QUELQUES REMARQUES SUR LA MÉTHODE DE SUBTITUTION APPLIQUÉE A UN SYSTÈME DE M ÉQUATIONS A N INCONNUES

D'après une conférence faite, le 13 novembre 1958, au Séminaire des Professeurs de Mathématiques de Lille, par G. POITOU, *professeur à la Faculté des Sciences de Lille.*

Le but de ces remarques est de montrer que la méthode de substitution ne permet pas seulement de calculer la solution unique du système quand il a une solution unique, mais qu'elle est aussi adaptée à la démonstration des théorèmes concernant l'existence de la solution unique.

Dans le cas d'*une* équation à *une* inconnue, $ax = b$ a une solution unique si, et seulement si a n'est pas nul ; cette condition ne dépend que de a, pas du second membre. Il s'agit de généraliser cette remarque au cas d'un système quelconque.

Soit donc un système de m équations à n inconnues :

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

qui s'écrit en abrégé :

$$(S)\quad \begin{cases} L_1 = b_1 \\ \ldots\ldots \\ L_m = b_m. \end{cases}$$

A condition que l'un au moins des coefficients des inconnues soit différent de o (au besoin après un changement de notations, on supposera que c'est a_{11}) l'application de la méthode de substitution remplace (S) par le système :

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ (S')\quad \begin{cases} L_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}L_1 = b_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_m - \dfrac{a_{m1}}{a_{11}}L_1 = b_m - \dfrac{a_{m1}}{a_{11}}b_1 \end{cases} \end{cases}$$

Toute solution de (S) est solution du second système où la première équation ne diffère que par l'écriture de l'équation $L_1 = b_1$, et toute solution de ce second système fournit en négligeant la valeur de x_1 une solution de (S'). Réciproquement, toute solution de (S'), portée dans la première équation du second système, fournit la valeur de x_1 qu'il suffit d'adjoindre à cette solution pour en avoir une du second système, donc de (S). En résumé : *aux solutions de* (S) *correspondent biunivoquement les solutions de* (S') *en « oubliant » x_1 ; en particulier, c'est ensemble que* (S) *et* (S') *ont une solution unique (l'hypothèse que tous les a_{ij} ne sont pas nuls étant alors évidemment réalisée).*

Supposons alors que (S) ait une solution unique pour un choix déterminé des a_{ij} et *quels que soient les seconds membres.* Les seconds membres étant arbitraires, on pourra en particulier faire b_1 égal à o et laisser les autres arbitraires. Les seconds

---

(1) Les a_{ij} et les b_j peuvent être des nombres réels ou, au gré du lecteur, pris dans un corps commutatif ; l'hypothèse de commutativité pouvant être levée facilement.

membres de (S') sont alors réduits à ces b_j arbitraires, et (S') a comme (S) une solution unique quels que soient ses seconds membres. Le raisonnement peut recommencer à partir de (S'), et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne, ou bien à *une équation* à p inconnues : $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_p x_p = \beta_p$ ou bien un système de q équations à *une inconnue :*

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 x = \beta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_q x = \beta_q \end{array}\right.$$

ayant, comme (S), une solution unique. Il est facile de s'assurer que, dans les deux cas, l'existence d'une solution unique pour tout choix des β, nécessite, soit $p = 1$, soit $q = 1$, ce qui implique $m = n$. En résumé : *un système d'équations linéaires ne peut avoir une solution unique, quels que soient les seconds membres, que si c'est un système carré.*

Remarque : Substantiellement, ce théorème est équivalent au théorème de la dimension pour les espaces vectoriels. En effet, on peut considérer les formules (S) comme définissant une transformation linéaire qui fait passer d'un vecteur

$$(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$$

de R^n à un vecteur bien déterminé $(b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots\ldots b_m)$ de R^m. L'existence de la solution pour des b_j arbitraires signifie que tout R^m est obtenu ; l'unicité de la solution signifie que tout vecteur $(b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots b_m)$ de R^m est le transformé d'un vecteur unique de R^n autrement dit, que la transformation est biunivoque. Le théorème exprime alors qu'il ne peut y avoir de transformations linéaires *biunivoques* d'un espage R^n *sur* un espace R^m que si les deux espaces sont de même dimension. On peut alors dire qu'un espace vectoriel réel est de dimension n s'il admet une transformation linéaire biunivoque sur R^n.

Montrons maintenant que pour tout système carré, l'existence de la solution unique est indépendante des seconds membres.

Soit un système (S) *qui pour un certain choix des* b_j a une solution unique. Le procédé décrit plus haut amène à l'équation $ax = b$ qui a, comme (S) une solution unique, donc a n'est pas nul. Mais un autre choix des seconds membres de (S) ne modifie pas a qui ne dépend que des a_{ij}, donc, a demeurant différent de 0 ; l'équation $ax = b$ a encore une solution unique et (S) aussi. Si le choix des b_j fait dans l'hypothèse est (0, 0, ... 0) le résultat s'exprime sous la forme classique : *pour qu'un système linéaire carré ait une solution unique, il faut et il suffit que le système homogène associé ait une solution unique.*

Remarque : Le coefficient a, d'où dépend l'unicité de la solution du système, n'est autre, naturellement, que le déterminant du système divisé par certains coefficients. On pourrait, à partir de cette remarque, édifier la théorie des déterminants.

Mlle VERVAECKE (*Lille*).

Nous remercions Mlle VERVAECKE d'avoir bien voulu rédiger ce résumé d'un exposé fait à Lille, dans le cadre des activités de la Régionale, la plus active avec celle de Nancy. M. R. DESCOMBES nous écrivait, il y a quelque temps :

« Je suis tout à fait convaincu de la nécessité d'une liaison étroite entre tous les ordres d'enseignement. J'espère que le Séminaire organisé à Lille depuis deux ans ne décevra pas cette année les collègues de l'Enseignement Secondaire qui nous fait l'honneur d'y venir assidûment ; ces contacts sont en tout cas très précieux aux professeurs de la Faculté. »

Ajoutons que le plus vif désir du Bureau est que de tels liens s'établissent dans toutes les Académies, pour le plus grand profit de tous.