SUR L'UNICITÉ DE LA RÉDUCTION D'UN DÉPLACEMENT A UN DÉPLACEMENT HÉLICOIDAL

Un déplacement D est déterminé par trois points A, B, C, et par leurs homologues A', B', C' formant un triangle A'B'C' égal au triangle ABC.

On sait que si A et A' coïncident, D est une rotation autour d'un axe contenant A. Si A et A' sont distincts, on peut remplacer D par le produit de la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ et d'une rotation dont l'axe contient A'. Un tel produit est facilement réductible à une rotation ou à un déplacement hélicoïdal.

Tout déplacement D est donc l'une des transformations suivantes : translation, rotation, déplacement hélicoïdal.

Bien entendu, cette réduction peut aussi se faire à partir du point B ou de tout autre point M de l'espace. Pour cette raison, il convient de se demander si les divers procédés possibles conduisent à la même forme réduite.

⁂

Je conviens d'écrire $T = T'$ pour exprimer que les transformations ponctuelles univoques T et T' réalisent la même application de l'espace sur lui-même.

De telles relations entre éléments de l'ensemble des transformations ponctuelles sont évidemment des relations d'équivalence. En particulier, elles sont *transitives*.

Les déplacements forment un groupe relativement à leur produit. Chaque élément de cet ensemble est donc *régulier*. Par suite, d'une relation telle que

$$DD' = DD''$$

on déduira

$$D' = D''.$$

Cela est d'ailleurs valable pour toute transformation biunivoque D.

⁂

Dans la démonstration qui suit, j'assimile la translation de vecteur $\vec{V}$ au déplacement hélicoïdal $H(\vec{\Delta}, O, \vec{V})$, $(\vec{\Delta})$ désignant le support de $\vec{V}$. J'assimile également la rotation d'axe $(\vec{\Delta})$ et d'angle θ au déplacement hélicoïdal $H(\vec{\Delta}, \theta, O)$.

Considérons une relation telle que

$$H(\vec{\Delta}, \theta, \vec{V}) = H(\vec{\Delta}', \theta', \vec{V}')$$

portant sur deux formes réduites d'un même déplacement D.

Soit (X) une droite perpendiculaire aux deux droites (Δ) et (Δ'). Les déplacements hélicoïdaux $H\left(\overrightarrow{\Delta}, \frac{\theta}{2}, \frac{\overrightarrow{V}}{2}\right)$ et $H\left(\overrightarrow{\Delta'}, \frac{\theta'}{2}, \frac{\overrightarrow{V'}}{2}\right)$ transforment (X) respectivement en (Y) et (Y'). Je représente par X, Y, Y' les symétries relatives aux droites (X), (Y), (Y').

On sait que

$$XY = H(\overrightarrow{\Delta}, \theta, \overrightarrow{V}),$$

$$XY' = H(\overrightarrow{\Delta'}, \theta', \overrightarrow{V'}),$$

ce qui entraîne, puisque la relation d'équivalence est transitive,

$$XY = XY'.$$

Or, X est un élément régulier de l'ensemble des déplacements. Il est donc permis d'écrire

$$Y = Y'.$$

Cette relation impose la coïncidence des droites (Y) et (Y'). Elle rend ainsi évidente l'identité des deux déplacements hélicoïdaux $H(\overrightarrow{\Delta}, \theta, \overrightarrow{V})$, $H(\overrightarrow{\Delta'}, \theta', \overrightarrow{V'})$.

Ainsi : *tout déplacement admet une forme réduite et une seule.*

E. Anglade (*Lycée Lakanal*).