

UN EXEMPLE D'ABSTRACTION, DE FORMALISME ET DE METATHEORIE *

La démonstration, par Kurt Gödel, de la compatibilité de l'axiome du choix
et de l'hypothèse généralisée du continu
avec les axiomes de la théorie des ensembles

par Jean BALIBAR
Professeur au Lycée Descartes (Tours)

III. DEFINITION D'UN MODELE

L'énoncé de l'axiome du choix ne fait intervenir que les tout premiers concepts de la théorie et peut être donné, comme nous l'avons vu, immédiatement après les autres axiomes. Il aurait même pu être donné à la suite des définitions qui précèdent le groupe d'axiomes B si on n'avait pas voulu le séparer nettement du système Σ . Il en va tout autrement de l'hypothèse du continu et de l'hypothèse généralisée dont on ne peut donner les expressions tant qu'on n'a pas développé la partie de la théorie qui concerne les notions d'ordinal et de cardinal. En outre, si la démonstration du résultat de Gödel est bien, pour l'essentiel, un raisonnement, d'ailleurs élémentaire, de la métathéorie, elle n'en exige pas moins qu'on ait développé d'abord une nouvelle partie de la théorie, celle qui concerne la notion de *constructible* et qu'on peut appeler commodément la théorie du *modèle* Δ . Il n'est pas inutile de redire que la théorie du modèle Δ est une partie de la théorie proprement dite au même titre que la théorie des ordinaux ou des cardinaux ; les objets (classes et ensembles) et les concepts (notions, opérations, etc.) du modèle, de même que les théorèmes, sont des objets, des concepts et des théorèmes de la théorie. Comme dans les autres parties de la théorie l'étude du modèle Δ est simplifiée grâce à l'introduction de notions métamathématiques. La notion même de modèle, telle qu'elle sera explicitée plus loin, est évidemment métathéorique, de même que l'utilisation du modèle à la démonstration des théorèmes de compatibilité.

Il est douteux qu'on puisse se faire une idée véritablement adéquate de la signification et de la portée des constructions intellectuelles, mathématiques et métamathématiques, qui constituent l'ouvrage de Gödel, et principalement de celles qui vont venir, par la seule esquisse qu'il est de notre propos de donner. En n'exposant que quelques points que nous jugeons importants, en résumant la plupart des développements, nous donnons à penser, à tort, que les choses sont plus difficiles quant au principe, plus simples dans leur organisation déductive, qu'il n'est vrai en réalité. Nous ne pouvons éviter, d'autre part, d'imposer, explicitement ou non, des représentations intuitives diverses, représentation des objets, représentation des concepts, représentation de la théorie elle-même en tant que système, etc., alors que le seul support intuitif efficace est celui

(*) Voir le début de cette étude dans le Bulletin 217, p. 11.

que chacun forge pour son propre compte en contraignant son imagination à suivre une par une les démarches du texte intégral. Si l'on veut bien admettre qu'on ne trouvera pas ici de substitut du texte original mais seulement des indications sur ce qui y est traité, on évitera d'interpréter à contre sens les considérations qui suivent.

Avant de parcourir les prochaines étapes de la théorie et faute de pouvoir reproduire la suite complète des formules dont elle est composée, nous devons prendre à notre compte quelques remarques générales destinées à rappeler le niveau d'abstraction où se situe le travail de Gödel:

1. Remarques.

a) *Sur les ensembles.*

Nous n'entreprendrons pas de discuter s'il existe une représentation adéquate d'un ensemble d'objets concrets en tant qu'ensemble ; si, par exemple, parlant d'un ensemble de grains de sable, on ne se représente pas toute autre chose qu'un ensemble : une configuration de points, s'il y en a peu ; un solide géométrique facile à ébouler, s'il s'agit d'un tas. Il semble bien qu'un ensemble n'existe que lorsqu'il se constitue, quand on rassemble ses éléments, ou lorsqu'inversement il se détruit, quand on isole un de ses éléments. C'est sans doute pourquoi, dans une théorie des ensembles en tant que tels, c'est la relation d'appartenance qui a un sens intuitif et c'est l'emploi du substantif « ensemble » qui est à l'origine de toutes les confusions. On aura constaté en tout cas que la théorie ne fournit aucun exemple d'ensemble qu'on puisse se représenter ; elle légitime purement et simplement des affirmations qui sont des amplifications de la relation d'appartenance primitive. L'ensemble vide qu'on pourrait nous opposer est moins que tout autre susceptible d'une représentation intuitive ; il intervient, pour dire les choses rapidement, comme négation de la relation d'appartenance. C'est par une illusion qu'on croit se représenter l'ensemble vide ; on se représente le symbole O qui le désigne. On se convaincra facilement, sans doute, qu'il n'y a pas davantage de représentation des ensembles à un élément, à deux éléments, etc..., de la théorie. Nous ne voulons pas dire, évidemment, que la théorie n'a pas d'applications concrètes, comme toute théorie mathématique, ni que des enfants qui jouent à deviner combien ils cachent de cailloux ne se représentent rien quand l'un d'eux a les mains vides. Il ne faudra pas perdre de vue, un peu plus loin, que les ordinaux, pour lesquels il est facile de donner des correspondants intuitifs, au moins pour les premiers d'entre eux, prêtent, en tant qu'ils sont désignés par un substantif, aux mêmes confusions que les ensembles.

b) *Sur les classes.*

C'est par une réflexion sur le rôle technique des classes qu'on atteint le mieux le sens de la théorie dans son ensemble. Toutes les notions que l'on utilise sont associées à des classes, grâce aux métathéorèmes fondamentaux. Cela revient à dire qu'on a réussi à caractériser par le groupe d'axiomes B le type de propriétés qui interviennent dans la théorie des ensembles, ou, si l'on préfère, le type de phrases qui ont un sens utile dans la théorie. Il est remarquable que par ce moyen la notion, souvent difficile à dominer, de propriété, se prête à un calcul qui écarte toute ambiguïté et permet, en toute sécurité, des combinaisons complexes. On remarquera aussi que cette notion, qui paraît à bon droit purement logique, est intégrée à la théorie.

c) Sur les théorèmes d'existence.

L'expression « il existe un objet tel que » pose des problèmes d'interprétation difficiles, quel que soit le degré d'abstraction de la théorie mathématique où on l'emploie. Dans la présente théorie cette expression, rappelons-le, peut être employée sans qu'il y ait à lui attribuer un sens. On en retrouve le sens usuel dans les applications de la théorie, mais ce n'est pas ce genre d'intuition qui facilite la lecture du texte. Nous suggérons un autre mode d'interprétation intelligible qui revient, *grosso modo*, à remplacer « il existe » par « on a le droit de dire, ou de considérer, etc... ». Si on prend par exemple le théorème selon lequel il existe une classe vide il est assez vain d'essayer de comprendre quel est le mode d'existence de cette classe vide ; de même si, un peu plus loin, on démontre que la classe vide est un ensemble, il n'est pas indiqué de se perdre dans la recherche des raisons intuitives de ce résultat. On se satisfait plus facilement en considérant ces théorèmes comme des autorisations à employer certaines façons de parler, c'est-à-dire en plaçant l'intuition au niveau du langage et non au niveau des objets. On considère, par exemple, pour les théorèmes que nous invoquons, qu'on a le droit d'utiliser le langage des classes pour exprimer qu'une propriété n'est jamais vérifiée, que dans le langage de la théorie le mot plus particulier d'ensemble peut être substitué au mot classe dans cette occasion, etc... La classe universelle qui réunit tous les ensembles de la théorie alors qu'on n'a aucun moyen de fournir aucune idée intuitive de l'étendue de cette totalité s'interprète beaucoup plus facilement sous une forme purement syntaxique. De même la classe E ou la classe I.

d) Sur les concepts.

Nous nous bornons à rappeler que l'introduction des concepts revient à un enrichissement du langage et qu'on n'a aucun moyen de se représenter l'extension de ces concepts. La théorie ne construit pas des ensembles, elle élabore un langage qui permet de traiter des ensembles et elle établit la cohérence de ce langage.

2. La notion d'ordinal.

L'enchaînement des notions qui conduisent à la notion plus complexe d'ordinal est donné au paragraphe b) ci-dessous. Cet enchaînement est instructif en tant que reconstitution abstraite de notions familières. Auparavant nous présentons, sans nous leurrer sur leur valeur, quelques préliminaires plus concrets.

a) Construction intuitive d'une partie des nombres ordinaux.

Considérons l'ensemble vide O ; puis l'ensemble qui a pour unique élément l'ensemble vide, soit $\{O\}$, puis l'ensemble dont les deux éléments, évidemment distincts, sont O et $\{O\}$, soit $\{O\{O\}\}$; puis l'ensemble dont les éléments sont les trois ensembles que nous venons de considérer, et ainsi de suite. Nous venons de faire concevoir une classe N d'ensembles naturellement ordonnée et isomorphe, pour cet ordre, à la suite naturelle des nombres entiers. Un peu de réflexion montre que cette classe possède les propriétés suivantes : 1°) pour deux éléments u et v de N , les deux relations $u \varepsilon v$ et $u \subset v$ sont équivalentes ; quand elles sont vérifiées on écrit aussi $u < v$; 2°) si u et v sont deux éléments quelconques de N , l'une et l'une seulement des trois relations $u < v$, $v < u$ et $u = v$ est vérifiée ; comme $u \varepsilon v \equiv < uv > \varepsilon E$, on dit que N est ordonnée par E ; 3°) tout élément u de N est identique à l'ensemble des éléments de N qui lui sont

inférieurs et par suite tout élément de N est une partie de N (la réciproque n'étant évidemment pas vraie) ; 4° toute partie non vide de N admet un premier élément, on dit que N est bien ordonnée par E .

La construction intuitive de N peut être poursuivie. Soit ω l'ensemble des éléments de N , on peut considérer que ω vient après tous les ensembles qui appartiennent à N . On considère ensuite l'ensemble dont les éléments sont tous les éléments de ω et ω lui-même, ensemble que l'on peut noter $\omega + 1$, et ainsi de suite. On imagine assez facilement qu'on puisse considérer ainsi des ensembles notés $\omega \times 2$, puis $\omega \times 2 + 1$, et ainsi de suite, puis des exponentiations assez étendues. Il est clair que la classe de tous ces ensembles a les propriétés citées plus haut. Dans la théorie abstraite, les ordinaux sont définis par une partie des propriétés précédentes, les autres en étant des conséquences ; les rudiments d'interprétation intuitive que nous venons de donner peuvent aider à accepter ce mode de définition.

b) Enchaînement des notions.

connexe, sous la forme : « Y est connexe dans X », noté $Y \text{ Con } X$, défini par

$$Y \text{ Con } X. \equiv .X^2 \subseteq Y + Y^{-1} + I ;$$

transitif, sous la forme : « Y est transitive dans X », sans notation particulière, équivalent à

$(u, v, w) \{ u \in X. v \in X. w \in X : \supset [\langle uv \rangle \in Y. \langle vw \rangle \in Y : \supset \langle uw \rangle \in Y] \} ;$
asymétrique, sous la forme : « Y est asymétrique dans X », sans notation particulière, équivalent à

$$\sim (\exists u, v) [u \in X. v \in X. \langle uv \rangle \in Y. \langle vu \rangle \in Y] ;$$

bien ordonné, sous la forme : « X est bien ordonnée par Y », noté $X \text{ We } Y$, défini par

$X \text{ We } Y. \equiv : Y \text{ Con } X. (U) [U \neq 0. U \subseteq X : \supset . (\exists v) [v \in U. [U. Y'' \{ v \} = 0]]] ;$
 (on notera que le dernier point de la formule est le symbole de l'intersection, l'avant-dernier le symbole de « et », le précédent un signe de séparation ; le symbole $Y'' \{ v \}$ dont nous n'avons pas rapporté la définition désigne la classe des u tels que $\langle uv \rangle \in Y$). On trouvera peut-être difficile, à première vue, d'accepter que la classe Y définisse un ordre, mais on montre facilement que la définition de We entraîne que Y soit transitive et asymétrique.

R-section, sous la forme : « X est une R-section de Y », noté $X \text{ Sect}_R Y$, défini par

$$X \text{ Sect}_R Y. \equiv : X \subseteq Y. [Y. (R''X) \subseteq X].$$

R-segment, sous la forme : « le R-segment de X engendré par l'élément u de X », noté $\text{Seg}_R(X, u)$, défini par

$$\text{Seg}_R(X, u) = X. R'' \{ u \}.$$

On montre qu'un R-segment de X est une R-section de X si R est transitive dans X , donc, en particulier, si $X \text{ We } R$. Inversement, si $X \text{ We } R$ et si Y est une R-section propre de X , Y est un R-segment de X , celui qui est engendré par le premier élément de $X - Y$.

isomorphisme, sous la forme : « la relation bi-univoque R est un isomorphisme de A à B relativement à S et T », noté $R \text{ Isom}_{S,T} (A, B)$; la formule de définition, assez longue, signifie que si

$u \in A, v \in A, \langle uv \rangle \in S, \langle u_1 u \rangle \in R$ et $\langle v_1 v \rangle \in R, \langle u_1 v_1 \rangle \in R$ et $\langle v_1 v \rangle \in R, \langle u_1 v_1 \rangle$ est élément de T . Il n'est pas exclu que S et T soient identiques.

ordinal, sous la forme : « la classe X est un ordinal », noté $Ord(X)$, défini par les deux conditions (qu'il faudrait réunir par « et » dans la formule de définition proprement dite) :

1. $X \mathcal{W}_e E$.
2. $u \in X : \supset . u = Seq_e(X, u)$.

On montre qu'il est équivalent de prendre les conditions plus faibles :

- 1'. $E \mathcal{C}_{on} X$.
- 2'. $u \in X : \supset . u \subseteq X$.

nombre ordinal, sous la forme : « X est un nombre ordinal », noté $O(X)$, défini par

$$O(X) . = : Ord(X) . \mathcal{M}(X).$$

Il résulte des métathéorèmes fondamentaux, et en particulier de la normalité des concepts qui interviennent implicitement dans cette dernière définition, que les nombres ordinaux forment une classe, notée On . Il ne paraît pas possible de se représenter l'extension de cette classe et on apprécie facilement l'insuffisance, à ce point de vue, des considérations du paragraphe *a*) précédent. D'autre part, on montre que On est un ordinal.

c) Définition d'une fonction par induction transfinie.

On convient de noter par des lettres grecques minuscules les variables qui sont des nombres ordinaux. On définit la notion de fonction sur une classe, notée $\mathcal{F}_n$, par l'équivalence : $X \mathcal{F}_n A . = : \mathcal{F}_{nc}(X) . \mathcal{A}_i(X) = A$. On définit l'opération de restriction d'une classe à une autre classe, notée $\upharpoonright$, par la relation : $A \upharpoonright B = A . (V \times B)$.

Dans ces conditions, on établit le théorème suivant :

$$(G) (\exists ! F) [F \mathcal{F}_n On . (\alpha) (F^\alpha \alpha = G^\alpha (F \upharpoonright \alpha))].$$

Dans cette formule G désigne une fonction supposée connue. Le symbole $A^\alpha x$ dont nous n'avons pas rapporté la définition désigne l'ensemble y tel que $\langle yx \rangle \in A$ quand cet y existe et est unique, l'ensemble O dans le cas contraire. Quand A est une fonction, $A^\alpha x$ est donc ce qu'on appelle en langage élémentaire la valeur de la fonction pour la valeur x de la variable, si la fonction est définie pour x , et O par convention si la fonction n'est pas définie pour x (il n'est évidemment pas exclu que la fonction prenne aussi la valeur O pour des valeurs de la variable pour lesquelles elle est définie).

L'énoncé du théorème se lit facilement et peut être interprété ainsi : $G^\alpha x$ est un ensemble bien déterminé quel que soit l'ensemble x ; par l'intermédiaire de cet « opérateur », la valeur de la fonction F se trouve définie pour tout nombre ordinal α si on la suppose connue pour tous les éléments de α , c'est-à-dire pour tous les nombres ordinaux inférieurs à α ; dans ces conditions une fonction F bien déterminée et unique est définie sur On par G . Ce résultat permet de construire de façon intéressante une interprétation intuitive de ce qu'est un théorème d'existence dans la théorie.

d) Définition d'un bon ordre sur la classe des paires ordonnées de nombres ordinaux.

Nous présentons ce résultat en langage ordinaire : la paire $\langle \alpha\beta \rangle$ est inférieure à la paire $\langle \gamma\delta \rangle$, soit si le plus grand des deux nombres α, β est inférieur au plus grand des deux nombres γ, δ , soit, lorsqu'il y a égalité, si β est inférieur à δ , soit, lorsque β et δ sont de plus égaux, si α

est inférieur à γ . On montre rigoureusement qu'on définit ainsi un bon ordre R sur On^2 et que On^2 ordonné par R est isomorphe à On ordonné par E .

Il est encore utile pour la suite de définir un bon ordre S sur la classe $9 \times On^2$ des triples $\langle \mu\alpha\beta \rangle$, où α et β sont des nombres ordinaux quelconques et μ un des ordinaux $0, 1, \dots, 8$. (Nous omettons la définition précise des entiers). On pose :

$$\mu, \nu < 9. \supset . : \langle \mu\alpha\beta \rangle S \langle \nu\gamma\delta \rangle . \equiv : \langle \alpha\beta \rangle R \langle \gamma\delta \rangle . \vee . (\langle \alpha\beta \rangle = \langle \gamma\delta \rangle . \mu < \nu) : : S \subset (9 \times On^2)^2,$$

ce qui, malgré les apparences, est d'une lecture et d'une interprétation faciles.

3. La notion de constructible.

On va définir un prédicat à un argument, noté $\mathcal{L}$, qui s'applique aux classes et donc plus particulièrement aux ensembles. $\mathcal{L}(X)$ se lit : X est constructible. Comme on va le voir les ensembles constructibles sont mis en relation avec les nombres ordinaux de telle sorte que l'ensemble qui est associé à l'ordinal α dérive des ensembles associés aux ordinaux précédant α par des opérations simples. L'emploi du mot constructible se trouve ainsi expliqué dans une certaine mesure, mais on sera déçu si on s'attend à une méthode de construction intuitive de ces ensembles comme celle qui a été suggérée plus haut à propos des premiers ordinaux et qui donnerait aux ensembles constructibles une existence plus forte, si l'on ose dire, que celle des ensembles non autrement caractérisés de la théorie. Encore une fois constructible est une notion et comme telle elle dérive de l'unique relation d'appartenance par le jeu, si compliqué soit-il, des seuls opérateurs logiques.

On note J l'isomorphisme entre la classe $9 \times On^2$ ordonnée par S et la classe On ordonnée par E . On définit à l'aide de la fonction J neuf nouvelles fonctions, soit J_i ($i = 0, 1, \dots, 8$), par les formules :

$$J_i^c \langle \alpha\beta \rangle = J^c \langle i\alpha\beta \rangle.$$

J étant bi-univoque, il existe deux fonctions, soit K_1 et K_2 , sur On , définies par :

$$\langle \alpha\gamma \rangle \varepsilon K_1 \equiv (\exists \mu, \beta) [\mu < 9. \gamma = J^c \langle \mu\alpha\beta \rangle] . K_1 \subseteq On^2,$$

$$\langle \beta\gamma \rangle \varepsilon K_2 \equiv (\exists \mu, \alpha) [\mu < 9. \gamma = J^c \langle \mu\alpha\beta \rangle] . K_2 \subseteq On^2.$$

On note $\mathcal{U}(A)$ la classe des valeurs d'une fonction A , X^{-1} la classe des paires $\langle uv \rangle$ telles que $\langle vu \rangle \varepsilon X$, $\mathcal{C}_{no\ 2}(X)$ et $\mathcal{C}_{no\ 3}(X)$, les classes de triples $\langle uvw \rangle$ tels que $\langle vwu \rangle \varepsilon X$ et $\langle uuv \rangle \varepsilon X$ respectivement. On note $\mathcal{G}_i$ ($i = 1, \dots, 8$) les huit opérations suivantes :

$$\mathcal{G}_1(XY) = XY$$

$$\mathcal{G}_2(XY) = E.X$$

$$\mathcal{G}_3(XY) = X - Y$$

$$\mathcal{G}_4(XY) = X \upharpoonright Y$$

$$\mathcal{G}_5(XY) = X. \mathcal{D}(Y)$$

$$\mathcal{G}_6(XY) = X.Y^{-1}$$

$$\mathcal{G}_7(XY) = X. \mathcal{C}_{no\ 2}(Y)$$

$$\mathcal{G}_8(XY) = X. \mathcal{C}_{no\ 3}(Y).$$

On démontre alors par induction transfinie qu'il existe une fonction F et une seule sur On telle que :

$$\alpha \varepsilon \mathcal{U}(J_0) \supset F^c\alpha = \mathcal{U}(F \upharpoonright \alpha),$$

$$\alpha \varepsilon \mathcal{U}(J_i) \supset F^c\alpha = \mathcal{G}_i(F^cK_1^c\alpha, F^cK_2^c\alpha), (i = 1, \dots, 8).$$

De cette façon, la fonction F reflète les opérations fondamentales de la théorie telles qu'elles sont contenues dans les axiomes A4 et B1 à B8 (remarquer que $X.Y = X - (X - Y)$), et, en outre, une opération qui consiste à prendre l'ensemble des ensembles déjà définis. On dit qu'un ensemble x est constructible s'il existe un nombre ordinal α tel que $x = F^\alpha$. La classe des valeurs de la fonction F est la classe des ensembles constructibles, notée L . S'il n'est pas douteux qu'on se représente plus facilement la suite des entiers naturels que la classe On , il faut remarquer que cette disparité n'a plus ni sens ni influence quand on introduit ces deux catégories de nombres par la méthode axiomatique et abstraite. La définition des ensembles constructibles réalise *ipso facto* une numérotation, dans un sens élargi, de ces ensembles. Les propriétés remarquables qu'on peut établir à leur sujet tiennent au rôle qu'y joue, grâce à cette numérotation, l'induction transfinie, rôle tout à fait comparable à celui des définitions et des démonstrations par récurrence dans l'arithmétique élémentaire. On pourra se faire une idée un peu précise des premiers ensembles de L en appliquant la définition de F aux vingt ou trente premiers ordinaux. On remarquera que les mêmes ensembles reviennent plusieurs fois. D'autre part, on a peut-être le sentiment que les ensembles de L ou de On sont, d'une certaine manière, plus réels que les ensembles tout à fait nébuleux de V . Sans entrer dans les détails d'une question difficile signalons que ce sentiment est lié à la notion métamathématique de *catégoricité* (un système d'axiomes est catégorique quand tous les systèmes d'objets qui le vérifient sont isomorphes entre eux).

La notion de constructible s'applique aussi aux classes : une classe A est constructible quand tous ses éléments sont des ensembles constructibles et que toute intersection de A et d'un ensemble constructible est un ensemble constructible.

La classe On étant bien ordonnée, il existe un plus petit α tel que $x = F^\alpha$ pour chaque ensemble constructible x ; cet α s'appelle l'ordre de x , noté $Od^\alpha x$.

On établit un certain nombre de théorèmes dont les principaux, d'ailleurs prévisibles, sont : que tout élément d'un ensemble constructible est un ensemble constructible, que O est un ensemble constructible, que L est une classe constructible, que si l'on applique les opérations fondamentales à des classes ou des ensembles constructibles on obtient des classes ou des ensembles constructibles.

4. Le modèle Δ .

On dit qu'on a défini un système d'objets quand on a défini des objets qui forment un certain domaine et des relations entre ces objets. Le modèle Δ est un système d'objets. Les objets de Δ sont les classes constructibles de la théorie, appelées simplement classes quand on ne s'occupe que du modèle, et les ensembles constructibles de la théorie, appelés simplement ensembles dans les mêmes conditions. Il est commode de noter $\bar{X}$ et $\bar{x}$ les objets de Δ . On a en outre dans Δ une relation notée ϵ_1 et appelée relation d'appartenance ; c'est, par définition, la relation ϵ de la théorie, restreinte aux classes et ensembles constructibles.

Une théorie mathématique peut admettre des modèles d'un autre type, constitués en dehors de la théorie. On notera que le modèle Δ s'obtient par une simple restriction de la théorie elle-même. L'étude du modèle Δ comporte les étapes suivantes :

a) *relativisation des concepts.*

C'est une notion métamathématique récursive. Une opération, une notion ou une classe particulière ayant été définie dans la théorie, on remplace dans la formule de définition correspondante les variables $X, Y, \dots, x, y, \dots$, par $\bar{X}, \bar{Y}, \dots, \bar{x}, \bar{y}, \dots$, et par ϵ_l et les concepts et les variables d'un genre particulier antérieurement définis par les relativisés correspondants, tandis que les symboles logiques et le signe $=$ sont maintenus sans changement. On obtient ainsi la relativisée de l'opération, de la notion ou de la classe particulière considérée. La relativisée d'une variable d'un genre particulier s'obtient en relativisant la notion qui définit ce genre. Il faut noter qu'il n'y a pas de raison *a priori* pour que la relativisée d'une opération ou d'une classe particulière existe, les théorèmes d'existence et d'unicité associés n'étant pas nécessairement vrais dans Δ . On prend pour symboles des relativisés les symboles initiaux affectés de l'indice l . Les classes, notions et opérations relativisées sont *ipso facto* des classes, des notions et des opérations de la théorie.

b) *Notion d'absolu.*

Une classe particulière est qualifiée d'absolue si elle est égale à sa relativisée. Une opération est qualifiée d'absolue si, appliquée à des objets de Δ , elle donne le même résultat que l'opération relativisée appliquée aux mêmes objets. Une notion est qualifiée d'absolue si on obtient des formules équivalentes quand on applique la notion ou sa relativisée à des objets de Δ . En symboles :

$A_l = A, \mathcal{A}_l(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n) = \mathcal{A}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n), \mathcal{B}_l(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n) \equiv \mathcal{B}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$, respectivement. Une variable est qualifiée d'absolue si elle a le même champ que sa relativisée.

On démontre qu'à de rares exceptions près, tous les concepts rencontrés jusqu'ici dans la théorie sont absolus, en particulier tous ceux qui figurent dans le système d'axiomes Σ . On montre aussi que O est absolu et que $V_l = L$.

c) Δ est effectivement un modèle pour la théorie.

Il suffit de prouver que les axiomes de Σ restent vrais quand ils ont été relativisés, c'est-à-dire que sous cette dernière forme ce sont des théorèmes de la théorie. Par exemple, l'axiome $A1$ devient le théorème : tout ensemble constructible est une classe constructible ; l'axiome $A4$, le théorème : l'ensemble unique qui a pour éléments deux ensembles constructibles donnés est constructible.

Ayant démontré que les axiomes de la théorie sont valables dans Δ , on est assuré que les relativisés de tous les théorèmes de la théorie sont vrais, en particulier les théorèmes d'existence et d'unicité qui permettent de définir les classes particulières et les opérations, de sorte que les relativisés de tous les concepts de la théorie existent. C'est ainsi qu'il existe des ordinaux relativisés, des ensembles « relativement » constructibles, etc. Comme ces ensembles ou ces classes sont aussi des ensembles ou des classes de la théorie, on ne peut manquer de se demander quelles relations ils entretiennent avec, si l'on ose dire, leurs originaux.

d) *Résultat fondamental.*

La démonstration du résultat pour lequel tout l'ouvrage est rédigé repose sur le théorème : $V = L$ est vrai dans Δ . Ce qui veut dire exactement que $V_l = L_l$ est vrai dans la théorie, ou, d'après un résultat donné plus haut, que $L = L_l$, c'est-à-dire que la classe des ensembles construc-

tibles est absolue. On obtient ce résultat en montrant de proche en proche que toutes les opérations, notions, etc., que l'on a rencontrées en allant des axiomes jusqu'à la définition de L , sont absolues. En passant, on démontre que On est absolue, ce qui veut dire que les nombres « relativement » ordinaux sont les mêmes que les nombres ordinaux proprement dits, et permet d'affirmer aussi que tout nombre ordinal est constructible. Ce dernier résultat montre assez qu'il ne faut pas prendre le mot constructible au sens ordinaire du terme.

5. Utilisation du modèle.

a) *Raisonnement métathéorique fondamental.*

Δ est un modèle pour les axiomes du système Σ ; en outre, la proposition $V = L$ est vraie dans Δ , donc Δ est aussi un modèle pour la théorie qui comporte, outre les axiomes de Σ , l'axiome supplémentaire $V = L$. Si ce dernier axiome est incompatible avec le système Σ , on peut établir une contradiction dans la théorie ainsi amplifiée, c'est-à-dire démontrer dans cette théorie un théorème, soit P , et sa négation, $\sim P$. Alors, P et $\sim P$ sont vrais dans Δ , c'est-à-dire que P_I et $(\sim P)_I$ sont vrais dans la théorie initiale. Or, $(\sim P)_I$ et $\sim P_I$ sont identiques, donc la théorie fondée sur Σ est contradictoire. Si les axiomes du système Σ sont compatibles entre eux (on dit aussi dans ce cas que le système Σ est consistant), l'hypothèse $V = L$ est compatible avec ces axiomes (ou, si l'on veut, le système formé de Σ et de $V = L$ est consistant). Autrement dit, si la théorie étudiée jusqu'ici n'est pas contradictoire, on ne risque pas de faire surgir une contradiction en supposant, arbitrairement, que tous les ensembles de la théorie sont constructibles.

b) *Compatibilité de l'axiome du choix.*

Il suffit de montrer que l'axiome du choix devient un théorème quand on fait l'hypothèse $V = L$. Or, en vertu de cette hypothèse, tout ensemble est constructible. Soit x un ensemble non vide, chacun de ses éléments a un ordre. L'ensemble des ordres des éléments de x étant un ensemble non vide de nombres ordinaux il admet un plus petit élément α et c'est $F^\alpha x$ que nous choisissons dans x . Autrement dit, la classe univoque A dont l'axiome du choix postule l'existence est la fonction As définie par l'équivalence :

$$\langle yx \rangle \varepsilon As. \equiv : y \varepsilon x.(z) [Od^c z < Od^c y. \supset . \sim z \varepsilon x] . Rel(As).$$

c) *Indications sommaires sur l'hypothèse du continu.*

La démonstration du deuxième théorème de compatibilité, celui qui concerne l'hypothèse généralisée du continu, ne met pas en évidence de nouvelles conceptions métamathématiques. La puissance créatrice de l'auteur dans le domaine proprement mathématique s'y déploie d'une manière particulièrement éclatante, et l'étude, qui demande une attention assez soutenue, de cette partie de son travail, permet de comprendre nettement la signification et les raisons des développements qui précèdent. Le propos plus modeste de cet exposé ne comporte pas que nous rendions compte de ce dernier chapitre de l'ouvrage. Cependant, comme le titre cite explicitement l'hypothèse du continu, il convient que nous en rap-pelions l'énoncé.

Deux ensembles sont dits équivalents quand il existe une correspondance bi-univoque entre ces deux ensembles. On appelle nombre cardinal d'un ensemble x , noté $\bar{x}$, le plus petit nombre ordinal équivalent à cet

ensemble. L'existence, pour un ensemble quelconque, d'un tel nombre ordinal est une conséquence du théorème de Zermelo, selon lequel tout ensemble peut être bien ordonné. Ce théorème dérive à son tour de l'axiome du choix. La classe des nombres cardinaux est bien ordonnée par la relation E. Il est équivalent de dire que $\bar{x} = \bar{y}$ ou que chacun des ensembles x, y est équivalent à une partie de l'autre, c'est le théorème de Schroeder-Bernstein. D'autre part, $x \subseteq y. \supset \bar{x} \leq \bar{y}$. Le nombre cardinal d'un ensemble x est inférieur, au sens strict, au nombre cardinal de l'ensemble des parties de x , résultat connu sous le nom de théorème de Cantor. Enfin, on appelle ordinairement puissance du continu le nombre cardinal de l'ensemble des nombres réels, qui est aussi le cardinal de l'ensemble des parties de l'ensemble des entiers naturels. L'hypothèse du continu est l'hypothèse selon laquelle il n'existe aucun cardinal entre le cardinal de l'ensemble des entiers naturels, ou cardinal du dénombrable, et le cardinal du continu. Plus généralement, si c est un nombre cardinal quelconque et c' le nombre cardinal de l'ensemble des parties de c , l'hypothèse selon laquelle il n'existe aucun cardinal entre c et c' porte le nom d'hypothèse généralisée du continu.

La méthode de Gödel consiste à démontrer cette hypothèse généralisée dans la théorie dont les axiomes sont Σ et $V = L$. Elle peut utiliser librement l'axiome du choix dans les définitions et les déductions qu'impose cette démonstration puisque cet axiome est un théorème de la théorie considérée.

*
**

En décidant de ne citer que les notions métamathématiques qui étaient contenues dans un ouvrage particulier, et un ouvrage dont la majeure partie est mathématique, nous nous sommes interdit délibérément de donner une idée de la métamathématique dans son ensemble. Nous y avons trouvé cet avantage de pouvoir fournir facilement une illustration immédiate des notions que nous avons rencontrées. Il était intéressant aussi d'étudier un exemple où il apparaît nettement que théorie et métathéorie sont étroitement associées. Les recherches de métamathématique pure couvrent un domaine beaucoup plus vaste que celui dont nous avons pu donner une idée, et il est assez connu que ce sont ces recherches difficiles qu'évoque le nom de Gödel. Comme une vue partielle conduit facilement à des interprétations erronées nous voulons dire en conclusion que l'intérêt principal de la métamathématique, ou si l'on préfère de la logique mathématique, n'est pas à notre avis qu'elle fournisse une base plus solide aux déductions mathématiques ou qu'elle permette d'atteindre une vérité plus certaine que celle à laquelle les mathématiciens sont accoutumés, bien qu'il y ait à dire là-dessus ; c'est surtout qu'en analysant le langage mathématique lui-même et en en faisant un objet d'étude mathématique, la métamathématique étend, d'une part, le domaine d'activité des mathématiciens, et leur donne, d'autre part, les moyens de résoudre des problèmes qu'ils n'ont pu éviter de se poser, à mesure que leur discipline, même conçue dans un sens étroit, se développait.