LE PREMIER CAS D'ÉGALITÉ MÉCONNU

On désigne souvent par le n° 1 le cas d'égalité de deux triangles ABC, A'B'C', satisfaisant aux conditions suivantes :

côté B'C' = côté BC angle B' = angle B angle C' = angle C

(les angles égaux sont adjacents au côté égal).

La coutume est de passer sous silence le cas où les données seraient :

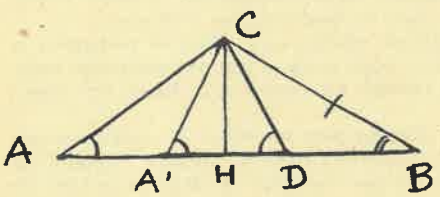
côté B'C' = côté BC angle A' = angle A angle B' = angle B

(un des angles est opposé au côté égal).

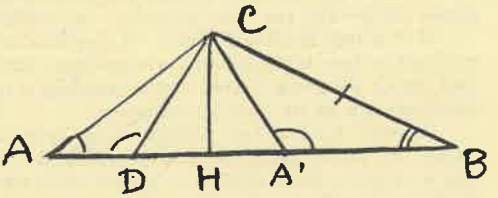
On attend de connaître, ou d'admettre A + B + C = 2 droits, pour ramener au cas n° 1.

Pourtant, il est possible de démontrer le cas méconnu, sans utiliser le postulat d'Euclide.

Voici une démontration :



(1)



(2)

Le triangle A'B'C' est placé de façon que B'C' soit sur BC, les angles B et B' étant superposés. Le point A' est donc un point de la demi-droite BA. Menons la hauteur CH. Soit D le symétrique de A' par rapport à CH. Les fig. 1 et 2 sont à rectifier au cours du raisonnement.

— Dans le cas de la fig. 1, les points A et A' sont d'un même côté de H, A et D seront de part et d'autre de H.

Le triangle CA'D est isocèle par construction. Donc angle A' = angle D.

Le triangle CAD est isocèle parce que ses angles à la base A et D sont égaux.

Les triangles CA'D et CAD possèdent en commun la hauteur *axc* de symétrie CH.

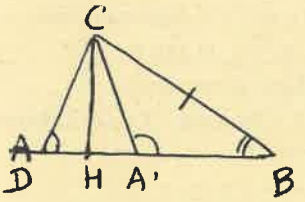
On en déduit que HA' = HA (= HD), donc les points A et A' sont confondus.

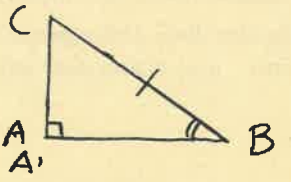
— Dans le cas de la fig. 2, les points A et A' sont de part et d'autre de H ; D est donc du même côté que A.

Le triangle CA'D est isocèle par construction, donc ses angles à la base A' et D sont égaux.

Le triangle CAD est isocèle parce que ses angles à la base A et D, intérieurs ou extérieurs, selon le cas de figure, sont égaux.

Les triangles CA'D et CAD possèdent en commun la hauteur-axe de symétrie CH. Par suite HD = HA (= HA').





Le point D est confondu avec A. Mais alors les angles en A', supplémentaires, et égaux à A sont droits et cela impose que A, D et A' soient confondus avec H. Autrement dit, on trouve ici le cas des triangles rectangles, égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.

En récapitulant les résultats dans un énoncé traditionnel, mais contenant le cas méconnu :

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal et deux angles respectivement égaux, pareillement placés.

H. Mas (*Janson*).

Je remercie mon collègue et ami Mas d'avoir rédigé cette note sur l'enseignement élémentaire de la géométrie. Il est intéressant de savoir qu'un théorème qui vient ordinairement après la théorie des parallèles est en réalité indépendant du postulat d'Euclide.

Il sera bon que Mas précise comment il démontre qu'un triangle qui a deux angles égaux est isocèle, car cette propriété est utilisée dans la démonstration ci-dessus.

Il y a une dizaine d'années, la question analogue, relative aux triangles rectangles, a été étudiée dans le *Bulletin*. Notre collègue Hémery avait proposé une démonstration reposant sur ce théorème : Tout angle extérieur à un triangle est supérieur à chacun des angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.

A cette occasion, un collègue avait écrit au Bureau pour exprimer sa conviction que c'était une honte nationale que de traiter de telles questions dans le *Bulletin*. Aujourd'hui que le *Bulletin* passe pour trop savant, nous espérons que l'initiative de Mas va susciter de nombreux émules... (A. H.).