EXEMPLE D'UN PROCÉDÉ DE GÉNÉRALISATION EN ALGÈBRE SCOLAIRE

Un des plus éminents mathématiciens polonais, Stefan Banach, disait : « *Un mathématicien, c'est celui qui sait trouver des analogies d'un théorème à un autre ; un meilleur mathématicien, c'est celui qui perçoit les analogies de démonstrations ; celui qui voit les analogies de théories se place encore plus haut ; on pourrait même imaginer quelqu'un qui saisirait des analogies d'analogies.* »

L'esprit de l'analogie pénètre les Mathématiques modernes. Nous en trouvons un clavier étendu, depuis les ressemblances intuitives et encore assez vagues jusqu'aux isomorphismes.

L'élève d'une école secondaire n'est pas et ne deviendra probablement pas un mathématicien professionnel, sauf de rares exceptions. Mais il vit et il vivra dans une civilisation technologique qui, de nos jours, est imprégnée jusqu'au fond par la pensée mathématique moderne. Un reflet de cette pensée peut et doit se trouver dans l'enseignement. C'est pourquoi une de nos tâches importantes est de rendre nos élèves sensibles aux analogies et d'ouvrir leur pensée et leur imagination aux généralisations, naïves encore peut-être, mais pleines de valeur éducative.

La modernisation de l'enseignement des Mathématiques est à l'ordre du jour. Ce qui la freine encore souvent, ce sont les malentendus concernant le sens même de cette évolution. On ne voit souvent dans cette modernisation que la recherche « à tout prix » d'originalités, même si elles sont stériles et un procédé de formalisation du cours inaccessible à l'élève moyen.

Pour écarter ces malentendus, il faut montrer, à l'aide d'exemples précis, que ce sont avant tout les procédés simples et naturels pour les élèves qui les rapprochent des Mathématiques modernes, et que ces procédés peuvent être trouvés dans le cadre des matières traditionnelles. Mon intention est de donner un exemple de ce genre. Il concerne des notions et des théorèmes bien connus et présentés dans les manuels scolaires. Il me semble pourtant qu'il est possible de les traiter d'une manière qui exprime déjà une « optique nouvelle », tout en restant dans le cadre du cours conventionnel.

Dans « l'algèbre » scolaire, — qui n'est pas une algèbre au sens moderne du mot —, l'idée générale de correspondance est surtout réalisée traditionnellement par la notion de fonction numérique. L'élève ne reconnaît, comme fonctions, que celles qui sont introduites « officiellement » par le maître et son manuel ; le plus souvent, il ne reconnaît pas d'autres modes de correspondance. Malgré leur position privilégiée, ces fonctions « officielles », sources fécondes d'idées modernes, sont-elles exploitées comme elles devraient l'être dans l'enseignement ?

Voici un exemple de généralisation suggéré par des analogies reconnues par des élèves au cours d'une étude de ces fonctions.

1. — En élaborant les propriétés de la fonction linéaire, les élèves découvrent l'additivité de la fonction $y = ax$ (en Pologne, il s'agit d'élèves de 14 ans, classe de VIII[e]). Ce fait est illustré par le schéma suggestif du diagramme de cette fonction (fig. 1). Les élèves conçoivent facilement que la fonction $x = \frac{1}{a} y$ $(a \neq 0)$ appartient « à la même famille ». Ils constatent qu'on peut exécuter « l'addition sur l'axe des y » en exécutant « l'addition sur l'axe des x » et vice versa. Ils mettent ce fait en

évidence sur un modèle qu'il est facile d'imaginer d'après le diagramme de la figure 1 : le point de départ des flèches glisse sur la droite $y = ax$ ($a \neq 0$). En décrivant les deux échelles x et y, liées par cette correspondance biunivoque qui conserve l'addition, les élèves expriment dans leur langage usuel la signification précise de l'isomorphisme en jeu.

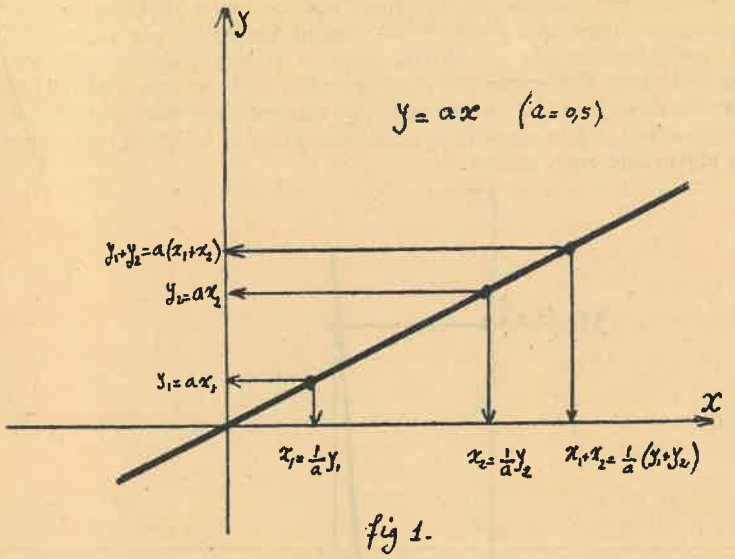


fig 1.

2. — A une autre étape du cours, on introduit la notion de radical arithmétique en tant que racine non négative de l'équation $x^n = y$. Les élèves esquissent le diagramme de la fonction $y = x^n$ ($x > 0$), par exemple, pour $n = 2$ et $n = 3$ (fig. 2). Ils interprètent ce diagramme pour la fonction $x = \sqrt[n]{y}$ ($y \geqslant 0$). Rien qu'en se servant du diagramme en tant que schéma et en se référant aux propriétés connues de la puissance, les élèves décrivent la propriété de la fonction $y = x^n$ et de la fonction $x = \sqrt[n]{y}$ qui correspond à la propriété mise en évidence précédemment sur la fonction linéaire : pour $n > 1$, les fonctions $y = x^n$ et $x = \sqrt[n]{y}$ ne sont pas additives mais multiplicatives. De même, pour $n = 1$, on retrouve la fonction « banale » $y = x$ qui est additive et multiplicative en même temps. Elle est l'élément unique commun des deux familles $y = ax$ et $y = x^n$.

Ainsi les élèves saisissent-ils d'un seul acte de l'imagination et de la pensée certains théorèmes sur les radicaux ; ces résultats sont illustrés sur le diagramme : lorsque le point glisse sur la courbe $y = x^n$, les flèches montrent que les fonctions $y = x^n$ et $x = \sqrt[n]{y}$ traduisent une multiplication par une multiplication et les deux échelles se correspondent dans un nouvel isomorphisme. Ce mot savant est encore inconnu, bien sûr, mais sa signification dérive déjà de la situation étudiée.

3. — Quand on introduit la notion de puissance d'un nombre, l'exposant étant un nombre réel, on définit en même temps la notion de logarithme (il s'agit ici d'élèves de 16 ans). L'élaboration simultanée des opérations mutuellement inverses garantit une maîtrise plus profonde, plus active, plus durable des idées en jeu. L'étude de la fonction $y = a^x$ et de son diagramme crée une situation analogue à

celle qui a déjà été considérée deux fois. Les élèves sont préparés à faire une découverte plus intéressante que les précédentes. Ils considèrent simultanément les fonctions $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ et $x = \log_a y$. La correspondance établie par le glissement d'un point sur la courbe et les flèches donne immédiatement la formule fondamentale

$$\log_a y_1 y_2 = \log_a y_1 + \log_a y_2 \qquad \text{(fig. 3)}.$$

Les élèves constatent que les fonctions étudiées ne sont, cette fois, ni additives ni multiplicatives, mais que l'une d'elles traduit l'addition par la multiplication et l'autre la multiplication par l'addition. Ainsi se trouve établi l'isomorphisme entre le groupe additif de l'ensemble des nombres réels et le groupe multiplicatif de l'ensemble des nombres positifs. Encore une fois, cela est saisi d'un seul acte de la pensée et de l'imagination, d'une manière synthétique, grâce à la révélation naturelle de la structure algébrique sous-jacente.

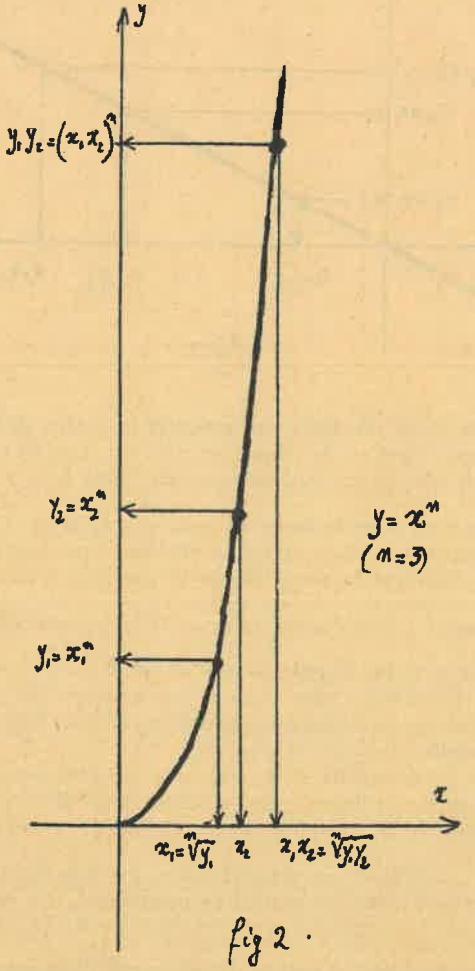


fig 2.

On résume les acquisitions précédentes au cours d'une confrontation générale : les fonctions

$$y = ax\ ;\ y = x^a \quad (x > 0),$$
$$y = a^x \ (a > 0)\ ;\ y = \log_a x \ (a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0),$$

satisfont respectivement aux équations :

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \; ; \qquad f(x_1 . x_2) = f(x_1) . f(x_2),$$
$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) . f(x_2) \; ; \qquad f(x_1 . x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

On s'efforce alors d'exprimer l'analogie renfermée dans ces formules par une seule formule. Il suffit d'introduire conventionnellement les symboles + et . pour écrire $f(x_1 . x_2) = f(x_1) + f(x_2)$: c'est la généralisation cherchée *.

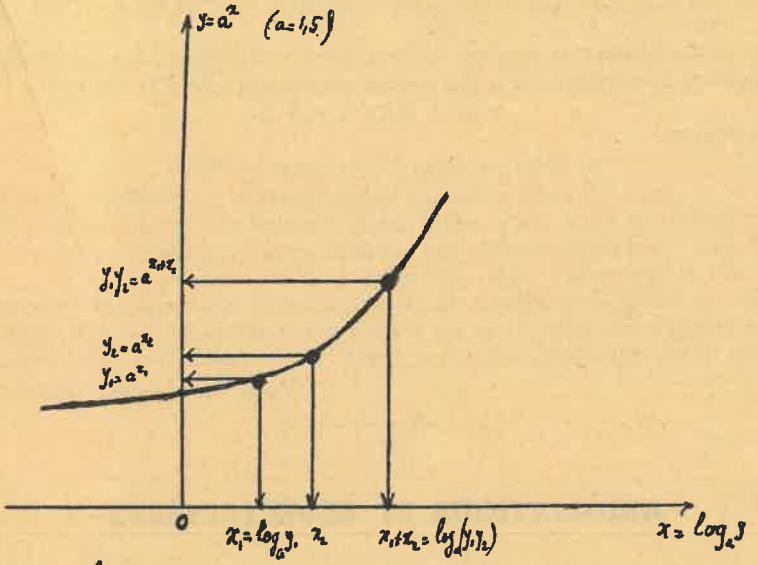


fig. 5

4. — Si le champ des questions nouvelles ne s'ouvre pas en classe, il est encore possible de l'ouvrir largement dans les séances du club mathématique des élèves. On se demande par exemple, si les fonctions étudiées précédemment sont les seules solutions des équations obtenues. Et les autres fonctions biunivoques définies dans l'ensemble des réels, comment traduisent-elles l'addition et la multiplication ? On prend un exemple très simple, celui de la fonction $y = ax + b$ $(a \neq 0)$. Le schéma avec les flèches et le point mobile sur la courbe conduisent à la découverte de deux opérations nouvelles $y_1 + y_2 = y_1 + y_2 - b$ $\qquad y_1 . y_2 = \dfrac{(y_1 - b).(y_2 - b)}{a} + b$, le « zéro » ou élément neutre de la première est égal à b ; « l'unité » ou élément neutre de la seconde est $a + b$. L'isomorphisme garantit leur commutativité et leur associativité, ainsi que la distributivité de la multiplication nouvelle par rapport à l'addition nouvelle. Les élèves découvrent ainsi une arithmétique un peu « étrange ». On trouve

$$y_1 - y_2 = y_1 - y_2 + b,$$
$$y_1 : y_2 = a \frac{y_1 - b}{y_2 - b} + b.$$

On constate que, grâce à la correspondance établie, on peut, « sans danger » profiter formellement des lois connues de l'arithmétique ordinaire, par exemple :

$$[y_1 + y_2] . [y_1 - y_2] = y_1 . y_1 - y_2 . y_2.$$

* On remarquera bien que les symboles + et . sont imprimés en gras et qu'ils ont ici une signification nouvelle ou « généralisée » (*N.D.L.R.*).

En se servant des symboles des nombres avec leur signification usuelle l'élève calcule (par exemple avec $y = x + 1$)

$$2 + 2 = 3 \; ; \quad 0 . 0 = 2 \; ; \quad 0 + 0 = -1 \; ; \quad 1 + 1 = 1, \text{ etc...}$$

ce qui est très amusant. Mais on peut employer les symboles autrement, en désignant par $\mathbf{x}$ les nombres correspondant à x. On obtient alors les formules

$$\mathbf{2 + 2 = 4} \; ; \quad \mathbf{0 . 0 = 0} \; ; \quad \mathbf{1 + 1 = 2}$$

et on constate une analogie complète entre les deux échelles vis-à-vis des opérations $+$ et $.$ d'une part, $\mathbf{+}$ et $\mathbf{.}$ de l'autre.

On peut continuer ce jeu très intéressant : « Cherchez une addition et une multiplication non ordinaires. » On revient encore une fois à la fonction

$$y = a^x \quad (a > 0, \; a \neq 1).$$

On trouve

$$y_1 + y_2 = y_1 . y_2 \qquad y_1 . y_2 = y_1 ^{\log_a y_2} .$$

Ici le « zéro » élément neutre de l'addition est 1 ; « l'unité », élément neutre de la multiplication est a. On constate que la fonction $y = a^x$ « resserre » le corps des réels (par exemple, l'ensemble des nombres négatifs devient, si $a > 1$, le « segment » $]0 ; 1[$ seulement) ; mais elle conserve la structure de corps.

Ainsi se profile, dans l'esprit de l'élève, la notion du corps des réels, notion un peu plus générale que celle qui en est donnée par tradition, et les jeunes gens acquièrent l'idée qu'un outil magique leur est donné : la correspondance biunivoque.

Zofia KRYGOWSKA (*Cracovie*).
