

DEUX STRUCTURES EQUIVALENTES POUR LA GEOMETRIE PLANE

par Claude FRASNAY

Maître-Assistant à la Faculté des Sciences de Grenoble

SOMMAIRE. — *L'objet de cet exposé est l'équivalence entre la structure de plan métrique euclidien (relativement à un groupe ordonné) et la structure de plan affine normé (relativement à un corps ordonné). Il s'agit surtout, en ce domaine à peu près classique, de préciser la terminologie et les idées générales, puisque la démonstration d'équivalence emprunte ses grandes lignes au développement traditionnel de la Géométrie.*

Le seul point délicat de cette démonstration concerne l'associativité et la commutativité du produit des scalaires dans une structure de plan métrique euclidien. Nous proposons une méthode basée sur le théorème de l'orthocentre et sur la règle de proportion : $ab = cd \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{d}{a}$. A cette occasion, nous établissons que la règle de proportion est caractéristique des groupes commutatifs.

§ 1. ESPACES METRIQUES, ESPACES AFFINES NORMES

Les structures qui nous intéressent concernent deux ensembles de base : un ensemble E de *points*, un ensemble S de *scalaires*.

I. STRUCTURE D'ESPACE MÉTRIQUE.

1. Groupes totalement ordonnés.

a) Une structure (α, ω) de *groupe totalement ordonné* sur un ensemble S comporte une addition α et un ordre ω vérifiant l'axiome (G) suivant :

(G) L'ensemble S , muni de l'addition α , est un groupe commutatif non réduit à son élément neutre. L'ordre ω est total sur S et compatible avec l'addition α : $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (quels que soient les scalaires x, y, z de S).

b) Pour tout scalaire x du groupe totalement ordonné S , posons : $|x| = \text{Max}(x, -x)$. Cette *valeur absolue* vérifie, quels que soient les scalaires a, b de S :

$$\left\{ \begin{array}{l} |a| = 0 \iff a = 0, \\ |a| = |-a|, \\ |a + b| \leq |a| + |b| \end{array} \right.$$

c) Lorsqu'on choisit un scalaire $u \in S$ tel que $u > 0$, la conjonction de l'axiome (G) et de la condition $u > 0$ constitue l'axiome (GJ) d'une structure (α, ω, u) de *groupe totalement ordonné et jaugé* sur S .

2. Espaces métriques.

a) Soit (α, ω) une structure de *groupe totalement ordonné* sur un ensemble S , et soit E un ensemble non vide.

Une structure (α, ω, δ) d'*espace métrique* sur E (relativement au groupe totalement ordonné S) est définie par une application

$(P, Q) \rightarrow \delta(P, Q)$ de $E \times E$ dans S (*distance* des points P, Q) vérifiant l'axiome (M) suivant :

(M) Quels que soient les points A, B, C de E , on a :

$$\begin{cases} \delta(A, B) = 0 \iff A = B, \\ \delta(A, B) = \delta(B, A), \\ \delta(A, C) \leq \delta(A, B) + \delta(B, C). \end{cases}$$

Cet axiome implique immédiatement $\delta(P, Q) \geq 0$ (quels que soient les points P, Q de E).

Lorsque S est jaugé par un scalaire u , le même axiome (M) définit une structure $(\alpha, \omega, u, \delta)$ d'espace métrique sur E relativement au groupe totalement ordonné et jaugé S .

b) Si F est une partie non vide d'un espace métrique E , la restriction de l'application δ à l'ensemble $F \times F$ définit F comme *sous-espace métrique* de E .

Si E et E' sont deux espaces métriques relativement au même groupe totalement ordonné S , une *isométrie* entre E et E' est une application φ de E sur E' conservant les distances (ce qui implique la biunivocité de φ).

3. Espaces réglés.

a) Comme exemple d'espace métrique relativement à un groupe totalement ordonné S , on peut prendre (en vertu des propriétés de la valeur absolue) l'ensemble S lui-même muni de la fonction distance

$$\delta(x, y) = |x - y| \text{ (métrique canonique sur } S\text{)}.$$

Un espace métrique D (relativement à S) est appelé une *droite métrique* dès que D est isométrique à S (muni de sa métrique canonique).

b) Un *espace réglé* est un espace métrique E non réduit à un point et contenant, pour tout couple (A, B) de points distincts, une droite métrique D et une seule passant par A et B . Dans un tel espace réglé E , on peut alors montrer que le *segment* $[A, B]$ de la droite D est l'ensemble des points $P \in E$ tels que $\delta(A, B) = \delta(A, P) + \delta(P, B)$.

c) Soit D une droite d'un espace réglé E .

Une *droite orientée* $\Delta = (D, \theta)$ de *support* D est définie par un ordre θ total sur D , vérifiant (quels que soient les points A, B, P de D) la condition :

$$P \in [A, B] \iff A \leq P \leq B \text{ ou } B \leq P \leq A.$$

A une telle *orientation* θ de D , on peut associer une *mesure*

$(P, Q) \rightarrow \overline{PQ}$ (application de $D \times D$ dans S) en posant :

$$\begin{cases} \overline{PQ} = \delta(P, Q) \text{ si } P \leq Q, \\ \overline{PQ} = -\delta(P, Q) \text{ si } Q < P. \end{cases}$$

Il en résulte immédiatement $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ quels que soient les points A, B, C de D . On montre alors facilement que la droite D supporte deux droites orientées (et deux seulement) : $\Delta_1 = (D, \theta_1)$ et $\Delta_2 = (D, \theta_2)$, d'orientations θ_1 et θ_2 opposées.

Toute isométrie de l'espace réglé E (sur lui-même) transforme une droite en une droite, une droite orientée en une droite orientée.

4. Notion de pliage.

On dit qu'un espace réglé E est *pliable* autour d'un sous-espace métrique F (ou que F est un *pli* de E) s'il existe une partition $\{F, F_1, F_2\}$

de E et une isométrie σ de $F \cup F_1$ sur $F \cup F_2$ vérifiant (quels que soient les points P, P_1, P_2 de E) :

- $$\begin{cases} P \in F \Rightarrow \sigma(P) = P, \\ P_1 \in F_1 \text{ et } P_2 \in F_2 \Rightarrow \text{le segment } [P_1, P_2] \text{ rencontre } F. \end{cases}$$

On démontre alors les propriétés suivantes :

a) La relation « $[P, Q]$ ne rencontre pas F » est une relation d'équivalence entre points P, Q de l'ensemble $F' = F_1 \cup F_2$ (complémentaire de F dans E). Les ensembles F_1, F_2 sont les classes de F' pour cette relation. La partition $\{F, F_1, F_2\}$ associée au pli F est donc unique : F_1 et F_2 sont les *demi-espaces de bord* F .

b) Pour un point $A \in E$, considérons la fonction $f(P) = \delta(A, P)$ lorsque P parcourt le pli F . Il existe un point $B \in F$ et un seul tel que $f(B)$ soit valeur minimum de la fonction $f(P)$: on dit que B est la *projection* de A sur le pli F .

c) La relation « P se projette sur F au milieu du segment $[P, Q]$ » définit une application biunivoque $Q = \psi(P)$ de E sur lui-même. Cette transformation ψ est une isométrie involutive, dite *symétrie* par rapport au pli F . La symétrie ψ est un prolongement du *pliage* σ associé à F : ce pliage est donc unique.

d) Toute isométrie φ de l'espace réglé E (sur lui-même) transforme le pli F en un pli $\varphi(F)$. Si deux points P et Q sont symétriques par rapport à F , les points $\varphi(P)$ et $\varphi(Q)$ sont symétriques par rapport à $\varphi(F)$ (autrement dit : la transmuée $\varphi \circ \varphi^{-1}$ d'une symétrie ψ par une isométrie φ est encore une symétrie). Si N est la projection de P sur le pli F , $\varphi(N)$ est la projection de $\varphi(P)$ sur le pli $\varphi(F)$.

5. Structure topologique sous-jacente à une structure métrique.

a) Soit A un point d'un espace métrique E (relativement à un groupe totalement ordonné S). Pour tout scalaire $r \in S$ tel que $r > 0$, la *boule* de centre A et de rayon r est l'ensemble des points $P \in E$ tels que :

$$\delta(A, P) < r.$$

Les boules permettent d'introduire sur E une structure sous-jacente d'espace topologique séparé en convenant qu'une partie F de E est voisine d'un point $A \in E$ dès que F contient une boule de centre A .

b) Dans un espace réglé E , la frontière d'une boule de centre A et de rayon r est l'ensemble des points $P \in E$ tels que $\delta(A, P) = r$.

Pour un espace réglé E , considérons la proposition suivante :

(C) Si une droite D de E rencontre une boule B de E , alors D rencontre aussi la frontière de B .

Lorsque la proposition (C) est vraie, quelles que soient D et B , on dit que E vérifie l'*axiome du compas*. Il en est ainsi, par exemple, lorsque E est un espace réglé relativement au groupe additif ordonné $\mathbb{R}$ des nombres réels.

II. STRUCTURE D'ESPACE AFFINE NORMÉ.

1. Espaces affines.

a) Sur un ensemble S , soit (α, μ) une structure de *corps* définie par une addition α et une multiplication μ .

Soit E un ensemble non vide : les transformations de E (applications

biunivoques de E sur E) constituent un groupe $\mathcal{G}$ pour l'opération interne $\varphi \circ \psi$ (composition de deux transformations φ et ψ).

Une structure $(\alpha, \mu, \mathcal{C}, h)$ d'espace affine sur E (relativement au corps S) est définie par une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{G}$ et une application

$(x, \varphi) \rightarrow h(x, \varphi)$ de $S \times \mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ (*multiplication affine*) vérifiant l'axiome (A) suivant :

(A) L'opération interne $\psi \circ \varphi$ et l'opération externe $h(x, \varphi)$ définissent sur $\mathcal{C}$ une structure d'espace vectoriel relativement au corps S . Pour tout couple $(P, Q) \in E \times E$, il existe une transformation $\varphi \in \mathcal{C}$ et une seule telle que $Q = \varphi(P)$.

La conjonction de l'axiome (A) et de la condition « $\dim \mathcal{C} = n$ » constitue l'axiome (A_n) d'une structure d'espace affine de dimension n (sur E , relativement à S) : droite affine si $n = 1$, plan affine si $n = 2$, etc.

b) Pour la structure $(\alpha, \mu, \mathcal{C}, h)$ précédente, les transformations $\varphi \in \mathcal{C}$ sont les *translations* de l'espace affine E . L'axiome (A) implique : « $\mathcal{C}$ est un sous-groupe commutatif de $\mathcal{G}$ ». Il est d'usage de noter additivement $(\varphi + \psi)$ au lieu de $\psi \circ \varphi$ la composition des translations et d'écrire $x\varphi$ au lieu de $h(x, \varphi)$ pour la multiplication affine.

Pour tout couple (P, Q) de points de E , désignons par $\overrightarrow{PQ}$ la translation transformant P en Q . L'application $(P, Q) \rightarrow \overrightarrow{PQ}$ de $E \times E$ dans $\mathcal{C}$ vérifie (quels que soient les points A, B, C de E) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = 0 \iff A = B, \\ \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}, \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}. \end{array} \right.$$

Pour tout sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{C}$ et tout point $A \in E$, introduisons l'ensemble F des points $P \in E$ tels que $\overrightarrow{AP} \in \mathcal{V}$. En restreignant à F les translations $\varphi \in \mathcal{V}$, on peut définir sur F une structure d'espace affine (relativement au corps S) : pour cette raison, on dit que F est un *sous-espace affine* de E . En particulier, lorsque $\dim \mathcal{V} = 1$, F est une droite affine de E admettant comme *vecteur directeur* tout vecteur $\varphi \in \mathcal{V}$ tel que $\varphi \neq 0$: dès lors, la droite F est l'ensemble des points $P \in E$ tels que $\overrightarrow{AP} = x\varphi$ lorsque x parcourt S .

c) Exemple fondamental d'espace affine.

Prenons pour E un espace vectoriel relativement au corps S . Pour tout couple $(A, P) \in E \times E$, posons $\varphi_A(P) = P + A$. Lorsque A parcourt E , les applications φ_A constituent un groupe $\mathcal{C}$ de transformations de E . Introduisons sur $\mathcal{C}$ une multiplication affine h en posant $h(x, \varphi_A) = \varphi_{xA}$ pour tout $x \in S$. Il est immédiat que $(\alpha, \mu, \mathcal{C}, h)$ est une structure d'espace affine sur E , relativement au corps S .

Les identités $\varphi_A + \varphi_B = \varphi_B \circ \varphi_A = \varphi_{A+B}$ et $x\varphi_A = \varphi_{xA}$ montrent que l'application $A \rightarrow \varphi_A$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel E sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}$.

2. Corps ordonnés.

Une structure (α, μ, ω) de *corps ordonné* sur un ensemble S comporte une addition α , une multiplication μ et un ordre ω vérifiant l'axiome (K) suivant :

(K) L'ensemble S , muni de l'addition α et de la multiplication μ , est

un corps commutatif. L'ordre ω est total sur S et compatible avec les opérations α, μ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{quels que soient les scalaires} \\ x, y, z \text{ de } S. \end{array}$$

Si u est l'unité du corps S , la structure (α, ω, u) est une structure de groupe totalement ordonné et jaugé, sous-jacente à la structure (α, μ, ω) de corps ordonné.

Un corps ordonné S est dit *pythagoricien* si, quels que soient les scalaires x et y de S , il existe $z \in S$ tel que $z^2 = x^2 + y^2$. (En outre, z est unique lorsqu'on astreint ce scalaire à la condition $z \geq 0$: on note alors

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3. Espaces vectoriels normés.

a) Sur un ensemble S , soit (α, μ, ω) une structure de corps ordonné définie par une addition α , une multiplication μ et un ordre ω .

Sur un ensemble V , soit (α, μ, t, h) une structure d'espace vectoriel (relativement au corps S) définie par une opération interne t et une opération externe h .

Une structure $(\alpha, \mu, \omega, t, h, n, p)$ d'espace vectoriel normé sur V (relativement au corps ordonné S) est définie par une application $\varphi \rightarrow \|\varphi\|$ de V dans S (norme n) et une application $(\varphi, \psi) \rightarrow \varphi \cdot \psi$ de $V \times V$ dans S (produit scalaire p) vérifiant l'axiome (N) suivant :

(N) Quels que soient les vecteurs φ, ψ, θ de V et le scalaire x de S , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \cdot \varphi = \|\varphi\|^2, \\ \varphi \neq 0 \Rightarrow \|\varphi\| > 0, \\ \varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi, \\ \theta \cdot (\varphi + \psi) = \theta \cdot \varphi + \theta \cdot \psi, \\ \varphi \cdot (x\psi) = x(\varphi \cdot \psi). \end{array} \right.$$

Un vecteur $\varphi \in V$ est *unitaire* lorsque $\|\varphi\| = u$ (unité du corps S). Deux vecteurs φ, ψ de V sont *orthogonaux* lorsque $\varphi \cdot \psi = 0$. Une famille de vecteurs de V est *orthonormée* lorsque ses vecteurs sont unitaires et deux à deux orthogonaux.

b) Propriétés d'une norme et d'un produit scalaire.

Soit V un espace vectoriel normé relativement à un corps ordonné S . Quels que soient les vecteurs φ, ψ de V et le scalaire x de S , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\varphi\| = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0, \\ \|x\varphi\| = |x| \|\varphi\|, \\ \varphi \cdot \psi \leq \|\varphi\| \|\psi\|, \\ \|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|. \end{array} \right.$$

L'inégalité $\varphi \cdot \psi \leq \|\varphi\| \|\psi\|$ est banale lorsque $\varphi = 0$. Lorsque $\varphi \neq 0$, elle résulte de $\|a\psi - b\varphi\|^2 = a(ac - b^2)$ en posant $a = \|\varphi\|^2$, $b = \varphi \cdot \psi$ et $c = \|\psi\|^2$.

L'inégalité $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$ se déduit de la précédente en comparant $\|\varphi + \psi\|^2$ et $(\|\varphi\| + \|\psi\|)^2$.

c) Si V est un espace vectoriel normé de dimension 2, et si (φ_1, φ_2) est un couple de vecteurs indépendants, on peut poser :

$$\psi_0 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}, \quad \psi_1 = \varphi_2 - (\varphi_0 \cdot \varphi_2)\varphi_0, \quad \psi_2 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|}.$$

Dès lors, le couple de vecteurs (ψ_0, ψ_2) est orthonormé. Pour tout couple (x, y) de scalaires, la norme $z = \|\theta\|$ du vecteur $\theta = x\psi_0 + y\psi_2$ vérifie

$z^2 = x^2 + y^2$. Autrement dit, le corps ordonné S des scalaires est nécessairement pythagoricien.

Réciproquement, si S est un corps ordonné pythagoricien, l'espace vectoriel produit $V = S \times S$ (de dimension 2) peut être muni du produit scalaire $(x, y) \cdot (x', y') = xx' + yy'$ et de la norme $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Espaces affines normés.

Sur un ensemble S , soit (α, μ, ω) une structure de corps ordonné définie par une addition α , une multiplication μ et un ordre ω .

Sur un ensemble E non vide, soit $(\alpha, \mu, \mathcal{C}, h)$ une structure d'espace affine relativement au corps S définie par un groupe $\mathcal{C}$ de translations et une multiplication affine h . Si t désigne l'opération interne dans $\mathcal{C}$ (addition de deux translations), la structure (α, μ, t, h) est une structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{C}$ relativement au corps S .

Une structure $(\alpha, \mu, \omega, \mathcal{C}, h, n, p)$ d'espace affine normé sur E (relativement au corps ordonné S) est définie par une norme $\varphi \rightarrow n(\varphi)$ (application de $\mathcal{C}$ dans S) et par un produit scalaire $(\varphi, \psi) \rightarrow p(\varphi, \psi)$ (application de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ dans S) vérifiant la condition :

« La structure $(\alpha, \mu, \omega, t, h, n, p)$ est une structure d'espace vectoriel normé sur l'ensemble $\mathcal{C}$, relativement au corps ordonné S ».

La conjonction de cette condition et de l'axiome (A) constitue l'axiome (AN) d'une structure d'espace affine normé. De manière analogue, nous noterons (A_nN) l'axiome d'une structure d'espace affine normé de dimension n .

5. Structure métrique sous-jacente à une structure affine normée.

Sur un ensemble S , soit (α, μ, ω) une structure de corps ordonné. L'addition α , la multiplication μ et l'ordre ω vérifient l'axiome (K).

Sur un ensemble E , soit $\Sigma = (\alpha, \mu, \omega, \mathcal{C}, h, n, p)$ une structure d'espace affine normé relativement au corps ordonné S . Le groupe $\mathcal{C}$ des translations, la multiplication affine h , la norme n et le produit scalaire p vérifient l'axiome (AN) relativement à (α, μ, ω) .

a) Si u est l'unité du corps S , la structure (α, ω, u) est une structure de groupe totalement ordonné et jaugé sur S . L'addition α , l'ordre ω et la jauge u vérifient l'axiome (GJ).

b) Pour tout couple (P, Q) de points de E , posons :

$$\delta(P, Q) = \|\vec{PQ}\|.$$

Des propriétés de la norme $n(\varphi) = \|\varphi\|$ et du produit scalaire $p(\varphi, \psi) = \varphi \cdot \psi$ dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{C}$, il résulte que la distance δ (application de $E \times E$ dans S) vérifie l'axiome (M) relativement à (α, ω) .

Autrement dit, la structure $\sigma = (\alpha, \omega, \mu, \delta)$ est une structure d'espace métrique sur E relativement au groupe totalement ordonné et jaugé S . Notons Π le procédé de déduction associant la structure σ à la structure $\Sigma = (\alpha, \mu, \omega, \mathcal{C}, h, n, p)$: la structure métrique $\sigma = \Pi(E, S, \Sigma)$ est dite sous-jacente à la structure affine normée Σ .

La structure sous-jacente σ est, bien entendu, plus riche qu'une simple structure d'espace métrique. Par exemple, il y a identité entre les droites affines de E (pour la structure Σ) et les droites métriques de E (pour la structure σ). Il en résulte que E , s'il n'est pas réduit à un point, est un espace réglé.

§ 2. PLANS METRIQUES EUCLIDIENS, PLANS AFFINES NORMES

Nous allons nous restreindre à l'axiomatique de la géométrie plane et définir des structures plus particulières : structure de plan métrique, structure de plan métrique euclidien, structure de plan affine normé. Simultanément, le seul développement que nous donnerons à cette axiomatique se résumera en une trentaine de propositions classiques, indispensables à la démonstration d'équivalence que nous avons en vue.

I. STRUCTURE DE PLAN MÉTRIQUE.

1. Plans métriques.

Sur un ensemble E non vide, soit (α, ω, δ) une structure d'espace métrique relativement à un groupe totalement ordonné S . Il est entendu que l'addition α , l'ordre ω et la distance δ vérifient les axiomes (G) et (M).

On dit que E est un *plan métrique* (relativement à S) s'il vérifie l'axiome (P) suivant :

(P) L'espace métrique E est un espace réglé pliable autour de chacune de ses droites.

Dès lors, pour toute droite D du plan E , nous noterons $[D]$ la symétrie de E autour de D .

2. Parallélisme et perpendicularité.

a) Soient D et D' deux droites quelconques du plan métrique E .

La relation de *parallélisme* $D \parallel D'$ se définit par :

« $D = D'$ ou D, D' ne se rencontrent pas. ».

La relation de *perpendicularité* $D \perp D'$ se définit par :

« $D \neq D'$ et D' est invariante par la symétrie $[D]$. ».

Proposition 1. — Quelles que soient les droites D, D' et l'isométrie φ du plan métrique E :

$$\begin{cases} D \parallel D' \Rightarrow D' \parallel D \text{ et } \varphi(D) \parallel \varphi(D'), \\ D \perp D' \Rightarrow D' \perp D \text{ et } \varphi(D) \perp \varphi(D'). \end{cases}$$

b) Si deux points distincts A et B sont symétriques par rapport à une droite D , on dit que D est *médiatrice* du segment $[A, B]$. Soient D_1 et D_2 les *demi-plans* de bord D , tels que $A \in D_1$ et $B \in D_2$. Posons : $f(P) = \delta(P, B) - \delta(P, A)$ pour P variant dans le plan E .

Proposition 2. — Les relations $P \in D$, $P \in D_1$, $P \in D_2$ sont respectivement équivalentes à $f(P) = 0$, $f(P) > 0$, $f(P) < 0$.

Corollaire. — Si un triangle $\{A, B, C\}$ vérifie $\delta(C, A) = \delta(C, B)$, la projection de C sur la droite AB est milieu du segment $[A, B]$.

c) *Proposition 3.* — Etant donné une droite D et un point P , il passe par P une droite D' et une seule telle que $D \perp D'$.

(Comme D' passe nécessairement par la projection de P sur D , le seul cas délicat est : $P \in D$).

Corollaire 1. — $D \perp D'_1$ et $D \perp D'_2 \Rightarrow D'_1 \parallel D'_2$.

Corollaire 2. — Etant donné deux droites orientées Δ, Δ' de supports D, D' non perpendiculaires, soit $P' = \psi(P)$ l'application de Δ dans Δ' définie par : « $P \in D$ et P' est la projection de P sur D' . » La fonction ψ est strictement monotone.

3. Symétries et transpositions.

a) *Proposition 4.* — Les seules isométries du plan E conservant point par point une droite D sont la transformation identique et la symétrie [D].

Corollaire. — Les droites d'un plan métrique E sont les seuls plis de E.

b) *Proposition 5.* — Si Δ et Δ' sont deux droites orientées sécantes, il existe une symétrie [D] et une seule transformant Δ en Δ' . (La droite D est dite *bissectrice* des droites orientées Δ, Δ').

c) A tout point $A \in E$, on peut associer la transformation involutive $P' = \varphi(P)$ de E définie par : « A est milieu de $[P, P']$. ». La transformation φ est la *transposition* de centre A : nous la noterons (A).

Proposition 6. — Si D_1 et D_2 sont deux droites perpendiculaires quelconques passant par A, on a : $(A) = [D_2] \circ [D_1]$.

Corollaire. — Toute transposition φ est une isométrie. Pour une telle transposition φ et toute droite D de E, on a $\varphi(D) \parallel D$.

4. Repérage d'un plan métrique.

Considérons un couple $\varrho = (\Delta_1, \Delta_2)$ de droites orientées de E dont les supports D_1, D_2 sont perpendiculaires : on dit que ϱ est un *repère* du plan métrique E. Le point A commun à D_1 et D_2 est l'*origine* de ce repère.

a) Pour tout point $P \in E$, soient P_1 et P_2 les projections de P sur D_1 et D_2 . Les scalaires $x = \overline{AP_1}$ (mesure sur Δ_1) et $y = \overline{AP_2}$ (mesure sur Δ_2) sont les *coordonnées* de P dans le repère ϱ : *abscisse* x, *ordonnée* y. On définit ainsi une application biunivoque $P \rightarrow (x, y)$ de E sur une partie T de $S \times S$ (on peut avoir $T \neq S \times S$).

Dès lors, toute transformation $P \rightarrow P'$ de E peut être caractérisée (dans ϱ) par une transformation $(x, y) \rightarrow (x', y')$ de T.

b) Si D est la bissectrice de Δ_1 et Δ_2 , on peut mentionner cinq isométries remarquables de E (associées au repère ϱ) : les trois symétries $[D_1]$, $[D_2]$, [D], la transposition $(A) = [D_2] \circ [D_1]$ et l'isométrie $\psi = [D] \circ [D_1]$. L'isométrie ψ conserve A et transforme Δ_1 en Δ_2 : nous dirons que ψ est une *rotation normale* de centre A.

Proposition 7. — Les transformés du point (x, y) par les cinq isométries remarquables $[D_1]$, $[D_2]$, [D], (A) et ψ sont respectivement les points $(x, -y)$, $(-x, y)$, (y, x) , $(-x, -y)$ et $(-y, x)$.

Corollaire. — Toute rotation normale ψ de centre A vérifie :

$$\psi \circ \psi = (A).$$

Proposition 8. — Si ψ est une rotation normale de centre A, et D une droite passant par A, on a : $\psi(D) \perp D$.

(Conséquence des corollaires des propositions 2 et 7).

5. Nous dirons que le groupe totalement ordonné S est un groupe *dyadique* si, pour tout $x \in S$, il existe $y \in S$ tel que $x = 2y$. Dès lors, pour A et B distincts dans le plan E, le segment $[A, B]$ a toujours un milieu et une médiatrice. Dans ce cas :

Proposition 9. — Etant donné quatre points P, Q, P', Q' de E tels que $\delta(P, Q) = \delta(P', Q') \neq 0$, il existe deux isométries de E (et deux seulement) transformant P en P' et Q en Q'.

Corollaire. — Etant donné deux repères ϱ et ϱ' de E, il existe une isométrie $P \rightarrow P'$ de E (et une seule) transformant ϱ en ϱ' . Les coordonnées de P' dans ϱ' sont identiques aux coordonnées de P dans ϱ .

II. STRUCTURE DE PLAN MÉTRIQUE EUCLIDIEN.

1. Plans métriques euclidiens.

Sur un ensemble E , soit (α, ω, δ) une structure de plan métrique relativement à un groupe totalement ordonné S . Il est entendu que l'addition α , l'ordre ω et la distance δ vérifient les axiomes (G), (M) et (P).

On dit que le plan métrique E est *euclidien* s'il vérifie l'axiome (H) suivant (dit *axiome des parallèles*) :

(H) Si deux droites D_1 et D_2 de E se rencontrent, et s'il existe une autre droite de E ne les rencontrant pas, alors $D_1 = D_2$.

Remarque. — En parlant de plan métrique « euclidien », nous reprenons une dénomination traditionnelle. Mais, en fait, la géométrie plane d'Euclide doit être considérée comme l'étude d'une structure un peu plus riche : celle d'un plan métrique vérifiant, non seulement l'axiome des parallèles, mais aussi l'axiome du compas.

2. Parallélisme.

a) *Proposition 10.* — Etant donné une droite D et un point P du plan métrique euclidien E , il passe par P une droite D' de E et une seule telle que $D \parallel D'$.

Corollaire 1. — La relation « $D \parallel D'$ » est une relation d'équivalence entre droites D, D' de E . (La classe d'une droite D pour cette relation est appelée la *direction* de D).

Corollaire 2. — Quelles que soient les droites D_1, D_2, D'_1, D'_2 de E :

$$D_1 \perp D_2, D_1 \parallel D'_1 \text{ et } D_2 \parallel D'_2 \Rightarrow D'_1 \perp D'_2.$$

Corollaire 3. — Si un point P parcourt E , et si (x, y) sont les coordonnées de P dans un repère φ , la fonction $P \rightarrow (x, y)$ applique E sur $T = S \times S$.

b) *Proposition 11.* — Si $D_1 \parallel D_2$ et $D_1 \neq D_2$, il existe une symétrie $[D]$ et une seule transformant la droite D_1 en la droite D_2 . La droite D (parallèle à D_1 et D_2) est l'ensemble des points $A \in E$ tels que la transposition (A) transforme D_1 en D_2 .

Corollaire 1. — Si trois droites parallèles D, D', D'' sont coupées par une sécante en trois points M, M', M'' tels que M' soit milieu de $[M, M'']$, il en est de même pour toute autre sécante (*lemme de Thalès*).

Corollaire 2. — Le groupe S des scalaires d'un plan métrique euclidien vérifie la condition : « Pour tout $x \in S$ et tout entier $n \geq 2$, il existe $y \in S$ tel que $x = ny$. ».

(En particulier, S est un groupe dyadique. La proposition 9 et son corollaire sont donc valables dans un plan métrique euclidien).

c) *Proposition 12.* — Les trois côtés $[B, C]$, $[C, A]$, $[A, B]$ d'un triangle quelconque $\{A, B, C\}$ ont leurs médiatrices concourantes.

(Conséquence des propositions 2, 3 et du corollaire 2 de la proposition 10).

3. Glissements.

Appelons *glissement* d'un plan métrique euclidien E toute isométrie φ de E décomposable en un produit $\varphi = (B) \circ (A)$ de deux transpositions.

La transformation identique est un glissement. Tout glissement autre que la transformation identique est dit un glissement *strict*.

a) *Proposition 13.* — Si φ est un glissement strict, il existe une direction d et une seule telle que :

$$\begin{cases} D \text{ est une droite de direction } d \Rightarrow \varphi(D) = D, \\ D \text{ est une droite de direction } \neq d \Rightarrow \varphi(D) \neq D \text{ et } \varphi(D) \parallel D. \end{cases}$$

(On dit que d est la *direction* du glissement strict φ).

Proposition 14. — Si φ est un glissement strict de direction d , il transforme tout point P en un point $P' \neq P$ tel que la droite PP' ait la direction d .

Proposition 15. — Etant donné deux points P et P' de E , il existe un glissement et un seul transformant P en P' .

Proposition 16. — Etant donné un glissement φ , on peut (d'une infinité de façons) le décomposer en un produit $\varphi = (B) \circ (A)$ de deux transpositions. On peut choisir arbitrairement dans E : soit le point A , soit le point B .

b) La relation : « Il existe un glissement φ tel que $A' = \varphi(A)$ et $B' = \varphi(B)$ », est une relation d'équivalence entre couples (A, A') et (B, B') de points de E . On peut la noter $(A, A') \equiv (B, B')$, et on l'exprime aussi en disant que (A, A', B', B) est un *parallélogramme*.

Proposition 17. — $(A, A') \equiv (B, B') \iff [A, B']$ et $[A', B]$ ont même milieu.

Corollaire 1. — $(A, A') \equiv (B, B') \Rightarrow (A, B) \equiv (A', B')$.

Corollaire 2. — Si P, P', Q, Q' sont les projections de A, A', B, B' sur une droite D :

$$(A, A') \equiv (B, B') \Rightarrow (P, P') \equiv (Q, Q').$$

Proposition 18. — Si A, A', B, B' sont quatre points d'une même droite orientée : $(A, A') \equiv (B, B') \iff \overline{AA'} = \overline{BB'}$. Si A, A', B, B' sont quatre points distincts non alignés :

$$(A, A') \equiv (B, B') \iff AA' \parallel BB' \text{ et } AB \parallel A'B'.$$

Corollaire. — Si un glissement conserve une droite D , il conserve les deux droites orientées Δ_1 et Δ_2 de support D .

Proposition 19. — Les hauteurs d'un triangle $\{A, B, C\}$ sont concourantes.

(Conséquence des propositions 12 et 18).

c) *Proposition 20.* — Si $\mathcal{I}$ est le groupe des isométries de E , les glissements de E constituent un sous-groupe commutatif $\mathcal{G}$ de $\mathcal{I}$.

(Conséquence des propositions 15, 16 et du corollaire 1 de la proposition 17).

Etant donné un repère φ de E , d'origine A , on peut associer à tout glissement φ de E le point $P = \varphi(A)$, puis le couple (x, y) des coordonnées de P dans φ . Il en résulte une application biunivoque $\varphi \rightarrow (x, y)$ de $\mathcal{G}$ sur $S \times S$.

Proposition 21. — L'application $\varphi \rightarrow (x, y)$ est un isomorphisme du groupe $\mathcal{G}$ sur le groupe produit $S \times S$. Autrement dit, la relation « $\varphi \rightarrow (x, y)$ et $\varphi' \rightarrow (x', y')$ » entraîne la relation :

$$\ll \varphi' \circ \varphi \rightarrow (x + x', y + y') \gg.$$

III. STRUCTURE DE PLAN AFFINE NORMÉ.

1. Plans affines normés.

Sur un ensemble S , soit (α, μ, ω) une structure de corps ordonné. Il est entendu que l'addition α , la multiplication μ et l'ordre ω vérifient l'axiome (K).

Sur un ensemble E , soit $\Sigma = (\alpha, \mu, \omega, \mathcal{C}, h, n, p)$ une structure de plan affine normé relativement au corps ordonné S . Il est entendu que le groupe $\mathcal{C}$ des translations, la multiplication affine h , la norme n et le produit scalaire p vérifient l'axiome (A_2N) , conjonction des axiomes (A_2) et (N) :

(A_2) L'opération interne $\psi \circ \varphi = \varphi + \psi$ et l'opération externe $h(x, \varphi) = x\varphi$ définissent sur $\mathcal{C}$ une structure d'espace vectoriel de dimension 2 relativement au corps S . Pour tout couple (P, Q) de points de E , il existe une transformation $\varphi \in \mathcal{C}$ et une seule telle que $Q = \varphi(P)$.

(N) La norme $n(\varphi) = \|\varphi\|$ et le produit scalaire $p(\varphi, \psi) = \varphi \cdot \psi$ définissent sur $\mathcal{C}$ une structure d'espace vectoriel normé relativement au corps ordonné S .

Des conditions d'existence précédemment énoncées pour un espace affine et pour un espace vectoriel normé de dimension 2, il résulte : « Pour qu'il existe un plan affine normé relativement à un corps ordonné S , il faut et il suffit que S soit un corps pythagoricien. »

2. Structure métrique sous-jacente.

Etant donné deux ensembles E et S , soit $\Sigma = (\alpha, \mu, \omega, \mathcal{C}, h, n, p)$ une structure de plan affine normé sur E relativement à une structure (α, μ, ω) de corps ordonné sur S . Soit $\sigma = (\alpha, \omega, u, \delta)$ la structure sous-jacente d'espace métrique sur E relativement à la structure (α, ω, u) de groupe totalement ordonné et jaugé sur S .

Nous savons déjà que l'espace métrique E est réglé, puisque les droites métriques de E (pour la structure σ) se confondent avec les droites affines de E (pour la structure Σ).

a) Si A et B sont deux points d'une droite quelconque D de E , tels que $\overrightarrow{AB}$ soit unitaire, on peut trouver une base orthonormée (φ, ψ) de l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ telle que $\varphi = \overrightarrow{AB}$.

Si l'on pose $f(P) = \overrightarrow{AP} \cdot \psi$, la droite D est l'ensemble des points $P \in E$ tels que $f(P) = 0$. Introduisons l'ensemble D_1 des points $P \in E$ tels que $f(P) > 0$, et l'ensemble D_2 des points $P \in E$ tels que $f(P) < 0$. A tout point $P \in D \cup D_1$ tel que $\overrightarrow{AP} = x\varphi + y\psi$ (pour $y \geq 0$), on peut associer le point $P' \in D \cup D_2$ tel que $\overrightarrow{AP'} = x\varphi - y\psi$. En considérant la partition $\{D, D_1, D_2\}$ de E et l'application $P \rightarrow P'$ de $D \cup D_1$ sur $D \cup D_2$, on montre facilement que l'espace réglé E est pliable autour de la droite D .

La structure métrique sous-jacente σ vérifie donc l'axiome (P) : c'est une structure de plan métrique.

b) Soient deux droites D et D' du plan affine E , admettant respectivement des vecteurs directeurs φ et φ' . Lorsque D et D' ne se rencontrent pas, les vecteurs φ et φ' sont nécessairement dépendants. Il en résulte que la structure métrique σ vérifie l'axiome (H) des parallèles : c'est une structure de plan métrique euclidien.

Proposition 22. — La structure métrique sous-jacente à une structure de plan affine normé est une structure de plan métrique euclidien.

Remarque. — Pour que la métrique d'un plan affine normé (relativement à un corps ordonné S) vérifie l'axiome du compas, il faut et il suffit que S vérifie la condition : « Pour tout $x \in S$ tel que $x \geq 0$, il existe $y \in S$ tel que $x = y^2$. ». En prenant $S = \mathbb{P}$ (plus petit sous-corps pythagoricien du corps ordonné $\mathbb{R}$ des nombres réels), on obtient des plans affines normés ne vérifiant pas l'axiome du compas puisque, par exemple,

$$\sqrt{2} \in \mathbb{P} \text{ et } \sqrt[4]{2} \notin \mathbb{P}.$$

3. Soit E un plan affine normé relativement à un corps ordonné S .

Nous allons énoncer quelques propositions qui permettent d'interpréter « métriquement » les termes typiques de la structure de plan affine normé : multiplication xy dans S , groupe $\mathcal{C}$ des translations de E , multiplication affine $x\varphi$, norme $\|\varphi\|$ et produit scalaire $\varphi.\psi$.

a) *Proposition 23.* — Si φ et φ' sont des vecteurs directeurs de deux droites D et D' de E :

$$\begin{cases} D \parallel D' \iff \varphi \text{ et } \varphi' \text{ sont dépendants,} \\ D \perp D' \iff \varphi \text{ et } \varphi' \text{ sont orthogonaux.} \end{cases}$$

Proposition 24. — Pour toute droite orientée $\Delta = (D, \theta)$ de E , il existe un vecteur unitaire α et un seul tel que $\overrightarrow{PQ} = \overline{PQ} \alpha$ quels que soient les points P et Q de D .

Proposition 25. — Si trois droites parallèles distinctes D_0, D_1, D_2 de E sont coupées par deux droites orientées Δ, Δ' respectivement en P_0, P_1, P_2 et P'_0, P'_1, P'_2 , on a :

$$\frac{\overline{P_0P_1}}{\overline{P_0P_2}} = \frac{\overline{P'_0P'_1}}{\overline{P'_0P'_2}}$$

Corollaire. — Soient u l'unité du corps S et a, b deux scalaires quelconques de S . Pour tout repère ϱ d'origine A , les points de coordonnées (u, a) et (b, ab) sont alignés avec A .

b) *Proposition 26.* — Le groupe des translations de E (pour sa structure affine) est identique au groupe des glissements de E (pour sa structure métrique).

c) La multiplication affine $\psi = x\varphi$ et le produit scalaire $x = \varphi.\psi$ représentent deux relations entre un scalaire x de S et deux translations φ, ψ de E . Soient A, B, C trois points de E tels que $\overrightarrow{AB} = \varphi$ et $\overrightarrow{AC} = \psi$, Δ une droite orientée dont le support D passe par A et B , C' la projection de C sur D .

Proposition 27. — En effectuant les mesures sur Δ :

$$\begin{cases} \psi = x\varphi \iff C \in D \text{ et } (\overrightarrow{AC}) = x(\overrightarrow{AB}), \\ x = \varphi.\psi \iff x = (\overrightarrow{AB}) (\overrightarrow{AC'}). \end{cases}$$

§ 3. LE THEOREME D'EQUIVALENCE

Etant donné deux ensembles de base E, S et une structure $\Sigma = (\alpha, \mu, \omega, \mathcal{C}, h, n, p)$ d'espace affine normé sur E relativement à une structure (α, μ, ω) de corps ordonné sur S , on sait définir un procédé de déduction $\sigma = \Pi(E, S, \Sigma)$ associant à Σ une structure sous-jacente $\sigma = (\alpha, \omega, u, \delta)$ d'espace métrique sur E relativement à une structure (α, ω, u) de groupe totalement ordonné et jaugé sur S . Ce procédé consiste essentiellement à prendre comme jauge u l'unité du corps S et comme distance δ la fonction $\delta(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$.

Théorème d'équivalence : Si Σ est une structure de plan affine normé, la structure métrique sous-jacente $\sigma = \Pi(E, S, \Sigma)$ est une structure de plan métrique euclidien. Réciproquement, pour toute structure σ de plan métrique euclidien, il existe une structure Σ et une seule de plan affine normé telle que $\sigma = \Pi(E, S, \Sigma)$.

I. LES TROIS PARTIES DU THÉORÈME D'ÉQUIVALENCE.

Le théorème d'équivalence comprend trois propositions : une proposition directe, une proposition réciproque d'unicité, une proposition réciproque d'existence.

1. La *proposition directe* sur la métrique sous-jacente à un plan affine normé est la proposition 22.
2. La *proposition réciproque d'unicité* résulte du fragment de géométrie d'un plan affine normé, donné au § 2 (en III, 3). Il est possible d'interpréter « métriquement » les termes typiques μ , $\mathcal{C}$, h , n , p d'une structure $\Sigma = (\alpha, \mu, \omega, \mathcal{C}, h, n, p)$ de plan affine normé, en utilisant la structure sous-jacente $\sigma = (\alpha, \omega, u, \delta)$ de plan métrique euclidien.

Lorsque σ est donnée *a priori*, il en résulte bien l'unicité de Σ (mais sans que l'on sache encore si Σ existe). Plus précisément, si E est un plan métrique euclidien relativement à un groupe totalement ordonné et jaugé S :

- a) L'unicité de la multiplication μ (dans S) résulte du corollaire de la proposition 25.
- b) L'unicité du groupe $\mathcal{C}$ des translations de E résulte de la proposition 26.
- c) L'unicité de la multiplication affine h et l'unicité du produit scalaire p résultent de la détermination de μ et $\mathcal{C}$, et de la proposition 27.
- d) L'unicité de la norme n résulte de la détermination de $\mathcal{C}$ et du procédé de déduction II par lequel on pose $\|\varphi\| = \delta(P, Q)$ lorsque $\overrightarrow{PQ} = \varphi$.

3. La *proposition réciproque d'existence* va utiliser les fragments de géométrie d'un plan métrique et d'un plan métrique euclidien, donnés au § 2 (en I et II).

Etant donné une structure $\sigma = (\alpha, \omega, u, \delta)$ de plan métrique euclidien sur E (relativement à un groupe totalement ordonné et jaugé S), il s'agit de définir des termes typiques possibles μ , $\mathcal{C}$, h , n , p en se référant aux données de la proposition d'unicité. Puis de montrer que la structure ainsi introduite $\Sigma = (\alpha, \mu, \omega, \mathcal{C}, h, n, p)$ vérifie les axiomes (K) et (A₂N) d'un plan affine normé (relativement à un corps ordonné).

Nous allons nous consacrer maintenant à la démonstration de cette proposition réciproque d'existence. Mais, auparavant, nous allons établir un lemme intéressant (le *lemme des proportions*) qui simplifiera l'étude de la multiplication μ des scalaires dans une structure de plan métrique euclidien.

II. LE LEMME DES PROPORTIONS.

1. Soit G un ensemble muni d'une opération interne partout définie $(x, y) \rightarrow xy$ (notée multiplicativement). Pour pouvoir introduire des rapports et des proportions entre des éléments de G , il faut supposer préalablement que la multiplication xy vérifie les deux conditions suivantes :

- a) G possède une unité u pour la multiplication xy .
(Cet élément u , caractérisé par « $ux = xu = x$ pour tout $x \in G$ » est nécessairement unique).
- b) Tout élément $z \in G$ admet un inverse z^{-1} , et un seul, pour la multiplication xy .

(Cet élément z^{-1} est caractérisé par « $zz^{-1} = z^{-1}z = u$ », ce qui implique : $(z^{-1})^{-1} = z$ et $u^{-1} = u$).

Pour abrégé, lorsque ces deux conditions sont vérifiées, nous dirons que G est un *quasi-groupe*. (Il manque la condition d'associativité pour que G soit un groupe).

2. Dans un quasi-groupe G , on peut noter l'élément $y^{-1}x$ sous la forme d'un *rapport* : $\frac{x}{y} = y^{-1}x$. On dit que G vérifie la *règle de proportion* (ou règle « des moyens et des extrêmes ») quand on a : $ab = cb \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{d}{a}$ (quels que soient les éléments a, b, c, d de G).

Remarquons que l'identité $ab = cd \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{d}{a}$ implique sa réciproque $\frac{b}{c} = \frac{d}{a} \Rightarrow ab = cd$.

Lorsque le quasi-groupe G est un groupe commutatif (autrement dit lorsque la multiplication xy est, en outre, associative et commutative), la règle de proportion est immédiatement vérifiée puisque :

$$ab = cd \Rightarrow b = a^{-1}(cd) = c(a^{-1}d) \text{ et } c^{-1}b = a^{-1}d.$$

Nous allons démontrer que la règle de proportion caractérise un quasi-groupe comme groupe commutatif.

3. *Lemme des proportions* : « Pour qu'un quasi-groupe soit un groupe commutatif, il faut et il suffit qu'il vérifie la règle de proportion. »

Nous venons de voir que la condition est nécessaire. Pour démontrer qu'elle est suffisante, nous allons décomposer le raisonnement en trois étapes de manière à montrer le rôle essentiel de l'associativité dans le cas particulier : $x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = y$.

Supposons donc que $ab = cd \Rightarrow c^{-1}b = a^{-1}d$, quels que soient les éléments a, b, c, d du quasi-groupe G .

a) *Commutativité* : $xy = yx$.

Il suffit d'appliquer la règle de proportion aux éléments :

$$a = y^{-1}, b = y, c = x^{-1}, d = x \text{ (d'où } ab = cd = u).$$

Dès lors, $c^{-1}b = a^{-1}d$ s'écrit : $xy = yx$.

b) *Simplification d'un rapport* : $\frac{xy}{x} = y$, ou $x^{-1}(xy) = y$.

Il suffit d'appliquer la règle de proportion aux éléments :

$$a = u, b = xy, c = x, d = y \text{ (d'où } ab = cd = xy).$$

Dès lors, $c^{-1}b = a^{-1}d$ s'écrit : $x^{-1}(xy) = y$.

c) *Associativité* : $x(yz) = (xy)z$.

Il suffit d'appliquer la règle de proportion aux éléments :

$a = z^{-1}, b = zy, c = x^{-1}, d = xy$. La simplification des rapports $z^{-1}(zy)$ et $x^{-1}(xy)$ entraîne $ab = cd = y$.

Dès lors, $c^{-1}b = a^{-1}d$ s'écrit : $x(zy) = z(xy)$, d'où $x(yz) = (xy)z$ par commutativité.

III. LA MULTIPLICATION DES SCALAIRES.

Soit E un plan métrique euclidien (relativement à un groupe totalement ordonné et jaugé S).

1. Lorsqu'on a en vue la démonstration du théorème d'équivalence, le corollaire de la proposition 25 indique comment l'on doit définir la

multiplication μ dans S . La définition utilise, comme élément accessoire, un repère $\varphi = (\Delta_1, \Delta_2)$ de E .

Soient A l'origine de φ , et u la jauge de S .

Définition 1. — Pour deux scalaires a et b de S , le produit ab est l'ordonnée (dans φ) du point d'abscisse b aligné avec A et le point (u, a) .

Pour montrer que la multiplication $(a, b) \rightarrow ab$ ne dépend pas du repère accessoire φ , il suffit d'appliquer le corollaire de la proposition 9 (concernant l'isométrie transformant un repère φ en un autre repère φ').

2. Premières propriétés de cette multiplication.

2. 1. *Règle d'intégrité* : la définition 1 entraîne immédiatement :

$$ab = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

2. 2. *Règle des signes* :

$$\begin{cases} (-a)b = -(ab) & (\text{par symétrie autour du support de } \Delta_1), \\ a(-b) = -(ab) & (\text{par transposition de centre } A), \\ (-a)(-b) = ab & (\text{conséquence des deux précédentes}). \end{cases}$$

2. 3. La jauge u est *élément neutre*.

$$\begin{cases} au = a & (\text{conséquence immédiate de la définition 1}), \\ ua = a & (\text{par symétrie autour de la bissectrice de } \Delta_1 \text{ et } \Delta_2). \end{cases}$$

2. 4. Tout scalaire $a \neq 0$ admet un *inverse* et un seul.

Pour $a \neq 0$, il existe un seul scalaire a' tel que les points (u, a) et (a', u) soient alignés avec A , autrement dit tel que $aa' = u$ (produit effectué dans le repère accessoire φ). En effectuant le produit $a'a$ dans le repère $\varphi' = (\Delta_2, \Delta_1)$, on obtient $a'a = u$. D'où l'unique scalaire $a^{-1} = a'$.

2. 5. *Compatibilité avec l'ordre* sur S .

Soit $P(x, y)$ un point variable sur une droite orientée Δ sécante en A à Δ_1 et Δ_2 . Le corollaire 2 de la proposition 3 entraîne que l'application $x \rightarrow y$ est strictement monotone.

En particulier, si Δ passe par un point (u, a) tel que $a > 0$, l'application $x \rightarrow y$ est strictement croissante puisque $0 \rightarrow 0$ et $u \rightarrow a$ (avec $u > 0$). Comme Δ passe par tous les points (b, ab) , il en résulte bien :

$$a > 0 \text{ et } b > 0 \Rightarrow ab > 0$$

2. 6. *Distributivité à droite* : $a(b + c) = ab + ac$.

Tout d'abord la formule $a(2d) = 2ad$ résulte du lemme de Thalès (corollaire 1 de la proposition 11). Comme S est un groupe dyadique, on peut trouver d tel que $2d = b + c$, et le lemme de Thalès entraîne encore $2ad = ab + ac$.

Finalement : $a(b + c) = a(2d) = 2ad = ab + ac$.

3. Equation d'une droite.

a) Etant donné le repère $\varphi = (\Delta_1, \Delta_2)$, considérons une droite D sécante à Δ_2 : il existe alors un couple de scalaires (a, b) et un seul tel que D passe par les points $(0, b)$ et $(u, a + b)$. On dit que a est la *pente* de D dans φ , et que b est l'*ordonnée initiale* de D .

La droite D' passant par l'origine A de φ , et telle que $D \parallel D'$, est l'ensemble des points (x, y) de E tels que $y = ax$ (conséquence immédiate de la définition 1). De la proposition 18 sur les parallélogrammes, il résulte alors que la droite D est l'ensemble des points (x, y) de E tels que $y = ax + b$ (*équation* de la droite D dans le repère φ). La fonction $f(x) = ax + b$ est la *fonction linéaire* de *coefficient* a et de *valeur initiale* b .

b) Soient D et D' deux droites sécantes à Δ_2 , de pentes respectives a et a' dans le repère $\varphi = (\Delta_1, \Delta_2)$.

Condition de parallélisme : $D \parallel D' \iff a = a'$.

Condition de perpendicularité : $D \perp D' \iff a^{-1} = -a'$.

Pour démontrer la condition de perpendicularité, il suffit (d'après la condition de parallélisme et le corollaire 2 de la proposition 10) de considérer le cas où D et D' passent par l'origine A du repère φ . Désignons par ψ la rotation normale $(x, y) \rightarrow (-y, x)$ associée au repère φ (proposition 7). D'après la proposition 8, lorsque D et D' passent par A , les trois relations $D \perp D'$, $D' = \psi(D)$, $D = \psi(D')$ sont équivalentes. Or, $D' = \psi(D)$, par exemple, s'exprime par l'alignement des points A , (u, a') , $(-a, u)$, ou encore par $a'(-a) = (-a')a = u$. Finalement :

$$D \perp D' \iff (-a')a = a(-a') = u,$$

$$\text{ou } D \perp D' \iff a^{-1} = -a'.$$

4. Règle de proportion.

a) Notons G l'ensemble des scalaires $x \in S$ tels que $x \neq 0$. D'après la règle d'intégrité, la multiplication xy peut se restreindre en une opération interne partout définie dans G . Les propriétés 2.3 et 2.4 expriment alors que G est un *quasi-groupe* pour cette opération.

b) Etant donné quatre scalaires a, b, c, d de G tels que $ab = cd$ et un repère $\varphi = (\Delta_1, \Delta_2)$ de E , considérons les trois points $I(-b, 0)$, $J(-d, 0)$, $H(0, ab)$ et les quatre droites D_1, D_2, D'_1, D'_2 d'équations respectives dans φ :

$$y = a(x + b), \quad y = c(x + d), \quad y = -a^{-1}(x + d), \quad y = -c^{-1}(x + b)$$

(fonctions linéaires compte tenu de la distributivité à droite). La droite D_1 passe par I et H , la droite D_2 passe par J et H . La droite D'_1 passe par J , et $D_1 \perp D'_1$ (condition de perpendicularité sur les pentes a et $-a^{-1}$). La droite D'_2 passe par I , et $D_2 \perp D'_2$. Ainsi les trois hauteurs du triangle $\{I, J, H\}$ sont D'_1, D'_2 et le support de Δ_2 (d'équation $x = 0$).

La proposition 19 sur la concourance des hauteurs d'un triangle revient à dire que D'_1 et D'_2 ont même ordonnée initiale. Autrement dit,

de l'hypothèse $ab = cd$, il résulte $a^{-1}d = c^{-1}b$ ou $\frac{b}{c} = \frac{d}{a}$.

Ainsi le théorème de l'*orthocentre* (point commun des trois hauteurs) apparaît comme une traduction géométrique de la règle algébrique des proportions.

5. Structure de corps ordonné sur S .

L'ensemble S était initialement muni d'une structure (α, ω, u) de groupe totalement ordonné et jaugé. La multiplication μ d'unité u introduite par la définition 1 permet de munir S d'une structure (α, μ, ω) de corps ordonné.

a) La multiplication xy est associative, commutative et doublement distributive par rapport à l'addition $x + y$.

L'associativité $x(yz) = (xy)z$ et la commutativité $xy = yx$ sont évidentes dès que l'un des scalaires x, y, z est nul. Lorsque x, y, z sont non nuls, elles résultent du lemme des proportions sur le quasi-groupe G .

La distributivité à gauche $(y + z)x = yx + zx$ résulte de la distributivité à droite et de la commutativité.

b) La multiplication xy admet u comme élément neutre, et tout scalaire $x \neq 0$ est inversible. Enfin, la multiplication est compatible avec l'ordre sur S .

Remarque. — Lorsque S est l'ensemble R des nombres réels, muni de sa structure usuelle (α, ω) de groupe additif ordonné, on sait qu'il existe une seule multiplication ν d'unité $u = 1$ et telle que (α, ν, ω) soit une structure de corps ordonné sur R . Par conséquent, si E est un plan métrique euclidien relativement au groupe additif ordonné R (jaugé par $u = 1$), la multiplication μ précédemment introduite par voie géométrique se confond avec la multiplication usuelle ν .

IV. EXISTENCE DES ÉLÉMENTS TYPIQUES $\mu, \mathcal{C}, h, n, p$.

Soit $\sigma = (\alpha, \omega, u, \delta)$ une structure de plan métrique euclidien sur E , relativement à une structure (α, ω, u) de groupe totalement ordonné et jaugé sur S .

1. Nous venons de constater l'existence d'une multiplication μ des scalaires dans S telle que la structure (α, μ, ω) vérifie l'axiome (K) des corps ordonnés.

2. Conformément à la proposition 26, le groupe $\mathcal{C}$ des translations de E peut se définir sans aucun élément accessoire :

Définition 2. — On adopte, comme groupe typique $\mathcal{C}$, le groupe des glissements du plan métrique euclidien E .

Les propositions 15 et 20 montrent alors que $\mathcal{C}$ vérifie la partie de l'axiome (A₂) des plans affines relative au seul ensemble des translations :

a) $\mathcal{C}$ est un groupe commutatif de transformations de E .

b) Pour tout couple (P, Q) de points de E , il existe une transformation $\varphi \in \mathcal{C}$ et une seule telle que $Q = \varphi(P)$.

Confondant dès à présent glissements et translations, nous noterons indifféremment $\varphi + \psi$ ou $\psi \circ \varphi$ la composition de ces transformations.

3. Avant d'introduire la multiplication affine h , la norme n et le produit scalaire p , établissons le *lemme des projections*.

Soient Δ et Δ_1 deux droites orientées non perpendiculaires, sécantes en A .

Lemme des projections. — Il existe un scalaire c tel que, pour tout point P de Δ se projetant en P_1 sur Δ_1 , on ait : $(\overline{AP}) = c(\overline{AP_1})$.

Introduisons un repère $\varphi = (\Delta_1, \Delta_2)$ et désignons par D la bissectrice des droites orientées Δ et Δ_2 (sécantes en A). Soient a et b les pentes respectives de Δ et de D dans le repère φ .

La perpendiculaire D' à D passant par le point P de Δ coupe Δ_2 en P' tel que $\overline{AP'} = \overline{AP}$ (puisque la symétrie $[D]$ transforme Δ en Δ_2). D'après la condition de perpendicularité sur les pentes de D et de D' , l'équation de D' dans φ est : $y = -b^{-1}x + \overline{AP'}$. Il en résulte $\overline{AP} = y + b^{-1}x$ pour tout point (x, y) de D' , en particulier pour le point P de coordonnées $x = \overline{AP_1}$, $y = ax$. D'où $\overline{AP} = (a + b^{-1})(\overline{AP_1})$, et le scalaire $c = a + b^{-1}$ ne dépend pas du choix de P sur Δ .

Corollaire. — Soient

- { P_1 la projection (sur Δ_1) d'un point P de Δ
- { Q la projection (sur Δ) d'un point Q_1 de Δ_1 .

Quels que soient P et Q_1 , on a : $(\overline{AP})(\overline{AQ}) = (\overline{AP_1})(\overline{AQ_1})$. (Il suffit de considérer la symétrie échangeant Δ et Δ_1 , puis d'appliquer le lemme des projections aux points P, P_1 et aux symétriques de Q_1, Q).

4. La multiplication affine h , la norme n et le produit scalaire p se définissent (conformément à la proposition 27) au moyen d'un point

accessoire A et d'une droite orientée accessoire Δ . Etant donné un glissement φ , on impose seulement à Δ de passer par les points A et $B = \varphi(A)$.

Définition 3. — Pour tout scalaire x , soit C le point de Δ tel que $\overline{(AC)} = x\overline{(AB)}$. Le produit affine $\psi = x\varphi$ est le glissement ψ tel que $c = \psi(A)$.

Définition 4. — La norme de φ est $\|\varphi\| = |\overline{AB}|$.

Définition 5. — Pour tout glissement ψ , soit C' la projection sur Δ du point $\psi(A)$. Le produit scalaire de φ par ψ est : $\varphi \cdot \psi = \overline{(AB)} \overline{(AC')}$.

a) Lorsque $\varphi = 0$ (glissement nul dans la notation additive du groupe $\mathcal{G}$), on obtient $x\varphi = 0$ (glissement nul) et $\|\varphi\| = \varphi \cdot \psi = 0$ (scalaire nul), d'où le caractère accessoire de A et de Δ .

Lorsque $\varphi \neq 0$ (glissement strict), le support D de Δ est bien déterminé pour A fixé, mais Δ peut être l'une ou l'autre des deux droites orientées opposées de support D. Le caractère accessoire de Δ vient des règles : $x(-a) = -(ax)$, $| -a | = |a|$, $(-a)(-b) = ab$.

Pour montrer le caractère accessoire du point A, il suffit de considérer le glissement θ transformant A en un autre point A' (et la droite orientée Δ en une droite orientée Δ'), puis d'appliquer le corollaire 1 de la proposition 17 (sur les parallélogrammes) et une remarque du § 1 (en I, 4 : transmuée d'une projection par une isométrie).

b) Considérons un repère $\varrho = (\Delta_1, \Delta_2)$ d'origine A : les droites orientées Δ_1 et Δ_2 passent respectivement par les points $A_1(u, 0)$ et $A_2(0, u)$.

Un point $P(x, y)$ variable dans E se projette en $P_1(x, 0)$ sur Δ_1 et en $P_2(0, y)$ sur Δ_2 . Nous savons que les relations : « φ est le glissement transformant A en P » et « (x, y) sont les coordonnées de P dans ϱ », définissent une application biunivoque $\varphi \rightarrow (x, y)$ de $\mathcal{G}$ sur $S \times S$. D'après la proposition 21, cette application est un isomorphisme du groupe $\mathcal{G}$ des glissements sur le groupe produit $S \times S$: si $\varphi \rightarrow (x, y)$ et $\varphi' \rightarrow (x', y')$, alors $\varphi + \varphi' = \varphi' \circ \varphi \rightarrow (x + x', y + y')$.

Etant donné deux glissements φ, ψ et un scalaire a tels que $\psi = a\varphi$, il existe une droite orientée Δ passant par les points A, $P = \varphi(A)$, $Q = \psi(A)$, de sorte que $\overline{(AQ)} = a\overline{(AP)}$, d'après la définition 2.

Lemme d'affinité. — Si $\varphi \rightarrow (x, y)$, alors $\psi = a\varphi \rightarrow (ax, ay)$.

C'est immédiat lorsque Δ a même support que Δ_1 ou Δ_2 . Si $\varphi \rightarrow (x', y')$ lorsque Δ est sécante à Δ_1 et Δ_2 , il existe (d'après le lemme des projections) deux scalaires c_1 et c_2 non nuls tels que $\overline{AP} = c_1x = c_2y$ et $\overline{AQ} = c_1x' = c_2y'$. Dès lors, de $\overline{(AQ)} = a\overline{(AP)}$, résulte bien :

$$x' = ax \text{ et } y' = ay.$$

Corollaire. — La multiplication affine $a\varphi$ vérifie les identités :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(b\varphi) = (ab)\varphi \quad (\text{associativité}), \\ u\varphi = \varphi \quad (\text{scalaire neutre } u), \\ \left. \begin{array}{l} (a + b)\varphi = a\varphi + b\varphi \\ a(\varphi + \varphi') = a\varphi + a\varphi' \end{array} \right\} \quad (\text{double distributivité}). \end{array} \right.$$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{G}$, muni de l'opération interne $\varphi + \varphi'$ (composition des glissements) et de l'opération externe $a\varphi$ (multiplication affine), est un espace vectoriel relativement au corps S.

Comme les points A, A_1 , A_2 ne sont pas alignés, les glissements φ_1 et φ_2 tels que $A_1 = \varphi_1(A)$ et $A_2 = \varphi_2(A)$ sont des vecteurs indépendants dans l'espace vectoriel $\mathcal{G}$. Tout glissement φ tel que $\varphi \rightarrow (x, y)$ prend la forme d'une combinaison $\varphi = x\varphi_1 + y\varphi_2$: il en résulte $\dim \mathcal{G} = 2$.

Finalement, l'ensemble E est muni d'une structure $(\alpha, \mu, \mathcal{C}, h)$ qui vérifie l'axiome (A_2) des plans affines, relativement à la structure (α, μ) de corps sur S .

c) D'après les définitions 4 et 5, la norme n et le produit scalaire p vérifient immédiatement les propriétés :

$$\begin{cases} \varphi \cdot \varphi = \|\varphi\|^2, \\ \varphi \neq 0 \Rightarrow \|\varphi\| > 0. \end{cases}$$

L'identité $\varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi$ résulte du corollaire du lemme des projections.

Si $\varphi \rightarrow (x, 0)$ et $\varphi' \rightarrow (x', y')$ dans un repère $\rho = (\Delta_1, \Delta_2)$, la définition 5 s'exprime par $\varphi \cdot \varphi' = xx'$. Il en résulte les identités :

$$\varphi \cdot (\psi + \psi') = \varphi \cdot \psi + \varphi \cdot \psi' \text{ et } \varphi \cdot (a\psi) = a(\varphi \cdot \psi).$$

Ainsi, l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ (muni de la norme n et du produit scalaire p) vérifie l'axiome (N) des espaces vectoriels normés.

5. L'ensemble E était muni initialement d'une structure $\sigma = (\alpha, \omega, \mu, \delta)$ de plan métrique euclidien, relativement à une structure (α, ω, μ) de groupe totalement ordonné et jaugé sur S . Nous venons de constater l'existence d'une structure $\Sigma = (\alpha, \mu, \omega, \mathcal{C}, h, n, p)$ de plan affine normé sur E , relativement à une structure (α, μ, ω) de corps ordonné sur S . Et cette structure Σ a été définie de manière à admettre σ comme structure métrique sous-jacente, ce qui achève la démonstration du **théorème d'équivalence**.

On sait que ce théorème d'équivalence constitue une circonstance très favorable pour l'Enseignement élémentaire de la Géométrie plane.

La structure de plan métrique euclidien est une structure apparemment faible et ne nécessite que trois termes typiques : addition α et ordre ω dans l'ensemble S des scalaires, distance δ dans le plan E (le choix d'une jauge $u > 0$ dans S étant tout à fait arbitraire). Il est facile de rattacher cette structure à l'expérience concrète au moyen des instruments fondamentaux : feuille à dessin (susceptible de pliages), règle graduée, compas à pointes sèches (ou transporteur de distance).

Cependant, cette structure apparemment faible est, en fait, aussi forte que la structure de plan affine normé : celle-ci comporte sept termes typiques soumis à de nombreuses règles opératoires. La structure de plan affine normé représente pour la Géométrie une « voie royale » qu'il faut s'efforcer d'atteindre assez vite. Mais il est heureux (et conforme au caractère progressif de notre Enseignement) que cela puisse se faire en partant d'une structure équivalente plus simple.

C. FRASNAY, juin 1961.

RÉFÉRENCES

Les notions générales de « structure » et d' « équivalence de structures » sont celles de N. Bourbaki (Théorie des Ensembles, Chapitre IV).

La structure de plan métrique euclidien (à quelques nuances près de terminologie dues à la particularisation de l'ensemble des scalaires ou à la considération de l'axiome du compas) a été dégagée et développée dans les articles suivants :

- G. CHOQUET, Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire, Chapitre V de « L'Enseignement des Mathématiques », Delachaux et Niestlé (1955).
- C. FRASNAY, Un développement de la géométrie plane élémentaire (des axiomes à la mesure des angles et au produit segmentaire), revue *Alger-Mathématiques* (déc. 1959).
- G. CHOQUET, Une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire, *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques* (n° 209-213, 1960).

Les corps ordonnés pythagoriciens (dans leur application à l'axiomatique de la géométrie et aux critères de constructibilité) font l'objet d'une étude élémentaire dans l'article :

- C. FRASNAY, Sur les corps ordonnés intéressant la géométrie plane, revue *Alger-Mathématiques* (1962).