EXEMPLE DE PROBLÈME A MOTIF TECHNIQUE

LE PONT SUSPENDU

Cours : algèbre de Seconde, troisième trimestre ; fonction $y = ax^2$ et problèmes graphiques.

Genre d'exercice : problème d'application traité par le professeur, avec participation de la classe (si possible en travaux pratiques). Durée : demi-heure.

Problème. — Le tablier d'un pont est schématisé par une droite horizontale $x'x$ (fig. 1). Sur celle-ci on prend des points uniformément espacés, où l'on élève les verticales. Ces dernières schématisent des fils se rattachant à un fil polygonal $A_1A_2A_3$... Déterminer ce contour de façon que le poids du tablier soit uniformément supporté par les fils verticaux.

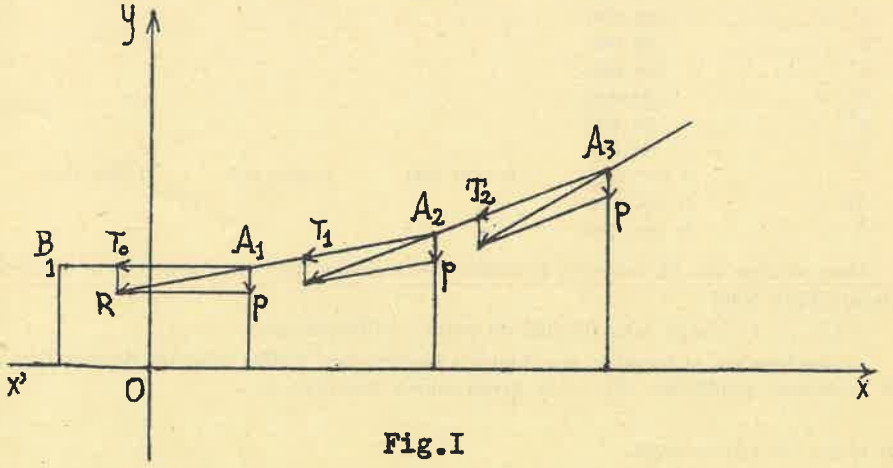


Fig.I

Solution. — 1) Etude statique. Partons de deux points consécutifs A_1 et B_1 à même hauteur. A_1 est soumis à une force T_0, ainsi qu'à une partie p du poids du tablier. Les deux forces se composent selon R. Le fil A_1A_2 doit avoir la direction R (il est donc déterminé). La force R se retrouve en A_2, où l'on peut l'appeler T_1. Le point A_2 est à son tour soumis à T_1 et à un poids p. En composant ces deux forces, on obtient la direction du fil A_2A_3, ainsi que la force T_2 agissant en A_3, etc... Notons que les directions successives peuvent s'obtenir sur une même construction (fig. 2).

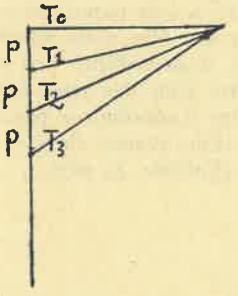


FIG. 2

2) Etude algébrique. Le contour polygonal est déterminé ; cherchons plus précisément les coordonnées des points A_1, A_2, A_3, etc... Prenons $x'x$ pour axe des abscisse, et la médiatrice de A_1B_1 pour axe des coordonnées $y'Oy$. Considérons alors un point quelconque A_n du contour.

1° Abscisse : Soit l la distance de deux verticales consécutives : on trouve immédiatement :

$$x_1 = l/2,$$
$$x_2 = l/2 + l,$$
$$x_3 = l/2 + 2l,$$
$$x_n = l/2 + (n-1)l,$$

ou encore : $$x_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)l.$$

2° Ordonnée : Par similitude :

$$\frac{y_2 - y_1}{l} = \frac{p}{T_0} \text{ d'où } y_2 - y_1 = \frac{p}{T_0}l.$$

De même :

$$y_3 - y_2 = \frac{2p}{T_0}l,\ y_4 - y_3 = \frac{3p}{T_0}l, \text{ etc... (fig. 2).}$$

Posons $\frac{p}{T_0} = k$; on peut écrire :

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= kl, \\ y_3 - y_2 &= 2kl, \\ y_4 - y_3 &= 3kl, \\ y_n - y_{n-1} &= (n-1)kl. \end{aligned}$$

Par addition membre à membre, il vient, après simplification :

$$y_n - y_1 = [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)]kl.$$

On connaît la somme $1 + 2 + 3 + \ldots + N = \frac{N(N+1)}{2}$; ici on a $N = n - 1$, d'où :

$$y_n = \frac{n(n-1)}{2}kl + y_1.$$

3° Courbe : Il est intéressant d'éliminer le paramètre n entre x_n et y_n (question classique) ; on trouvera une courbe contenant tous les points A.

On a aisément :

$$n = \frac{x_n}{l} + \frac{1}{2}$$

d'où en transportant dans y_n :

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_n}{l} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x_n}{l} - \frac{1}{2}\right)kl + y_1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_n^2}{l^2} - \frac{1}{4}\right)kl + y_1 \\ &= \frac{k}{2l}x_n^2 + y_1 - \frac{kl}{8} \end{aligned}$$

de la forme : $$y = ax^2 + b.$$

La courbe est donc une parabole.

Compléments pratiques. — Les ponts suspendus sont des ouvrages très répandus de par leur légèreté (relative). Les élèves peuvent donc vérifier « dans la nature » le résultat précédent (allure parabolique du contour).

En classe, on peut déjà montrer une vue.

Un exemple d'actualité : le pont de Tancarville, sur l'estuaire de la Seine, encore en construction. Ce sera l'un des plus grands d'Europe.

Signaler d'ailleurs que le pont suspendu est une invention française, du siècle dernier, répandue dans le monde entier.

C. Delapierre,
Ecole militaire préparatoire, Les Andelys (Eure).