

LES MATHÉMATIQUES « MODERNES » DANS L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRÉ

L'initiation aux Mathématiques dites modernes, qui se fait depuis quelque temps à partir de la Seconde, serait peut-être plus efficace et mieux acceptée si elle était entreprise plus tôt. C'est du moins ce que pensent quelques collègues, à la demande desquels ont été faits à l'Institut Pédagogique National les exposés dont le texte suit.

I. — LES ENSEMBLES

Nous admettons la notion intuitive d'ensemble, collection d'objets distincts quelconques, par exemple : les lettres de l'alphabet, les chiffres de la numération décimale, les élèves d'une classe de Cinquième.

Nous disposons d'une règle qui permet, pour tout objet donné, de décider s'il appartient ou non à l'ensemble considéré. Si un objet est désigné par x et un ensemble par A , nous exprimons que x est élément de A par l'écriture : $x \in A$ et que x n'est pas élément de A par : $x \notin A$.

Pour tout objet x , en ce qui concerne A , il n'y a que deux éventualités possibles : $x \in A$ ou $x \notin A$ (principe du tiers exclu).

L'égalité $x = y$ entre objets signifie que x et y désignent le même objet. Bien entendu, dans la pratique, une telle égalité ne consiste pas en une évidence telle que $2 = 2$. Ce sera par exemple plutôt : $2 = 6/3$; x et y appartiennent alors à une même « classe d'équivalence », notion qui sera précisée plus loin.

Autre exemple : dans le plan, tous les triangles qui se déduisent d'un triangle donné ABC par une isométrie constituent une classe d'équivalence, dont ABC peut être considéré comme un représentant.

De même, l'égalité $A = B$ entre ensembles signifie que A et B sont formés exactement des mêmes éléments. En général, cette égalité résulte d'une démonstration. Si A est défini comme formé des objets qui possèdent une propriété a , et B comme formé des objets qui possèdent une propriété b , les ensembles A et B sont égaux si les propriétés a et b sont équivalentes, c'est-à-dire si chacune d'elles entraîne l'autre.

Exemple : A est l'ensemble des triangles ayant deux côtés égaux, B est l'ensemble des triangles ayant deux angles égaux.

Ou encore : A est l'ensemble des entiers divisibles par 9, B est l'ensemble des entiers dont la somme des chiffres (en écriture décimale) est divisible par 9.

Signalons ici une erreur fréquente chez les élèves : croire que deux ensembles sont égaux lorsqu'ils contiennent le même nombre d'éléments.

Parties d'un ensemble, inclusion.

Soit un ensemble E ; tout ensemble A formé avec des éléments de E est une partie (ou sous-ensemble) de E . On dit aussi que A est inclus dans E .

S'il existe des éléments de E qui ne figurent pas dans A , on dit que A est strictement inclus dans E , ce qu'on note : $A \subset E$.

On a une inclusion large, notée $A \subseteq E$, s'il n'est pas exclu que A soit égal à E ; on dit alors que E est la partie pleine de E.

Un autre cas particulier est celui où A ne contient aucun élément. On a alors la partie vide notée $\emptyset$. C'est l'état « néant » des statistiques administratives.

Ici encore, remarquons l'importance d'une définition précise des éléments d'un ensemble ; une erreur fréquente chez les élèves est de dire que, dans un ensemble dont les éléments sont des arbres, les branches d'un arbre constituent un sous-ensemble.

Soit $A \subseteq E$; supposons E défini par une propriété e et A par une propriété a . L'appartenance à A entraîne l'appartenance à E, ce qu'on exprime par : $x \in A \Rightarrow x \in E$.

De même, pour les objets considérés, la possession de la propriété a entraîne celle de la propriété e , ce qu'on exprime par : $a \Rightarrow e$ (implication).

Si A et E sont égaux, chacun d'eux est inclus dans l'autre, ce qu'on traduit par l'« équivalence » : $A = E \Leftrightarrow "A \subseteq E \text{ et } E \subseteq A"$ ou encore par : $x \in A \Leftrightarrow x \in E$.

De même, les propriétés de définition a et e sont alors équivalentes : $a \Leftrightarrow e$; chacune d'elles entraîne l'autre.

Remarque : L'inclusion (stricte ou large) possède la propriété de transitivité : " $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$ " $\Rightarrow$ $A \subseteq C$.

L'inclusion large est réflexive : $A \subseteq A$; l'inclusion stricte ne l'est pas.

L'égalité, entre éléments ou entre ensembles, possède les trois propriétés de :

réflexivité : $x = x$; $A = A$;

symétrie : $x = y \Rightarrow y = x$; $A = B \Rightarrow B = A$;

transitivité : " $x = y$ et $y = z$ " $\Rightarrow$ $x = z$; " $A = B$ et $B = C$ " $\Rightarrow$ $A = C$.

Parties complémentaires.

Soit $A \subseteq E$; la partie de E qui est formée des éléments qui n'appartiennent pas à A est le « complément » de A par rapport à E. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble de base E, nous désignons ce complément par A' . Il y a réciprocity entre deux parties complémentaires :

$$(A')' = A.$$

Par exemple, la partie vide et la partie pleine sont complémentaires.

Au point de vue logique, le passage au complément correspond à la négation : dire que $x \in A'$ équivaut à dire que $x \notin A$, que x ne possède pas la propriété qui, dans E, définit A.

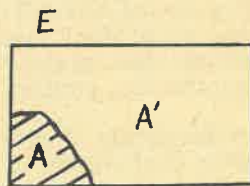


FIG. 1

Exemples : Si E est l'ensemble des entiers naturels, et A la partie de E définie par : $x < 5$, nous aurons : A' défini par $x \geq 5$.

Dans le même ensemble, le complément de : $5 < x$ et $x \leq 13$ est : $x \leq 5$ ou $x > 13$.

Sur une droite xy , le complément d'un segment ouvert $]AB[$ est formé par les deux demi-droites Ax et By .

Théorème : $A \subset B \iff B' \subset A'$

(A et B sont des parties d'un ensemble E , et leurs compléments sont pris par rapport à E).

1) Supposons $A \subset B$; si $x \in B'$, on ne peut avoir $x \in A$ puisque :

$$x \in A \Rightarrow x \in B,$$

donc : $x \in B' \Rightarrow x \in A'$, ce qui signifie : $B' \subset A'$. En résumé :

$$A \subset B \Rightarrow B' \subset A'.$$

2) Supposons $B' \subset A'$; nous pouvons refaire le même raisonnement ou, plus simplement, appliquer le résultat précédent :

il nous permet d'écrire : $B' \subset A' \Rightarrow (A')' \subset (B')'$,

c'est-à-dire : $B' \subset A' \Rightarrow A \subset B$, ce qui démontre le théorème (dans une première étude, on peut se borner à une vérification à partir de la représentation graphique classique).

Au point de vue logique, nous pouvons de même écrire, entre les propriétés a et b définissant des parties de l'ensemble de base :

$$(a \Rightarrow b) \iff (b' \Rightarrow a') ; (a = b) \iff (a' = b'),$$

en désignant par a' la négation de a .

Exemple : « Tous les électeurs sont majeurs » ou « être électeur » implique « être majeur » équivaut à : « n'être pas majeur » implique « n'être pas électeur ».

Pour démontrer que, dans l'ensemble des triangles, la propriété « deux côtés sont égaux » entraîne la propriété « les angles opposés sont égaux », on peut démontrer que « deux angles inégaux » entraîne « les côtés opposés sont inégaux ».

En utilisant le théorème précédent, on peut imaginer diverses manières de démontrer l'équivalence $a \iff b$ de deux propriétés ; par exemple en démontrant :

$$« b' \Rightarrow a' » \text{ et } « b \Rightarrow a ».$$

Dénombrement des parties d'un ensemble fini.

Soit E un ensemble formé de n éléments ; proposons-nous de déterminer combien on peut former de parties avec des éléments de E . Envisageons quelques cas particuliers :

1) E est l'ensemble vide ; il n'y a qu'une partie, E lui-même.

2) $E = \{a\}$; il y a deux parties : $\emptyset$ et $\{a\}$.

3) $E = \{a, b\}$; il y a quatre parties : $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$.

4) $E = \{a, b, c\}$; pour obtenir les parties de E , nous pouvons écrire d'abord toutes celles qui ne contiennent pas c ; ce sont les quatre parties du cas précédent. En introduisant c dans chacune d'elles, on obtient les parties de E qui contiennent c . Finalement, le nombre des parties de $\{a, b, c\}$ est double du nombre de parties de $\{a, b\}$, soit 8.

D'une manière générale, le nombre de parties d'un ensemble de n éléments est 2^n (en y comprenant la partie vide et la partie pleine).

Nous pouvons faire un dénombrement plus précis en cherchant combien il y a de parties à $n-1, n-2, \dots$ éléments. Par exemple, pour un ensemble de six éléments, combien y a-t-il de parties à trois éléments ?

Supposons qu'on ait fait un dénombrement complet pour l'ensem-

ble $\{a, b, c, d, e\}$; pour l'ensemble $\{a, b, c, d, e, f\}$, les parties à trois éléments comprennent :

- a) les parties à trois éléments de $\{a, b, c, d, e\}$;
- b) les parties qui contiennent f , qu'on peut obtenir en introduisant f dans les parties à deux éléments de $\{a, b, c, d, e\}$.

Finalement, en désignant par C_n^k le nombre des parties à k éléments obtenues à partir d'un ensemble de n éléments, nous aurons :

$$C_6^3 = C_5^3 + C_5^2$$

et en général :

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

Bien entendu, dans une partie telle que $\{a, c, d\}$, l'ordre dans lequel on écrit les lettres n'intervient pas ; $\{a, c, d\}$ et $\{d, a, c\}$ sont une même partie.

La formule précédente (des combinaisons) permet de construire le triangle de Pascal. La cinquième ligne, par exemple, signifie que, pour un ensemble de quatre éléments, il y a : une partie vide ; quatre parties à un seul élément ; six parties à deux éléments...

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1
.....				

FIG. 2

On vérifie que la somme des nombres écrits sur la ligne de rang n est bien égale à 2^{n-1} .

Remarque : Parmi les 2^n parties d'un ensemble de n éléments, on distingue celles qui contiennent 0, 1, ..., n éléments ; ce qui précède montre que l'on a :

$$2^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$$

Pour trouver le nombre des parties d'un ensemble de n éléments, on peut encore raisonner de la manière suivante :

Pour chaque élément, deux éventualités se présentent : ou il est utilisé, ou il ne l'est pas, et les choix relatifs aux divers éléments sont indépendants les uns des autres. Pour trois éléments, on peut faire une figure telle que la figure 3. On retrouve les 2^n parties.

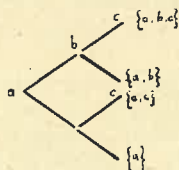
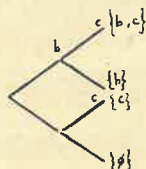


FIG. 3



Pratiquement, l'emploi du triangle de Pascal est peu commode ; on sera donc amené à calculer les nombres de la $n^{\text{ième}}$ ligne, sans avoir calculé les nombres des lignes précédentes. On peut amorcer ce calcul à l'aide d'exemples tels que les suivants :

Etant donnés n points du plan (tels qu'aucune droite n'en contienne plus de deux), combien peut-on obtenir de segments distincts en joignant ces points deux par deux ?

En utilisant le résultat précédent, trouver le nombre des triangles dont les sommets sont trois des n points donnés.

Opérations sur les parties d'un ensemble E.

A) *Intersection* : Etant données deux parties A et B de E, l'intersection $A \cap B$ est l'ensemble formé par les éléments qui figurent à la fois dans A et B.

Si $A = B$: $A \cap A = A$.

Si $A \subset B$: $A \cap B = A$, et réciproquement,
(en effet, $A \cap B = A$ montre que $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$,
donc $x \in A \Rightarrow x \in B$).

Si A et B n'ont aucun élément commun, on dit qu'ils sont disjoints. Cela revient à dire que leur intersection est l'ensemble vide. Tel est le cas, par exemple, pour une partie A et son complément.

Si B est l'ensemble vide : $A \cap \emptyset = \emptyset$, quel que soit le sous-ensemble A de E.

Quelle que soit la partie A de E, on a : $A \cap E = A$, propriété qu'on exprime en disant que E est l'élément neutre de l'opération $\cap$ appliquée aux parties de E.

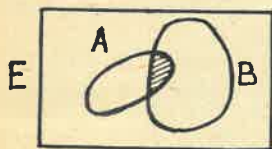
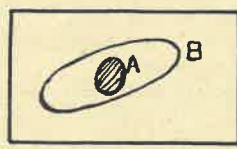
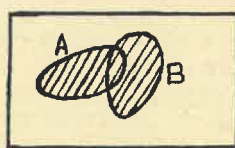


FIG. 4



$$A \cap B = A$$

FIG. 5



$$A \cup B$$

FIG. 6

Réciproquement, s'il existe une partie X de E telle que, pour toute partie A, on ait : $A \cap X = A$, alors $X = E$. Car cette relation doit avoir lieu en particulier pour $A = E$: $E \cap X = E$, et, comme d'autre part : $E \cap X = X$, nous en déduisons (transitivité de l'égalité) : $X = E$.

L'opération est commutative : $A \cap B = B \cap A$.

De plus, ayant défini l'opération $(A \cap B) \cap C$, on vérifie qu'elle est associative :

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

ce qui permet d'écrire plus simplement $A \cap B \cap C$, expression dans laquelle on peut permuter les lettres, en raison de la commutativité de l'opération.

Exemple : Le demi-plan est un ensemble de points qui, par définition, est convexe. L'intersection de deux demi-plans à frontières sécantes est un angle convexe. On définit de même un polygone convexe.

La droite est, elle aussi, un ensemble convexe de points.

Puisque l'intersection de deux ensembles convexes est un ensemble convexe, l'intersection d'une droite et d'un polygone convexe, si elle n'est

pas vide, est un ensemble convexe de points. On démontre d'ailleurs aisément que cette intersection est un segment (si, dans le plan d'un polygone convexe P , on mène une droite qui ne contient aucun sommet de P , cette droite a, avec le périmètre de P , zéro ou deux points communs).

Au point de vue logique, l'opération $\cap$ correspond à la « conjonction » de deux propriétés. Par exemple, si A est l'ensemble des entiers multiples de 2, B l'ensemble des entiers multiples de 3, $A \cap B$ est l'ensemble des entiers multiples de 6.

Ou : A ensemble des triangles rectangles, B ensemble des triangles isocèles ; $A \cap B$ est l'ensemble des triangles qui sont à la fois rectangles et isocèles.

B) *Réunion* : Soient A et B deux parties de E ; l'ensemble « réunion », noté $A \cup B$, est celui qui est formé des éléments qui appartiennent à l'un au moins des ensembles A et B . Si un élément figure à la fois dans A et B , il figure dans $A \cup B$, mais une seule fois.

Si $A = B$: $A \cup A = A$.

Si $A \subset B$: $A \cup B = B$, et réciproquement.

On a : $A \cup \emptyset = A$, quelle que soit la partie A de E . On exprime cette propriété en disant que $\emptyset$ est l'élément neutre de l'opération $\cup$. Réciproquement, s'il existe une partie déterminée X de E telle que : $A \cup X = A$, quel que soit $A \subset E$, alors $X = \emptyset$. En effet, on aura en particulier : $\emptyset \cup X = \emptyset$ et, comme d'autre part : $\emptyset \cup X = X$, il en résulte que $X = \emptyset$.

L'opération $\cup$ est commutative :

$$A \cup B = B \cup A.$$

On vérifie qu'elle est associative :

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ ou plus simplement } A \cup B \cup C.$$

Exemple : La réunion de deux ensembles convexes de points n'est pas nécessairement convexe ; c'est ainsi que la réunion de deux demi-plans à frontières sécantes est un angle concave.

Au point de vue logique, l'opération $\cup$ correspond à la disjonction qui s'exprime par « ou », étant entendu que les éventualités réunies par ce mot ne s'excluent pas l'une l'autre. Par exemple, dire que le produit ab est nul équivaut à la disjonction « $a = 0$ ou $b = 0$ ».

Remarque : Si A et B sont disjoints, le nombre d'éléments de $A \cup B$ est la somme des nombres d'éléments de A et B . Sinon, en désignant par $n(A)$ le nombre d'éléments de A , on a :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Exercice : Sur 100 élèves d'un collège, 73 apprennent l'anglais, 46 apprennent l'allemand, 32 apprennent les deux langues. Déterminer : combien d'élèves n'apprennent aucune des deux langues ; combien n'en apprennent qu'une seule.

Relation avec l'opération « complément ».

Soient, dans E , deux parties A et B ; le complément, par rapport à E , de leur intersection $A \cap B$, est la partie formée des éléments qui appartiennent soit à A' , soit à B' . Donc :

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

On voit de même que :

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$

formule qui est d'ailleurs une conséquence de la première ; appliquons en effet la première à A' et B' :

$$(A' \cap B')' = (A')' \cup (B')' = A \cup B.$$

De même, en logique, la négation de la conjonction « a et b » est la disjonction « a' ou b' » ; la négation de la disjonction « a ou b » est la conjonction « a' et b' ».

Produit cartésien de deux ensembles.

Soient : $E = \{a, b, c\}$, $F = \{\alpha, \beta\}$. Le produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble des couples (m, μ) où $m \in E$ et $\mu \in F$. Ici, c'est l'ensemble formé par les six couples :

$$(a, \alpha), (a, \beta), (b, \alpha), (b, \beta), (c, \alpha), (c, \beta).$$

On peut représenter $E \times F$ graphiquement à l'aide d'un repère cartésien, en portant a, b, c sur Ox , α, β sur Oy . En particulier, les points à coordonnées entières situés dans le premier quadrant représentent le produit $N \times N$ de l'ensemble des entiers naturels par lui-même.

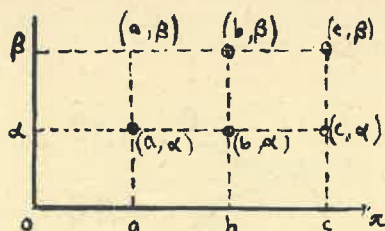


FIG. 7

De même, l'ensemble des fractions b/a peut être considéré comme obtenu à partir du produit cartésien de $\{1, 2, \dots\}$ par $\{0, 1, 2, \dots\}$. La fraction b/a est alors le couple (a, b) , b appartenant au deuxième ensemble et a au premier ($a \neq 0$). Les fractions sont ainsi représentées par les points à coordonnées entières du premier quadrant, à l'exception de ceux qui sont sur Oy .

Autres exemples : à partir du produit cartésien de $\{1, 2, \dots, 10, \text{roi, dame, valet}\}$ et de $\{\text{trèfle, carreau, cœur, pique}\}$, on fabrique les cartes d'un jeu de 52.

Les tables d'addition et de multiplication dans un système de numération sont obtenues à partir d'un produit cartésien.

Partition d'un ensemble.

Soit un ensemble E , et dans E deux parties complémentaires non vides A et A' . Elles possèdent les propriétés suivantes : 1) elles ne sont pas vides ; 2) elles sont disjointes ; 3) leur réunion est l'ensemble de base E .

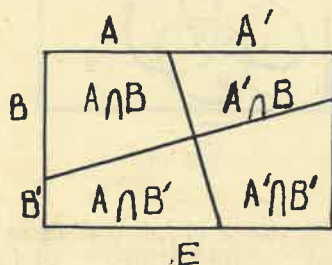


FIG. 8

D'une manière générale, soient $A, B, \dots, L$ des parties de E ; nous dirons qu'elles réalisent une partition de E si : 1) elles ne sont pas vides ; 2) elles sont deux à deux disjointes ; 3) leur réunion est E .

Exemple : A l'aide de deux parties non disjointes de E , soit A et B , on peut réaliser une partition de E en quatre classes :

$$A \cap B, A \cap B', A' \cap B, A' \cap B'.$$

On vérifie que tout élément de E appartient à une, et une seule, des classes, lesquelles sont deux à deux disjointes. Enfin, aucune n'est vide si aucune des parties A et B n'est incluse dans l'autre. En effet, si, par exemple : $A' \cap B = \emptyset$, cela entraînerait :

$$x \in A' \Rightarrow x \in B' \text{ ou } A' \subset B' \text{ ou } B \subset A.$$

A l'aide de trois parties A, B, C , on obtiendrait une partition de E en 16 classes. D'une manière générale, un raisonnement par « dichotomie » (déjà employé précédemment), et résumé par la figure 9, montre qu'avec n parties, on peut réaliser une partition en 2^n classes.

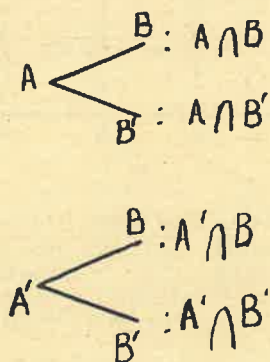


FIG. 9

Remarquons à ce propos que la représentation graphique classique doit se faire avec des courbes de forme quelconque, et non pas avec des cercles. Il est possible de tracer trois cercles de manière à partager le plan en huit régions, mais on démontre qu'il n'est pas possible de tracer un quatrième cercle de manière qu'il partage en deux chacune des régions précédentes.

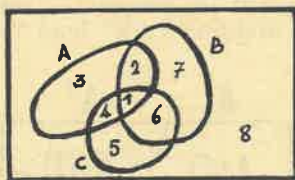


FIG. 10

La plupart des classifications visent à réaliser une partition de l'ensemble étudié : divisions administratives (département, arrondissement...), catalogue de bibliothèque, classes d'un lycée, etc...

Autre exemple : Si l'on jette deux dés (cubiques), l'ensemble des 36 coups possibles est obtenu comme produit cartésien de l'ensemble $(1, 2, \dots, 6)$ par lui-même. On peut obtenir une partition de cet ensemble en rangeant dans une même classe les coups donnant une même somme de points. On trouve ainsi, pour les sommes 2, 3, ..., 12, les nombres de coups suivants :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1,

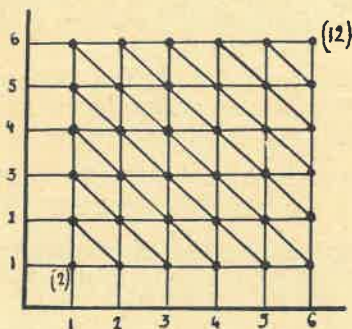


FIG. 11

ce qui montre que les six totaux pairs se présentent dans 18 cas, de même que les cinq totaux impairs.

Exercices

1) Sur 100 élèves d'un collège : 28 apprennent l'espagnol, 30 l'allemand, 42 l'anglais, 8 l'allemand et l'espagnol, 10 l'espagnol et l'anglais, 5 l'allemand et l'anglais, 3 les trois langues. Combien n'apprennent aucune des trois langues ? Combien n'en apprennent qu'une seule ?

2) Sur 100 élèves : 15 apprennent l'allemand seul, 21 l'allemand mais pas l'espagnol, 9 l'allemand et l'anglais, 30 l'allemand, 49 l'anglais, 25 l'espagnol et l'anglais, 55 l'espagnol. Combien n'apprennent aucune des trois langues ?

3) Soient : E l'ensemble des triangles, A l'ensemble des triangles isocèles, B l'ensemble des triangles rectangles. Définir en langage ordinaire les ensembles : $A \cup B$, $A \cap B$, et les compléments (par rapport à E) de : A, B, $A \cup B$, $A \cap B$.

4) Soit E l'ensemble des voitures immatriculées en France et, dans E, A l'ensemble des Dauphines, B l'ensemble des voitures immatriculées 59. Définir en langage ordinaire les ensembles suivants :

$\bar{A}$, $\bar{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup \bar{B}$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cup B$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{A} \cup \bar{B}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$.

5) Soient E un ensemble de billes, A la partie de E formée de billes en acier, B la partie formée de billes noires. Définir en langage ordinaire les mêmes ensembles qu'à l'exercice 4.

6) Soit E l'ensemble des entiers naturels x définis par : $1 \leq x \leq 20$, et les parties de E :

$A = \{1, 2, 5, 7, 9, 11, 12\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 13\}$.

Ecrire les parties de E représentées par les expressions de l'exercice 4.

7) Pour l'étude d'un ensemble d'êtres vivants, on distingue les qualités « être fumeur » et « être affligé d'un cancer ». Indiquer la partition en quatre classes que permet l'emploi de ces qualités.

8) Si A et B sont des parties d'un ensemble E et A' et B' leurs compléments par rapport à E , représenter par une figure les parties définies par les expressions suivantes (où x représente un élément de E) : $x \in A$ et $x \in B$; $x \in A$ ou $x \in B$; $x \in A$ et $x \notin B$; $x \in A'$ et $x \in B$; $x \notin A$ ou $x \in B'$. Donner les expressions de ces parties, à l'aide de A , A' , B , B' et des opérations $\cap$ ou $\cup$.

9) Pour quelle partie A de E peut-on avoir : $A \cup \emptyset = \emptyset$?
 A étant une partie de E , pour quelles parties X de E peut-on avoir ?
 $A \cap \emptyset = \emptyset$?

10) A partir de trois parties A , B , C de E , on peut réaliser une partition de E . Donner les expressions des 16 classes de cette partition, en fonction de A , B , C , de leurs compléments, et de l'opération $\cap$.

11) Vérifier sur une figure, et démontrer les relations suivantes :
 $A \cap B \subset A$; $A \cap B \subset B$; $A \subset A \cup B$; $B \subset A \cup B$.

12) A l'aide de figures, vérifier la distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, et la distributivité de l'opération $\cup$ par rapport à $\cap$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

13) Etant donnés deux ensembles A et B , quels sont les ensembles X tels que : $A \cap X = B$? Faire une figure, en remarquant que B doit être inclus dans A .

14) Etant donnés deux ensembles A et B , quels sont les ensembles X tels que : $A \cup X = B$? Montrer qu'il n'existe qu'une seule solution X lorsqu'on impose la condition supplémentaire : $A \cap X = \emptyset$.

15) Simplifier les expressions :

$$A \cap B \cap A \cap C ; A \cup B \cup A \cup C.$$

16) Démontrer la relation :

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C).$$

17) Dans une enquête qui a porté sur 1 000 personnes, 816 ont déclaré aimer le chocolat, 723 la crème glacée, 645 le nougat, 562 le chocolat et la crème glacée, 463 le chocolat et le nougat, 470 la crème glacée et le nougat. On ignore s'il y a des personnes qui n'ont pas avoué leur goût pour l'une des denrées. Combien y a-t-il au plus de personnes qui ont déclaré aimer à la fois le chocolat, la crème glacée et le nougat ?

18) Démontrer l'équivalence : $A \subset B \iff A' \cup B = E$,
(A et B sont des parties de E , A' le complément de A par rapport à E).

19) Démontrer : $A \subset B \implies A \cap C \subset B \cap C$
vérification graphique et démonstration formelle.

20) Démontrer : $A \subset B \implies A \cup C \subset B \cup C$
vérification graphique et démonstration formelle.

21) Démontrer l'équivalence : $\langle A \subset B \text{ et } A \subset C \rangle \iff A \subset B \cap C$.

22) Démontrer l'équivalence : $\langle A \subset C \text{ et } B \subset C \rangle \iff A \cup B \subset C$.

23) Démontrer l'équivalence : $A \subset B \iff A \cap B' = \emptyset$.

24) Démontrer : $A \subset B \text{ et } A' \subset B \implies B = E$
(A et B parties de E , A' complément par rapport à E).

25) Dans les figures ci-contre, le rectangle représente l'ensemble de base. Définir les parties hachurées à l'aide des opérations $\cup$, $\cap$ et complément par rapport à E .

26) Dans des figures analogues à la figure 18, mettre des hachures sur la région représentant : $(A \cup B) \cap C'$; $(A \cap B) \cup C'$; $(A \cap B) \cap C'$.

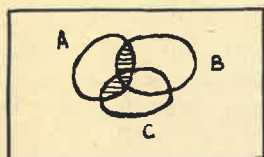


FIG. 12



FIG. 13

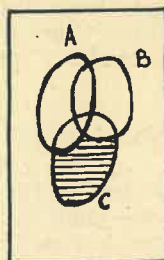


FIG. 14

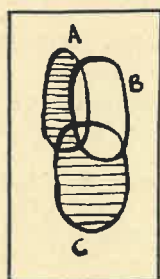


FIG. 15

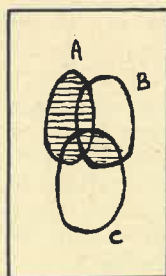


FIG. 16

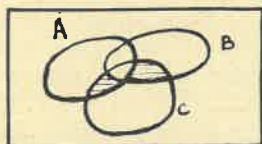


FIG. 17



FIG. 18

27) Dans une banque, trois employés se nomment Dupont, Dubois et Durand. L'un est caissier, un autre comptable, un autre secrétaire. Trouver la fonction de chacun, sachant que :

- 1) si Dupont est caissier, Dubois est comptable ;
- 2) si Dupont est comptable, Dubois est secrétaire ;
- 3) si Dubois n'est pas caissier, Durand est comptable ;
- 4) si Durand est secrétaire, Dupont est comptable.

28) Trois jeunes filles, Juliette, Héroïse et Laure, sont interrogées sur leurs âges et elles répondent chacune par trois phrases :

Juliette dit : J'ai 22 ans ; j'ai 2 ans de moins qu'Héroïse ; j'ai un an de plus que Laure.

Héroïse dit : Je ne suis pas la plus jeune ; Laure et moi avons 3 ans d'écart ; Laure a 25 ans.

Laure dit : Je suis plus jeune que Juliette ; Juliette a 23 ans ; Héroïse a 3 ans de plus que Juliette.

Sachant que chaque jeune fille a menti une fois et dit vrai les deux autres fois, trouver les âges des trois jeunes filles.

29) Dans le plan, on considère deux triangles ABC et DEF comme des ensembles de points, ceux qui sont sur le périmètre du triangle. Tracer les deux triangles de manière que les deux ensembles aient une intersection formée de : 0 point, 1 point, 2 points, 3 points, 4 points, 5 points, 6 points. Montrer qu'il est impossible que l'intersection soit formée de 7 points.

Problèmes de dénombrement.

30) Une classe comprend 30 élèves, une autre 35 ; de combien de manières peut-on former un groupe de deux élèves (un de chaque classe) ?

31) De combien de manières peut-on charger deux facteurs de distribuer six lettres ? De combien de manières si l'on veut que les deux facteurs soient employés ?

32) De combien de manières peut-on répartir six objets distincts en deux parties (non vides) ?

33) De combien de manières peut-on associer deux lettres (distinctes ou non) d'un alphabet de 26 lettres ?

34) Combien y a-t-il de nombres de trois chiffres (répétés ou non) dont les chiffres sont 1, 2, 3 ; calculer leur somme.

Les arrangements, qui diffèrent des combinaisons en ce qu'on y tient compte de l'ordre dans lequel sont écrits les objets, se présentent dans des questions telles que les suivantes :

35) Dans la numération décimale, combien y a-t-il de nombres de trois chiffres (non répétés) dont les chiffres sont 3, 5, 7 ?

36) Avec un alphabet de 26 lettres, combien peut-on écrire de mots de trois lettres distinctes ?

37) Combien y a-t-il de nombres de n chiffres (non répétés) dans la numération décimale. Envisager deux cas, selon qu'on accepte ou non le zéro comme premier chiffre de gauche.

Le calcul du nombre de permutations de n objets est un cas particulier du précédent :

38) Avec n chiffres différents, combien peut-on écrire de nombres de n chiffres (sans répétition de chiffre) ?

39) Dans un bal où il y a 10 hommes et 10 femmes, de combien de manières peut-on former des couples d'un homme et une femme ?

40) On dispose de 5 ouvrages en allemand, 7 en anglais, 10 en français ; de combien de manières peut-on en prélever deux de langues différentes ?

41) On a six paires de gants ; de combien de façons peut-on choisir un gant droit et un gant gauche, mais non de la même paire ?

42) Deux personnes entrent dans un compartiment où il y a six places libres ; de combien de manières peuvent-elles s'asseoir ?

43) Combien peut-on écrire de mots de deux lettres, l'une étant une consonne, l'autre une voyelle, avec un alphabet de 20 consonnes et 6 voyelles ? De combien de manières peut-on choisir une consonne et une voyelle ?

44) Combien peut-on écrire de mots avec les lettres (non répétées) a, b, c, d, e, f ? Parmi ces mots, combien y en a-t-il qui commencent par ab ?

45) On veut ranger sur un rayon de bibliothèque 5 livres en allemand, 6 en anglais, 8 en français. De combien de manières peut-on le faire : si l'on classe ensemble les livres de chaque langue ; si on les place pêle-mêle ?

46) De combien de manières peut-on répartir 20 objets différents en deux groupes de 12 et 8 ? En trois groupes de 5, 7 et 8 ?

(à suivre).