

SUR LE DIAGRAMME DE VENN

Lorsqu'on résume les conclusions d'une étude au moyen d'un diagramme de Venn, on indique souvent l'inclusion $B \subset A$ au moyen de la figure 1. Deux sous-ensembles disjoints sont indiqués sur la figure 2. S'il s'agit de représenter dans l'ensemble Q des quadrilatères les sous-ensembles $\mathcal{P}$ des parallélogrammes, $\mathcal{R}$ des rectangles, $\mathcal{L}$ des losanges et $\mathcal{C}$ des carrés, on fera la figure 3.

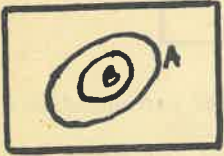


FIG. 1

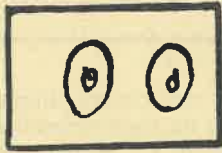


FIG. 2

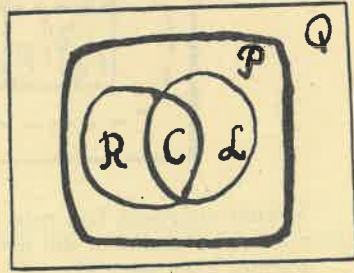


FIG. 3

Tout ceci n'est guère systématique et l'on peut se demander si une représentation plane de ce type est réalisable dans tous les cas pour un nombre quelconque de qualités.

La réponse est affirmative (1) :

Un ensemble de n qualités $q_1, q_2, \dots, q_n$ doit, pour que tous les cas soient prévus, correspondre à une partition du référentiel E en 2^n sous-ensembles avec la condition suivante : chacun des sous-ensembles, déterminé dans E par $n-1$ qualités, doit être divisé en deux parties par la ligne fermée qui correspond à la n ème qualité.

Nous faisons (fig. 4 et 4 bis) un schéma adapté au raisonnement par récurrence, mais l'on peut suivre un cas particulier sur la figure 5 où nous passons du cas bien connu de 3 qualités, 8 régions, au cas de 4 qualités.

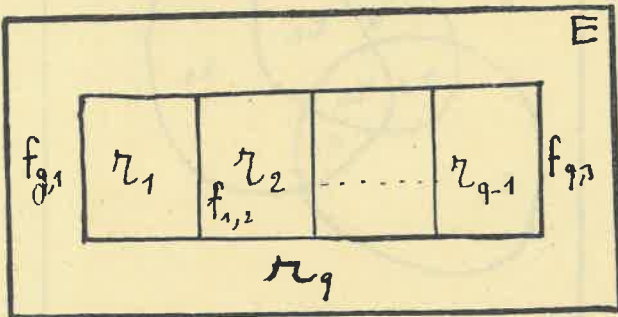


FIG. 4

(1) On trouvera l'esquisse de la démonstration à la fin de la note 1 de « l'Aspect moderne des Mathématiques » (chez Blanchard, 1957), mais des lecteurs m'ont demandé le détail de la démonstration.

Partons de l'hypothèse, vérifiée pour $n=2$ (et $n=3$), que, pour une valeur p de n , le référentiel est partagé en $q = 2^p$ régions, et que celles-ci peuvent être rangées en un ordre cyclique $r_1, r_2, \dots, r_i, r_{i+1}, \dots, r_q$ (r_{q+1} étant r_1), avec la condition que deux régions consécutives quelconques r_i, r_{i+1} aient un arc frontière commun $f_{i, i+1}$. Enfin, nous supposons que r_q est une région entourant la réunion des autres régions (fig. 4).

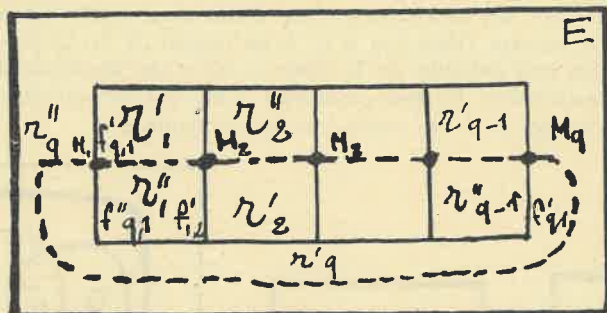


FIG. 4^{bis}

Voyons comment l'on peut définir une courbe simple fermée correspondant à une $n+1$ ième qualité et qui détermine un régionnement convenable.

Partons d'un point $M_1 \in f_{q,1}$. Il sépare $f_{q,1}$ en deux arcs dont nous nommerons l'un $f'_{q,1}$ et l'autre $f''_{q,1}$.

Prenons de même $M_2 \in f_{1,2}$, d'où deux arcs dont l'un sera plus loin choisi comme $f'_{1,2}$, l'autre étant $f''_{1,2}$. Il existe un arc M_1M_2 inclus dans r_1 . De même, nous considérons

$M_3 \in f_{2,3}, M_2M_3 \subset r_2$, etc. jusqu'à

$M_q \in f_{q-1,q}, M_{q-1}M_q \subset r_{q-1}$ et $M_qM_1 \subset r_q$ qui sera choisi plus loin.

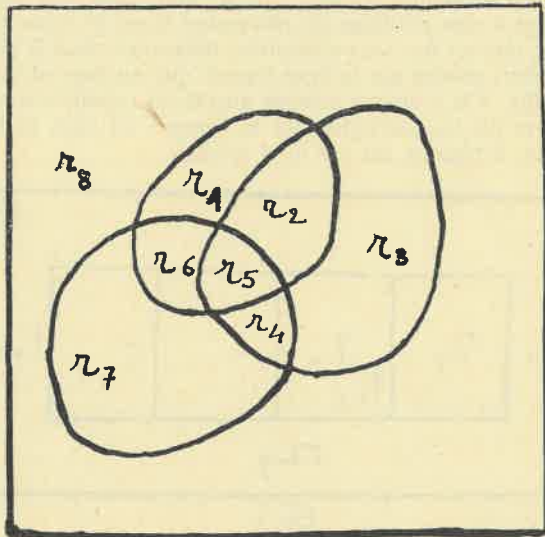


FIG. 5

Nommons maintenant r'_1 le sous-ensemble formé dans r_1 qui a $f'_{q,1}$ comme arc-frontière, et r''_1 son complémentaire dans r_1 (ils ont M_1M_2 comme arc-frontière

commun). Nous nommons $f'_{1,2}$ l'arc de frontière commune à r''_1 et r_2 , et r'_2 la région de r_2 qui a pour arcs-frontières $f'_{1,2}$ et M_2M_3 ; le complémentaire de r'_2 dans r_2 sera r''_2 . Nous continuons ainsi jusqu'à r'_{q-1} et r''_{q-1} . Alors, comme q est pair, on peut choisir l'arc M_qM_1 pour qu'une région r'_q ait pour arcs-frontières $f'_{q-1,q}$ et $f'_{q,1}$. Son complémentaire r''_q aura dans sa frontière $f'_{q,1}$, ce qui ferme le cycle : la région suivante sera bien r'_1 .

La suite de régions $s_1 = r'_1, s_2 = r''_1, s_3 = r'_2, s_4 = r''_2, \dots, s_{2q-1} = r'_q, s_{2q} = r''_q$ a les propriétés voulues pour $n = p + 1$ qualités correspondant à 2^{p+1} régions.

Le résultat, vrai pour $n = 2$ et qui est vrai pour $n = p + 1$ s'il l'est pour $n = p$, est donc vrai quel que soit l'entier n .

Les théorèmes concernant une situation mathématique déterminée expriment des incompatibilités entre appartenance d'un élément à des sous-ensembles ; ceci se traduit en indiquant que des régions sont vides (on les marque du signe $\emptyset$). Si, par exemple, on fait le schéma correspondant à la situation qui nous a fait dessiner la figure 3, 5 seulement des 16 régions ne sont pas vides.

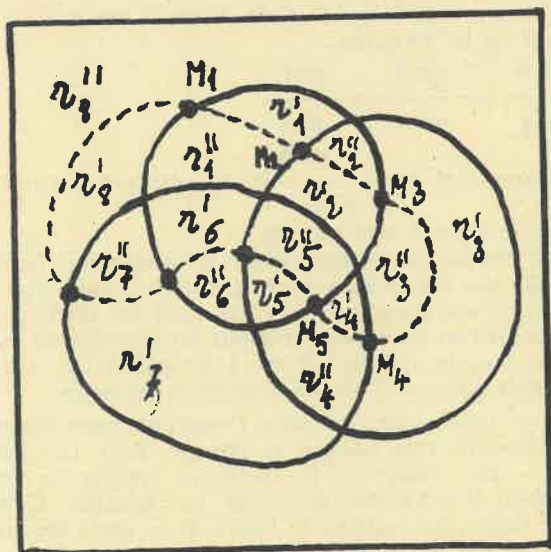


FIG. 5^{bis}

Remarque : On peut maintenant en déduire la possibilité de schémas sans cases vides : il suffit de superposer des arcs-frontières comme on superposerait les parois d'un ballon qu'on dégonfle. Mais, à cause de la superposition de frontières, le schéma n'est guère lisible à moins qu'on n'y mette de la couleur. Les lois suivant lesquelles on « décollerait » des arcs pour obtenir les schémas tels que 1, 2, 3 ne semblent pas faciles à énoncer en toute généralité avec détermination des cas où c'est possible.

Ainsi, l'on voit que les conséquences de notre logique sont représentables dans l'espace-plan.

Lucienne FÉLIX (La Fontaine, Paris).