CONCOURS DE FONTENAY 1958

Rapport sur la 1re composition de Mathématiques (Option Mathématiques)

Répartition des notes des 108 copies corrigées et cotées de 0 a 60

Les notes correspondant à la valeur intrinsèque des compositions se répartissent entre 0 et 56 de façon régulière, sauf deux zones d'accumulation : quinze notes entre 25 et 30, trente-trois notes entre 12 et 19.

Ces notes primitives ont été légèrement relevées de façon à avoir 40 copies au-dessus de la moyenne ; ceci a conduit à attribuer la note 60 à la meilleure copie.

Voici la répartition des notes définitives :

neuf notes entre 50 et 60, douze entre 39 et 47, dix-neuf entre 30 et 36, dix-huit entre 23 et 27, quatorze entre 17 et 20, dix-neuf entre 13 et 16, onze entre 7 et 10, cinq entre 4 et 6, une note 1.

Observations générales

Le problème proposé était un problème très classique d'analyse, comportant l'étude de fonctions, l'étude d'une suite, et un petit calcul d'aire.

Aucune question ne présentait de difficultés au départ, de sorte que la grande majorité des candidates a pu les aborder toutes, et une bonne moitié d'entre elles a raisonné correctement. Les résultats de l'épreuve sont supérieurs à tous ceux des dernières années.

Il faut tout de même noter qu'un trop grand nombre de candidates (espérons que ce sont celles qui n'ont qu'un an de préparation) ignorent ou ont mal compris leur cours d'analyse et les propriétés fondamentales des fonctions exponentielle et logarithmique. Beaucoup d'entre elles croient que leurs démonstrations d'analyse paraîtront d'autant plus rigoureuses qu'elles seront plus longues, qu'elles introduiront un nombre impressionnant de « ε » et une imposante suite d'inégalités.

La définition même d'infiniment petits ou grands équivalents n'est pas sue. On ignore que, pour étudier une somme d'infiniment grands, le premier soin doit être de rechercher s'il n'existe pas un terme de la somme, d'ordre supérieur à tous les autres. Aussi, dans beaucoup de copies, on propose comme équivalent le plus simple d'une fonction pour x tendant vers $-\infty$, l'expression $e^{-x} + \operatorname{Log}|x|$; on n'ose pas remplacer $\operatorname{Log}|1+x|$ par $\operatorname{Log}|x|$ pour les grandes valeurs de x (par contre certaines confondent avec le cas où x tend vers zéro et décrètent que $\operatorname{Log}(1+x)$ est équivalent à x). Faute plus grave, on se figure qu'un infiniment grand équivalent fournit un infiniment grand asymptote. On ne comprend pas que la connaissance des infiniments grands équivalents donnait tous les renseignements pour les directions asymptotiques et on recommence, à quelques lignes d'intervalle, les mêmes calculs et raisonnements en partant, cette fois-ci, de la traditionnelle limite de $\frac{y}{x}$.

L'origine de la plupart des autres erreurs fut l'abus des résolutions graphiques des équations, en particulier pour trouver les zéros des dérivées première et seconde. Dans le cas du problème on peut ne jamais les utiliser. Les candidates doivent savoir que dans un très grand nombre de figures, on ne peut pas conclure, car le nombre de points communs aux courbes tracées reste ambigu. C'est en particulier le cas pour

(1) Voir les énoncés *Bulletin 193*, page 467.

deux branches paraboliques de même direction asymptotique ou deux arcs de courbe ayant même asymptote ; beaucoup croient que l'étude précise de la disposition des arcs à l'infini permet de conclure pour les parties à distance finie.

La méthode graphique devient en général correcte si l'une des courbes est une droite ; quelques candidates ont su l'utiliser, tandis que les autres mettent une équation sous la forme $f(x) = g(x)$ sans y apporter la moindre réflexion. Par exemple, pour trouver les zéros de $y' = \frac{1}{1+x} - e^{-x}$ elles écrivent $e^{-x} = \frac{1}{x+1}$ au lieu de $e^{x} = 1 + x$!!!

Méthodes et résultats sont encore plus pitoyables avec la dérivée seconde qui s'annule pour $e^{-x} = \frac{1}{(1+x)^2}$; on pouvait écrire $(1+x)^2 = e^{x}$, mais le tracé des courbes ne permettait pas de conclure ; certaines ont pensé à prendre les logarithmes, ce qui leur donne $\mathrm{Log}\,(1+x) = \frac{x}{2}$ et un graphique permettant de conclure avec précision.

Dans le cas du problème, toutes ces méthodes graphiques longues et imprécises sont évitables. Par exemple, dans la partie II, un peu plus délicate par suite de l'introduction d'un paramètre λ, la dérivée seconde est du signe de

$$u = e^{-\lambda x}\,(1+x)^2 - \frac{1}{\lambda^2}$$

il suffit de calculer $u' = e^{-\lambda x}(1+x)\,[2 - \lambda\,(1+x)]$ pour avoir en évidence dans le tableau de variations de u, le signe de cette expression.

Remarques particulières relatives aux diverses parties du problème

1° du § I. — Un trop grand nombre de candidates ignorent encore la dérivée de $\mathrm{Log}\,|1+x|$ et distinguent deux cas en écrivant $\frac{1}{1+x}$ ou $\frac{1}{|1+x|}$; chose curieuse, en dérivant à nouveau, ε disparaît ???

On apporte peu de soin à la mise en place de la courbe représentative, on ne compare pas la position du point de rencontre avec Ox (autre que O), et du point d'inflexion de cette branche ; les pentes des tangentes d'inflexion sont tellement inexactes que les candidates introduisent de nouveaux points d'inflexion sans même s'en apercevoir.

2° du § I. — L'énoncé guidant les candidates de façon précise, l'étude de la suite a été satisfaisante dans beaucoup de copies. On relève toutefois un lot important de maladresses ou fautes de raisonnement.

Pour démontrer que $1 - u_{2p+1} < u_{2p} - 1$ et $u_{2p+2} - 1 > 1 - u_{2p+1}$ on recommence inutilement deux fois le même raisonnement ou bien l'on fait inutilement deux figures, sans s'apercevoir que l'une des inégalités est une conséquence immédiate de l'autre, ou que toutes les deux reviennent à comparer e^{x} et $1+x$. A signaler une énormité rencontrée trop souvent : de $u_{2p} > 1$ et $1 > u_{2p+1}$ on tire $u_{2p} - 1 > 1 - u_{2p+1}$.

Pour démontrer que les deux suites u_{2p} et u_{2p+1} sont adjacentes, c'est-à-dire que $u_{2p} - e^{1-u_{2p}}$ peut être rendu arbitrairement petit, on pose $u_{2p} = 1 + h$, et on décrète que h peut devenir aussi petit que l'on veut, sans s'apercevoir que cela revient à admettre que la limite de u^{2p} est 1, résultat que l'on s'efforce justement de démontrer.

D'autres candidates, pour démontrer que les deux limites L et L' sont égales, se contentent de voir qu'elles sont solutions de la même équation, comme si une équation n'avait jamais qu'une seule solution !!!

1° et 2° du § II. — La discussion demandée n'exige que soin et méthode ; la plupart des candidates ont cru malheureusement justifier leurs résultats par des procédés graphiques qui ne le permettent pas.

On oublie d'examiner les cas limites souvent bien utiles. De même, il aurait été intéressant d'étudier la fonction à l'origine, de faire un développement limité, de voir ainsi le cas où l'origine est un point inflexionnel et de vérifier ainsi des résultats de la discussion générale. Trop peu pensent à voir comment se placent les courbes les unes par rapport aux autres, et quels sont leurs seuls points communs possibles.

3° du § II. — Il est abusif de donner la primitive de $(1 + x)\ \mathrm{Log}\,(1 + x)$ comme si cela était un résultat bien connu qu'il est inutile de justifier. Par contre, on peut savoir que $(x + 1)\ \mathrm{Log}\,(1 + x)$ tend vers 0 quand x tend vers (-1) et ne pas le justifier maladroitement tout le long d'une demi-page. Il n'est pas nécessaire d'utiliser les développements limités pour démontrer la continuité de $\dfrac{e^{\lambda} - 1}{\lambda}$ pour $\lambda = 0$.

A. Perrichet.

Rapport sur la composition de Mathématiques (Option sciences naturelles)

Répartition des notes des 88 copies corrigées et cotées de 0 a 40

Cinq notes entre 30 et 37, dix-neuf entre 25 et 28, vingt-trois entre 20 et 24, treize entre 17 et 19, neuf entre 14 et 16, huit entre 10 et 13, six entre 7 et 9, cinq entre 3 et 6.

Les notes correspondent ici à la valeur intrinsèque des compositions, et les résultats sont nettement supérieurs à ceux des années précédentes, puisque plus de la moitié des candidates ont une note supérieure à la moyenne.

Observations générales

Le problème assez facile et ne demandant qu'une bonne utilisation des connaissances du cours explique ces résultats satisfaisants.

1) La maladresse habituelle des calculs est moins sensible que les autres années, du moins dans les trois premières parties du problème où il était difficile de les compliquer outre mesure. Elle réapparaît dans la quatrième partie, où l'on demande un développement limité, les candidates n'ont pas su éviter une division assez pénible, oubliant d'employer les exposants négatifs et de remplacer $\dfrac{1}{(1 + \varepsilon)^k}$ par $(1 + \varepsilon)^{-k}$. A ce propos, que d'écritures inutiles, de calculs mal disposés et presque toujours faux ; comme par hasard on trouve exactement les coefficients indiqués dans l'énoncé (même si les expressions écrites ne permettent pas de les justifier), alors que tous les suivants sont inexacts.

2) La rigueur de l'exposé n'est pas suffisante dans beaucoup de copies. On se contente d'affirmer certains résultats au lieu de les justifier, ce qui est inadmissible, même si les conclusions paraissent simples ou immédiates ; en particulier un tableau de variations est un résumé, mais il ne peut servir de justification. D'autres fois, on trouve des explications pour des cas où elles ne sont pas nécessaires ; par exemple, dans l'étude de l'expression $\dfrac{\mathrm{Log}\,x - x}{x}$ pour x tendant vers zéro, on commence par dire que $\dfrac{\mathrm{Log}\,x}{x}$ est une forme indéterminée !!!, puis on invoque le fameux précepte : « Le nombre l'emporte sur le logarithme » pour conclure que la limite est infinie.

Il faut noter aussi l'abus des résolutions graphiques qui, très souvent, ne peuvent être rigoureuses ; on oublie qu'une dérivation peut débarrasser une équation d'un logarithme gênant. Pour une des fonctions du problème le signe de la dérivée est celui de $2(1-x) - \operatorname{Log} x$. En l'écrivant $2(1-x) + (-\log x)$, on voit que pour $x < 1$ on a une somme de deux termes positifs et que pour $x > 1$ on a une somme de deux termes négatifs ; une simple observation de bon sens évite donc ici des constructions graphiques ou des calculs, et montre que $x = 1$ est le seul zéro de la dérivée, résultat non vu dans un très grand nombre de copies.

OBSERVATIONS PARTICULIÈRES CONCERNANT LES DIVERSES PARTIES DU PROBLÈME

1re partie. — La faute grave la plus courante est l'oubli de la constante d'intégration ; parmi les candidates qui introduisent cette constante beaucoup omettent de la déterminer pour que la courbe intégrale passe par le point A de coordonnées 1 et — 1.

Beaucoup ne semblent pas à l'aise dans le maniement des fonctions exponentielle et logarithmique; on ne reconnaît pas la fonction puissance dans $e^{-K \operatorname{Log}|x|}$; on écrit $-K \operatorname{Log}|x| = \operatorname{Log} \sqrt[k]{\frac{1}{|x|}}$.

2e Partie. — La plupart des candidates sont bien entraînées à l'étude d'une variation de fonctions et à la construction de la courbe représentative. Toutefois, l'étude des branches infinies est souvent incomplète ou incorrecte. Après avoir trouvé que y tend vers $-\infty$ quand $x \to 0$, on cherche la direction asymptotique pour $x \to 0$?? Par contre, on oublie de chercher cette direction asymptotique quand $x \to +\infty$, ou bien on refait dans ce but une suite de calculs bien inutiles ; en effet, l'expression de la fonction donnait $y + \sqrt{x} = \frac{\operatorname{Log}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, donc $y + \sqrt{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$ et par suite la demi-parabole $y = -\sqrt{x}$ est un arc de courbe asymptote pour la courbe étudiée.

Une faute grave a été commise dans le calcul de la dérivée seconde pour la fonction correspondant à $K = \frac{1}{2}$. Pour éviter les radicaux, certaines candidates posent $x = u^2$. Pour le sens de variation on peut utiliser y'_u puisque $y'_x = y'_u \times u_x$ (avec u'_x positif), mais on ne peut obtenir les points d'inflexion en cherchant les zéros de y''_{u^2} !!!

On n'apporte pas toujours assez de soin à la construction des courbes ; on oublie en particulier qu'elles passent par le point A (1, — 1) et on ne place pas les points d'inflexion avec assez de précision.

3e Partie. — Pour le calcul d'aire, il est vraiment peu habile de prendre $\int x\,dy$ ou $\frac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx)$ alors que l'on a une expression simple de y en fonction de x.

4e Partie. — Pour le développement, il fallait éviter la division et faire le produit du développement de $K \operatorname{Log}(1+\varepsilon) - (1+\varepsilon)$ par celui de $(1+\varepsilon)^{-k}$.

Il est nécessaire d'aller jusqu'au terme en ε^4 inclus, si l'on veut vraiment placer la parabole par rapport à la courbe dans le cas où le coefficient de ε^3 est nul ; il faut en effet s'assurer que celui de ε^4 ne s'annule pas en même temps que celui de ε^3.

Beaucoup de candidates ne savent pas utiliser le développement limité pour dégager la parabole osculatrice et la placer par rapport à la courbe.

A. PERRICHET.