^2 MA'^2 + [s(B)]^2 MB'^2 + [s(C)]^2 MC'^2 + [s(D)]^2 MD'^2$$

qui est minimum en I.

Plus généralement, désignons par I et I' les deux points ayant pour coordonnées barycentriques, tous deux pour ABCD, le quadruplet α , β , γ , δ et le quadruplet réciproque α' , β' , γ' , δ' , donc avec

$$\alpha\alpha' = [s(A)]^2, \beta\beta' = [s(B)]^2, \gamma\gamma' = [s(C)]^2, \delta\delta' = [s(D)]^2.$$

On voit immédiatement que les deux sommes

$\alpha MA'^2 + \beta MB'^2 + \gamma MC'^2 + \delta MD'^2$ et $\alpha' MA^2 + \beta' MB^2 + \gamma' MC^2 + \delta' MD^2$ sont minimum en I', tandis que les deux sommes

$\alpha' MA^2 + \beta' MB^2 + \gamma' MC^2 + \delta' MD^2$ et $\alpha MA'^2 + \beta MB'^2 + \gamma MC'^2 + \delta MD'^2$ sont minimum en I. (I' désigne ici le point qui était désigné plus haut par I, mais il n'y a aucune confusion possible).

Si l'on considère les plans bissecteurs d'un dièdre du tétraèdre et les plans passant par l'arête de ce dièdre et respectivement par I et I', ils coupent l'arête opposée en quatre points σ , σ' , i , i' qui sont en division harmonique. En effet, si α , β , γ , δ varient, i et i' décrivent sur cette dernière arête deux divisions en involution dont σ et σ' sont les points doubles : pour le voir, on peut utiliser les rapports en lesquels les quatre points i , i' , σ , σ' partagent ladite arête (vecteur) et constater que le produit des deux premiers est égal au carré du troisième (ou du quatrième). Il en résulte que les quatre plans en question constituent un faisceau harmonique, et avec deux plans conjugués rectangulaires : par suite, les deux autres sont symétriques l'un de l'autre pour chacun des deux premiers et on peut donc les appeler *plans isogonaux* pour les plans des facettes du tétraèdre contenant la première arête en cause. On a des conclusions analogues pour les cinq autres arêtes du tétraèdre combinées

chacune avec I et I'. Ceci amène à appeler ces points *points isogonaux* pour le tétraèdre. Faire bien attention toutefois que deux plans isogonaux issus d'une arête ne coupent pas les facettes passant par l'arête opposée suivant deux droites nécessairement isogonales pour chacune d'elles. La notion de points isogonaux dans l'espace est liée à la notion de plans isogonaux, mais n'a rien à voir avec la notion de droites isogonales.

Dans le cas particulier où les masses sont égales, le point I est en G (centre de gravité du tétraèdre) et, dans tout couple de plans isogonaux (six couples), l'un des plans passe par une arête et le milieu de l'arête opposée. On peut donc appeler ce plan *plan médian* et, dès lors, son associé prend tout naturellement le nom de *plan symédian*. Le point I' est dit alors *point symédian* ou *point de Lemoine* du tétraèdre. Notons, au passage, que le plan symédian issu d'une arête partage l'arête opposée dans un rapport (arithmétique) égal au rapport des carrés des aires des facettes passant par la première arête et que les plans symédiens d'un tétraèdre (au nombre de six) passent par un même point. Faire bien attention qu'un plan symédian ne coupe pas les facettes intéressées suivant des symédianes de ces facettes.

Dans le cas particulier où le tétraèdre ABCD est équifacial, on a $s(A) = s(B) = s(C) = s(D)$. Les quadruplets réciproques deviennent $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et $1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma, 1/\delta$: les points I et I', tout en étant isogonaux, sont alors ce que l'on peut appeler *points isotomiques* parce que les points que nous avons appelés ci-dessus *i* et *i'* sont symétriques pour le milieu de l'arête qui les porte : ce milieu n'est autre que σ ; quant à σ' , il est à l'infini sur l'arête. Ceci permet d'énoncer :

Dans un tétraèdre équifacial, le bissecteur d'un dièdre est en même temps plan médian (et donc aussi plan symédian) et deux plans isogonaux sont en même temps isotomiques.

Tout ceci peut aussi s'établir en utilisant la transposition autour de la médiatrice commune à deux arêtes opposées. Ne pas en conclure toutefois que deux points tels que I et I' soient symétriques pour une médiatrice commune.

Si, de plus, dans le cas du tétraèdre équifacial, les masses sont égales, les deux sommes

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ et $MA'^2 + MB'^2 + MC'^2 + MD'^2$
sont minimum au même point : ce point n'est autre que G, ou S, ou O, ou ω (notations du début).

Pour le tétraèdre régulier, on a des conclusions analogues. On peut alors calculer les deux minimum dans le cas des masses égales en fonction de l'arête du tétraèdre.

On peut remarquer que le cas du tétraèdre équifacial dans l'espace est à rapprocher du cas du triangle équilatéral dans le plan.