SUR LES PROBLÈMES

En guise de préambule.

« Un homme aimait l'horticulture. Il soignait ses boutures avec amour, plus d'amour peut-être que de compétence. Il voulait leur assurer les meilleures conditions de développement : terreau bien préparé, arrosage soigneusement dosé. Ses réussites l'encourageaient. L'une d'elles surtout : jamais personne n'avait obtenu en pot une plante aussi magnifique, au feuillage si feuillu. Pour ce spécimen, notre ami des plantes avait su créer « un paradis ». La plante n'étendait ses racines que pour le plaisir de se ramifier dans un terreau aussi douillettement nourrissant. Jamais il ne lui serait venu à l'esprit (car cette plante avait une petite tête) qu'une lutte pour l'existence — « struggle for life », comme disent les sequoias américains — pût être nécessaire et qu'elle se traduisît, à tous les niveaux de la matière vivante, par le souci primordial de la reproduction de l'espèce.

« Tant et si bien que cette belle plante, si forte, si vigoureuse, si prometteuse enfin, n'eût jamais la moindre fleur, la moindre promesse de fruit... »

⁂

On peut aussi se demander si les exercices et problèmes qui sont posés aux élèves, et que des élèves expérimentés traitent fort bien, sont justement ce qu'il faut offrir à l'esprit des écoliers et des étudiants pour que demain, ou après-demain, ces jeunes gens soient aptes à se poser comme il faut les vrais problèmes que la vie leur proposera, sous une forme évidemment moins élaborée que dans les cours de Mathématiques.

I. Sur les problèmes qui ne sont que des exercices plus ou moins bien posés.

On conçoit mal un enseignement des Mathématiques qui ne soit pas accompagné d'exercices. Cela ne se voit que dans les traités : « Les principes de géométrie analytique » de Darboux ne contiennent aucun exercice (le livre se termine cependant par l'énoncé d'un problème : Trouver toutes les transformations de l'espace cayleyen qui conservent les angles ; ce n'est pas un exercice, mais un vrai problème).

La présence d'exercices dans un livre n'est pas, cependant, une preuve qu'il sera plus facile à lire : pas d'exercices dans Darboux, des exercices dans Bourbaki. Mais si un ouvrage contient des exercices, cela signifie que l'auteur a le souci d'être compris et d'entraîner ses lecteurs à sa suite : les « Eléments d'algèbre moderne », de Lentin et Rivaud, sont riches de bons exercices ; l' « Introduction à l'algèbre et l'analyse moderne », de Zamansky, souffre de cette complète absence d'exercices en un domaine où le lecteur moyen a justement besoin de beaucoup s'exercer.

Au niveau élémentaire, on ne conçoit pas un enseignement des Mathématiques sans exercices d'application et d'entraînement. On va même parfois jusqu'à concevoir un enseignement qui n'est qu'un entraînement aux problèmes d'examens : faire des problèmes d'entrée en Sixième, faire des problèmes de B.E.P.C., faire des problèmes de baccalauréat. Combien d'entreprises, par cette caricature d'enseignement, ont perverti la jeunesse de cette façon qui plaît aux familles (on fait des problèmes pour être reçu aux concours, on passe des concours pour avoir une situation, il faut avoir une situation pour fonder une famille, il faut fonder une famille pour avoir des enfants, il faut que les enfants fassent des problèmes pour passer des examens et des concours, etc...).

La défense des droits de l'enfant et de l'avenir de la science nous impose de penser sérieusement à la réforme profonde des examens qui ont actuellement le pas

sur l'enseignement. Alors que les examens ne devraient pas avoir dans l'enseignement plus de place que celle du thermomètre médical dans l'ensemble de la science médicale.

Il est facile de critiquer les problèmes tels qu'ils sont généralement posés. La preuve : lorsque, dans l'A.P.M., on entreprend de critiquer des problèmes d'examen, il y a plus de contributions que pour n'importe quel autre travail, y compris celui de proposer des bons énoncés.

On hésite entre le « problème de recherche », qui doit développer l'intuition, le sens de la découverte, mais qui présente aussi de réelles difficultés, et le problème-type qui n'est que la vérification de l'acquisition de quelques bons trucs qui réussissent dans les cas favorables (ceux qui ne se réalisent jamais !).

Pour aplanir certaines difficultés de la recherche, on peut suggérer un procédé : A et A' étant sur Ox, B et B' sur Oy, Ox et Oy perpendiculaires, OA $<$ OA' et OB $>$ OB', on demande de démontrer AB $<$ A'B' ; on suggère de construire une longueur intermédiaire (mais c'est justement cette construction qui est le véritable sujet de ce problème des obliques).

De même, pour le problème du trajet AMB minimum, A et B étant d'un même côté de la droite D sur laquelle il faut placer M, on suggère de construire B' symétrique de B par rapport à D, ce qui est le véritable problème (1).

Les problèmes-types n'ont plus à être critiqués ; la relation $a\,(bc + d) = e$ fournit cinq problèmes : ayant quatre lettres, trouver la cinquième.

Citons quelques exemples précis, tirés d'un manuel de Sixième, qui n'est plus en usage depuis de longues années (mais qui n'en est pas moins représentatif d'un mode de présentation des problèmes encore très fréquent). Dans la préface, on peut lire :

« L'enseignement des Mathématiques doit contribuer à la culture de l'esprit des enfants en leur donnant le goût du travail bien fait, le sentiment de l'ordre et de l'harmonie, et en développant largement leur esprit critique sans lequel il n'est pas de vraie culture. »

On notera que ces intentions, aussi excellentes qu'elles soient, ne mentionnent pas le développement du goût de la recherche, non plus que le sens de la découverte. Voyons comment l'esprit critique des élèves est invité à s'exercer.

Exemple 1. — Un propriétaire a acheté une propriété de 123 752 f. Il a dû faire des réparations pour 28 741 f ; il a revendu ensuite avec un gain net de 42 507 f. Quel a été le prix de vente ?

Passons sur ce détail de rédaction : un propriétaire achetant une propriété qui semble vouloir illustrer certaine thèse sur l'accumulation du capital. Ou sur l'invraisemblance des données au franc près. Examinons le fond : il est invraisemblable que le bénéfice ait été connu avant que le prix de vente ait été fixé ; une expérience même réduite des tractations immobilières en assurera les élèves. Si la rédaction est différente, c'est que l'exercice figure à la fin d'un chapitre sur l'addition. Il s'agit donc d'un exemple caractérisé d'un faux concret, du pire concret, le concret abstrait.

Exemple 2. — Pour construire un mur, on a utilisé 968 briques dont le volume de chacun est 2 530 cm^3. Quel est le volume du mur, le volume du mortier étant 1/50 du volume total du mur ?

Passons, là encore, sur la rédaction ; « dont le volume de chacun » est une

---

(1) A ce propos, signalons une anecdote vécue : il y a quelque temps, un élève m'a apporté, de la part de son père (polytechnicien), le dit problème, en ajoutant qu'il était extrêmement difficile, car il s'agissait de trouver, dans la famille d'ellipses de foyers A et B, celle qui est tangente à D. C'est cette solution que G. Polya présente comme naturelle dans son ouvrage « Les Mathématiques et le raisonnement plausible » (p. 98), mais qu'il écarte comme exigeant la connaissance des propriétés de l'ellipse. (A. H.).

inadvertance. Il est d'ailleurs bien curieux que ces briques soient connues par leur volume et non leurs dimensions. Mais comment a-t-on pu savoir, avant de construire le mur, que le mortier occuperait 1/50 de son volume ?

Exemple 3. — Quel est le volume d'une sphère pleine en fonte de 1 m de diamètre et quelle est sa masse, la densité étant de 7,72 ?

L'élève n'est-il pas en droit de répondre : Qu'on me la montre cette sphère, je n'y crois pas. D'ailleurs, si cette sphère existait, qu'en ferait-on ? (là est le problème...).

Ces exemples suffisent à montrer qu'il est facile d'inventer des énoncés absurdes, même s'ils semblent bien adaptés à un programme. On a inventé des situations invraisemblables, on en a embrouillé l'exposé et on demande à l'élève de démêler l'écheveau. Mais pour cela, il y a Scotland Yard et Agatha Christie.

II. Des nombreuses catégories de problèmes.

Il est facile et plus ou moins amusant de critiquer. Quel est le professeur qui a toujours posé des problèmes intelligents et bien adaptés ? Qui, d'ailleurs, a appris à le faire, sinon par l'expérience de l'enseignement ? Dans mon cas personnel, je suis certain d'avoir proposé beaucoup plus de mauvais problèmes que de bons, et je continue, avec seulement l'avantage de savoir que ce que je fais est insuffisant et qu'il faut chercher à faire « autrement ». Je donne donc ici le compte rendu décevant de mes essais.

Je suis persuadé qu'il faut d'abord bien distinguer les diverses catégories de problèmes classés d'après les buts que se propose le professeur :

1) Exercices pour... s'exercer : selon l'adage : « C'est en forgeant qu'on devient forgeron ; c'est en calculant... » On apprend ainsi $(a + b)$ $(a - b)$; ces exercices ne sont pas suffisants, car ils ne suppléent pas à une compréhension véritable des relations algébriques ; mais ils sont indispensables à un entraînement au calcul qui rendra ultérieurement service (il est ridicule de voir des garçons de 17 ans qui butent sur des obstacles de ce genre).

D'ailleurs, il doit y avoir un moyen de trouver des exercices d'entraînement qui prolongent l'acquisition des éléments et font entrevoir de plus vastes perspectives ; alors les exercices d'entraînement conduisent l'élève à la mise au point de fiches où un ensemble de connaissances se trouve résumé par l'élève lui-même (parti pour s'entraîner, il finit par acquérir une compréhension plus profonde).

2. *Problèmes de recherche.* — Conçus pour développer les dons d'intuition, le sens de la découverte ; il est souvent nécessaire de doser l'effort d'invention afin de ne décourager personne ; l'idéal serait d'adapter l'énoncé à l'élève. On peut aussi organiser une recherche collective ou par groupe de quelques unités. L'idéal est d'atteindre le grand problème, celui qui est ordonné autour d'une ou de plusieurs idées et de le terminer par des questions très générales qui permettent à l'élève qui a vraiment bien compris de s'engager à sa façon dans une recherche personnelle.

J'ai essayé en classe de donner des énoncés sans question. Les résultats ont été très décevants, mais je ne les crois pas probants. Les élèves étaient trop surpris à l'idée que s'il n'y avait pas de question, il fallait se poser les questions (élèves déformés par les traditions, réflexes conditionnés).

Ces mêmes traditions sont encore un obstacle à la libre recherche ; on demande s'il faut résoudre par l'arithmétique ou par l'algèbre. Et des élèves ne comprennent pas qu'on leur réponde qu'il faut trouver la solution, que c'est l'essentiel. Il est vrai que jusqu'à 1958, il y a eu un problème de géométrie à l'agrégation où il fallait ne se servir que des connaissances d'un élève de Mathématiques Elémentaires, même si cet effort empêchait de trouver la solution du problème (il est vrai que cet exemple ne prouve rien, puisqu'il est tiré d'un concours et que la formule du concours tourne

le dos à la pédagogie). En tout cas, rares sont les élèves qui avoueront franchement le recours à un modèle pour trouver un problème (alors que le recours à un modèle est la règle de la découverte en physique théorique). Ces contraintes artificielles sont le résidu d'une conception malheureusement non disparue de l'éducation où la contrainte joue un rôle primordial.

Il faut donc habituer les élèves à choisir librement leurs moyens de recherche. Guider vers la liberté et non guider vers des habitudes.

Ce qui ne signifie pas qu'on omet le respect des grands principes. Au contraire on y pense, et les élèves finissent par penser eux-mêmes que cette découverte aventureuse ne suffit pas ; qu'il faut organiser la victoire, c'est-à-dire mettre au point la démonstration, puis rédiger, faire une belle figure ou plusieurs ; présenter un travail qu'on puisse lire et comprendre.

Ainsi le problème de recherche conduit à un travail très complet et très formateur. Il est long, difficile à corriger (corriger la première version, en faire faire une seconde et ne s'arrêter que si le résultat est bon) ; la notation d'un tel travail me paraît complètement inutile (c'est déjà un premier moyen de faire perdre l'habitude aux gens qu'il faut donner des notes ; comme si on pouvait noter des travaux intellectuels... Si vous mettez 20 à la géométrie de Descartes, combien mettrez-vous à Bourbaki ? Mais si vous ne mettez pas 20 à Descartes, combien mettrez-vous au premier de votre classe ?).

J'oubliais : la démonstration, la rédaction, ne suffisent pas, après la découverte ; il faut aussi vérifier la validité des résultats, si possible trouver des applications du résultat théorique obtenu.

3) *Exercices de vérification.* — Conçus pour que le professeur vérifie que ses élèves ont compris, ont appris, savent se sortir de situations de plus en plus complexes. Problèmes de composition et d'examen. Ils doivent être conçus pour donner une mesure facile et numérique des connaissances des élèves. Les épreuves de baccalauréat actuelles ne répondent absolument pas à cela : trop grande place laissée au hasard de la découverte et aux difficultés particulières de rédaction. Un drame récent (un $\frac{\pi}{2}$ drame) au baccalauréat deuxième partie montre, en toute évidence, que certains examinateurs ne conçoivent pas l'épreuve d'examen comme une épreuve de mesure. Pour eux, c'est un concours et il est souhaitable que les esprits brillants y donnent leur mesure. Dans un examen, il est au contraire indispensable de n'éliminer que les insuffisants : quant aux esprits brillants, il y aura d'autres occasions dans la vie pour qu'ils fassent valoir leurs dons (ceci dans la mesure où on l'estime utile).

III. Quels sont les bons problèmes ?

Reste à traiter la question essentielle : existe-t-il de bons problèmes ? (bons, c'est-à-dire pédagogiquement utiles et satisfaisants du point de vue de la formation des étudiants).

Réponse positive assurée, car il y a de bons problèmes scientifiques, ceux qui ont fait progresser la découverte.

Exemple « a contrario » : les ignorants posent souvent la question : Y a-t-il des habitants sur Mars et Vénus ? Problème mal posé, disent les astronomes avertis, car il y a bien d'autres questions à résoudre avant celle-ci (cf. « Life in other worlds », par Spencer Jones).

Exemple probant : les observations de Tycho Brahe, à une minute d'angle près, ont permis à Képler de découvrir le mouvement de Mars, alors qu'une plus grande précision des mesures l'aurait mis en présence des perturbations et lui aurait peut-être caché l'essentiel. Ayant les lois de Képler, on a pu trouver la loi de Newton, et c'est celle-ci qui fait prévoir les perturbations (travail de Clairaut sur le retour de la comète de Halley) ; on pourrait continuer...

Dans la classe, il est bon que le problème serve d'introduction à une théorie ; il faut qu'il soit bien choisi.

1° Reprenons l'exemple du problème du trajet minimum AMB, A et B situés d'un même côté de la droite D, M étant à placer sur D. En réalité, ce problème propose l'introduction de la symétrie. Autant partir de l'expérience même des deux bougies qui frappe les élèves. La loi de Descartes motive l'étude de la symétrie. Sans doute un élève aura-t-il l'idée d'étudier le système de deux miroirs et l'on fera des produits de symétries. Autre avantage : l'expérience est dans l'espace et nous apprenons à nous ramener au problème plan.

2° A un niveau plus élevé, on peut citer le problème de Molyneux formulé par Leibniz, comme introduction à l'esprit de l'axiomatique : « A cette occasion, je vous proposerai un problème que le savant M. Molyneux, qui emploie si utilement son beau génie à l'avancement des sciences, a communiqué à l'illustre M. Locke. Voici à peu près ses termes : Supposez un aveugle de naissance, qui soit présentement homme fait, auquel on ait appris à distinguer par l'attouchement un cube d'un globe de même métal et à peu près de la même grosseur. Supposez... que cet aveugle vienne à jouir de la vue. On demande si, en les voyant sans les toucher, il pourrait les discerner et dire quel est le cube et quel est le globe ? » (Leibniz, *Nouveaux essais*, II, 4).

Voici quelques exemples de problèmes essayés avec des élèves et ayant conduit à des développements intéressants :

1° (Classe de Quatrième, élèves de 13 ans) : Comment ranger le long du mur plusieurs cartons à dessin de tailles diverses ? Mettra-t-on le plus près de l'angle du mur le plus grand carton ? On finit par se poser le problème général de la variation du segment qui joint A sur Ox et B sur Oy, côtés de l'angle droit (et l'énoncé déjà cité n'a plus besoin du coup de pouce indiqué plus haut).

2° Présentation d'un film de Nicolet ; essai de compte rendu ; formuler le problème que l'on se pose sur ce film ; découvrir et démontrer ; faire un compte rendu complet, un « mémoire » sur la question.

Même plan à partir de la construction d'un modèle : élèves de 15 ans (Classe de Seconde) : Comment tracer le développement des pyramides carrées à construire pour obtenir avec six de ces pyramides le développement « en volume » d'un cube ; réaliser le modèle ; rédiger un mémoire sur tout ce qui a été fait.

Même plan pour la réalisation d'un cadran solaire par des élèves de Mathématiques Elémentaires ; discussion du projet ; réalisation ; compte rendu détaillé de la réalisation (ces deux derniers exemples sont en cours de réalisation, travail de vacances ; si je peux généraliser, la classe devrait s'enrichir d'archives où ces projets seront conservés).

3° Problèmes motivés par une situation réelle : exemple d'un problème de programmes linéaires proposé aux élèves de Seconde (énoncé qui m'a été directement inspiré par un travail de M. Huisman). Pour être tout à fait complet, il aurait fallu laisser les élèves rechercher les données (entre les données réelles et celles qui sont utilisables dans les calculs il y a une marge : travail d'élaboration des données).

Programme de fabrication. — Une usine fabrique deux types d'automobiles désignés par les lettres A et B. Fixer le programme de fabrication hebdomadaire de l'usine, c'est calculer le nombre x et y de chaque type de voiture à fabriquer durant la semaine. Le but recherché est de réaliser la production maximum, celle-ci étant évaluée en valeur marchande totale de la production (a et b étant les prix de vente unitaires des voitures A et B, la production totale en francs est donc $ax + by$).

Le prix de vente unitaire de chaque voiture est la somme de quatre éléments : valeur des matières premières (a' et b' resp.), valeur de la main-d'œuvre (a'' et b''), valeur des services de recherche et de vente (a''' et b''') et bénéfices éventuels.

La production de l'usine est assujettie aux conditions suivantes :

1° Les possibilités d'approvisionnement en matières premières limitent le total des dépenses hebdomadaires sur ce chapitre à la somme P ;

2° Les dépenses sur le chapitre main-d'œuvre, compte tenu des clauses de la convention collective de travail et du nombre d'ouvriers qualifiés disponibles, sont limitées hebdomadairement à la somme M ;

3° Les dépenses hebdomadaires sur le chapitre recherche et vente sont également limitées à la somme V.

Fixer effectivement le programme de fabrication hebdomadaire dans les quatre cas déterminés par les données numériques suivantes :

	1er cas	2e cas	3e cas	4e cas
a	850 000	725 000	850 000	700 000
b	700 000	825 000	700 000	700 000
a'	100 000			
b'	60 000			
a''	120 000			
b''	120 000			
a'''	70 000			
b'''	90 000			
P	6 000 000	6 000 000	7 500 000	6 000 000
M	9 000 000			
V	6 300 000			

Dans chaque cas on évaluera le bénéfice sur chaque type de voiture et le bénéfice hebdomadaire total.

N.-B. — 1° Usage recommandé du papier millimétrique.

2° Rechercher si possible des données numériques réelles pouvant donner lieu à des problèmes semblables dits « de programmes linéaires ».

EN GUISE DE CONCLUSION.

Sans doute possible, une place prédominante est attribuée à la solution des problèmes. Une activité essentielle est ainsi escamotée, aux dépens d'une compréhension profonde des problèmes. En cette occasion, comme à propos de toute la pédagogie des mathématiques on retrouve cette idée qu'il faut s'intéresser à toute l'activité de l'esprit et pas seulement à celle qui enchaîne déductivement les théorèmes.

Non pas contraindre l'élève, les élèves, à l'activité mathématisante, mais les mettre en présence de situations qui les conduiront presque nécessairement à cette activité. Sans que ceci doive nous conduire à une religion de l'activité, et j'aimerais assez donner à cette note, en conclusion discordante, cette réflexion d'André Gide :

« Vous voulez forcer les gens à agir parce que vous avez horreur du stagnant ; les forcer à agir sans considérer que plus vous intervenez, avant leurs actes, moins ces actes dépendent d'eux. Votre responsabilité s'en augmente ; la leur en est d'autant diminuée. Or la responsabilité seule des actes fait pour chacun leur importance, et leur apparence n'est rien. Vous n'apprendrez pas à vouloir : *velle non discitur ;* simplement vous influencez ; la belle avance alors si vous pouvez à la fin procréer quelques actions sans valeur ! » (*Paludes*, p. 103).

G. W.