SUR UNE QUESTION DE NOTATION (Structure d'ordre)

I. Dans leur rapport sur l'examen oral de Mathématiques (1er degré) de l'Ecole Polytechnique en 1958, les examinateurs rappellent que « *x inférieur à y s'écrit* $x \leqslant y$ *et non* $x < y$ ». En s'exprimant ainsi, ils recommandent la notation adoptée par N. Bourbaki dès 1939 (*Théorie des ensembles,* fascicule de résultats, p. 34 de la 1re édition).

Sur le sens des relations notées :

(A) $x \leqslant y$ (B) $x < y$

tous les mathématiciens sont d'accord ; mais elles peuvent être énoncées :

(C) *x est inférieur ou égal à y ;*
(D) *x est inférieur à y ;*
(E) *x est strictement inférieur à y.*

La petite difficulté de langage est que, pour les uns, (D) signifie (A), et, pour les autres, signifie (B). Les professeurs se sont déjà trouvés en présence d'une difficulté analogue, il y a une quarantaine d'années, lorsque les vecteurs libres sont entrés dans l'enseignement. Le produit scalaire était alors noté, tantôt $\vec{V}.\vec{V}'$, tantôt $(\vec{V}, \vec{V}')$, tantôt $\vec{V} \times \vec{V}'$; mais le produit vectoriel était noté, soit : $\vec{V} \wedge \vec{V}'$ soit $[\vec{V}, \vec{V}']$, soit aussi $\vec{V} \times \vec{V}'$ et pour éviter toute confusion, il a fallu s'interdire le dernier signe.

La terminologie de Bourbaki a pour conséquence que toute locution se rapportant à l'inégalité doit être prise au sens large :

Dire que x est *positif,* c'est dire $x \geqslant 0$.

Dire que $f(x)$ est *croissante,* c'est dire $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqslant 0$, etc...

Elle a des avantages ; elle est suivie, non seulement par les mathématiciens de l'équipe Bourbaki, mais aussi d'autres auteurs de langue française.

Mais cette terminologie n'est pas en accord avec le sens usuel du mot inférieur dans la langue quotidienne. Elle est nouvelle dans le style mathématique ; pour les auteurs anciens, Picard, Goursat, Lebesgue, Baire, pour d'autres, plus récents, Denjoy, Ostrowski, dire d'un nombre qu'il est positif entraine qu'il n'est pas nul.

Cette terminologie est contraire aussi à l'usage suivi jusqu'à ce jour dans l'Enseignement du Second Degré. (Voir, par exemple, TANNERY, *Arithmétique*, et BOURLET, *Algèbre*, dans la collection Darboux, chez Colin ; ou le livre de notre collègue CROZES, *Arithmétique*, chez Masson, p. 12).

Elle n'est pas suivie non plus par tous les auteurs modernes. Citons :

VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra* (Springer, 1939), Bdl, p. 9 et p. 218.

CROISOT-Mme DUBREIL-LESIEUR, *Treillis* (Gauthier-Villars, 1953), p. 3.

MILIOUX et PISOT, *Théorie des fonctions* (G.-V, 1953), t. I, p. 3. (Il y est question d'un ε positif, ce qui veut dire strictement positif).

LICHNEROWICZ, *Théorie des connexions* (Dunod, 1956), p. 162.

ZAMANSKY, *Introduction à l'algèbre et à l'analyse modernes* (Dunod, 1958), p. 10 par exemple.

II. Il est d'usage, maintenant, avec Bourbaki, d'appeler relation d'ordre dans un ensemble une relation antisymétrique ($x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ équivaut à $x = y$) et transitive ($x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ impliquent $x \leqslant z$) et de réserver le mot d'ensemble totalement ordonné à un ensemble ordonné dans lequel deux éléments quelconques x et y de l'ensemble étant donnés, ils sont liés par l'une au moins des deux relations $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Il est d'usage également de ne plus appeler relation d'ordre la relation stricte $x < y$. Ce que fait pourtant (dans sa première édition du moins) DUBREIL, *Algèbre* (G.-V., 1946). Il faut savoir que de nombreux auteurs, SIERPINSKI, *Nombres transfinis*, G.-V., 1928), DENJOY dans ses importants travaux sur l'énumération transfinie ont entendu, par ensemble ordonné, un ensemble totalement ordonné. Il semble, néanmoins, que sur ce point, l'enseignement peut suivre Bourbaki.

A. MAGNIER (*Louis-le-Grand*).