V. DOCUMENTS OFFICIELS

Rapport sur la composition de Mathématiques (classe de Mathématiques) au Concours général des Lycées, Collèges et Écoles normales en 1958 (1)

I. Les données sont :

un cercle (C) de plan (Q), de centre O, de rayon a, d'axe Oz ;

un point H intérieur au cercle (C). Le diamètre passant par OH est orienté selon l'axe $x'Ox$ et l'abscisse $\overline{OH}$ de H sur $x'x$ est désignée par l $(-a < l < a)$;

un angle (aigu ou droit) θ ;

une longueur donnée d $(d > 0)$.

L'angle θ sert à repérer un plan (R) passant par la droite $x'x$: angle (Q, R) $= \theta$.

1° Les inconnues sont deux points M et M′ du cercle (C), qu'on demande de déterminer par les conditions suivantes :

a. Le milieu P de la corde MM′ est projeté orthogonalement sur $x'Ox$ au point *donné* H. Autrement dit P se trouve sur une droite connue Δ qui est, dans le plan (Q), la perpendiculaire élevée en H à $x'x$.

b. La projection orthogonale mm' du segment MM′ *sur le plan connu* (R) doit être de longueur *connue* égale à d.

On observe qu'en désignant par α l'angle de la droite MM′ avec le plan R $(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2})$, $mm' = MM' \cos\alpha$. La mise en équation du problème consistera à égaler à d le produit des expressions de MM′ d'une part, de $\cos\alpha$ d'autre part, en fonction d'une inconnue. D'après l'indication de l'énoncé l'inconnue va être la distance $OP = \rho$. La connaissance de ρ détermine celle de $HP = \sqrt{\rho^2 - l^2}$, longueur qu'on peut porter sur Δ de part et d'autre de H et à partir de ce point, d'où la connaissance de P ; reste à élever en P une perpendiculaire à OP qui coupera (C) en M et M′. Ainsi, chaque valeur de ρ donne deux cordes MM′ répondant au problème et symétriques par rapport à $x'x$. Leur longueur commune est

$$MM' = 2PM = 2\sqrt{OM^2 - OP^2} = 2\sqrt{a^2 - \rho^2}$$

puisque le triangle OPM est rectangle en P.

En nous adressant ce rapport, M. l'Inspecteur général ROBERT nous écrit qu'il a présidé le Jury du Concours général pour la dernière fois en 1958. Que ce soit pour nous l'occasion de renouveler à M. ROBERT les vœux que nous avons formulés au moment de son départ en retraite. Ce départ ne l'a pas empêché de présider encore une fois le Jury du Concours général. Nous comprenons que maintenant il a le droit de considérer sa tâche comme bien remplie. Qu'il sache, cependant, combien son départ est regretté.

(1) Le Jury était composé de MM. ROBERT, inspecteur général honoraire, président ; CHATEAU, professeur (Centrale) au Lycée Charlemagne ; FLORY, professeur (Centrale) au Lycée Chaptal ; GUAYDIER, professeur (Centrale) à l'annexe Stanislas du Lycée St-Louis ; MARTIN, professeur (Spéciales) au Lycée Janson-de-Sailly ; NORDON, professeur (Centrale) au Lycée Buffon.

Voir l'énoncé du problème, *Bulletin 193*, page 476.

Pour évaluer α en fonction de ρ, on appelle (R_1) la nouvelle position prise par le plan (R) après une rotation *d'angle droit* et de sens quelconque autour de l'axe Oz, suivie de la translation de vecteur $\overline{OH}$. Ces opérations, dans le plan Q, changent la droite $x'x$ (passant par O) en la droite Δ (passant par H), faisant avec $x'x$ l'angle de rotation qui est droit. Le plan (R_1) passe par la droite (Δ) et fait avec (Q) l'angle θ. La droite MM' devient, dans (Q) une *perpendiculaire* à MM', c'est-à-dire une parallèle à OP. L'angle de cette droite avec le plan (R) n'est pas changé par la rotation, ni par la translation, ni par la substitution à la droite d'une parallèle. *L'angle α est donc égal à celui de* PO *avec* (R_1), angle dont le sommet est d'ailleurs P, puisque P est un point de Δ, donc du plan (R_1).

Introduisons la sphère (Σ) de centre O telle que le plan (R_1) lui soit tangent. Son rayon est le côté opposé à l'angle aigu θ d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est OH. Nous désignons ce rayon par r et l'on a : $r = \text{OH} \sin\theta = |l| \sin\theta$.

Le plan (R_1) est un plan tangent à la sphère passant par P : il y a une infinité de tels plans formant le même angle, *qui est* α, avec le diamètre PO et l'on voit que $r = \rho \sin\alpha$.

D'où $\cos^2\alpha = 1 - \dfrac{r^2}{\rho^2} = \dfrac{\rho^2 - r^2}{\rho^2}$.

2° La relation à écrire $\text{MM}'^2 \cos^2\alpha = d^2$ donne finalement l'équation (1) du problème

$$(1) \qquad \frac{(a^2 - \rho^2)(\rho^2 - r^2)}{\rho^2} = \frac{d^2}{4}.$$

A remarquer que les données l et θ n'interviennent que par la combinaison $r = |l| \sin\theta$ que l'on peut regarder comme connue. Cette simplification, capitale dans tout le problème, ne s'étend cependant pas aux inéquations que doit vérifier ρ.

Pour qu'une racine en ρ de (1) soit acceptable, il est nécessaire que $\sqrt{\rho^2 - l^2}$, expression de HP, existe, et que $2\sqrt{a^2 - \rho^2}$, expression de MM', existe, d'où les conditions nécessaires

$$\rho < |l|,$$
$$\rho < a,$$

et bien entendu $\rho > 0$.

L'inéquation $\rho^2 < a^2$ ou $a^2 - \rho^2 > 0$, lorsque ρ est racine de (1), équivaut à $\rho^2 - r^2 > 0$, puisque le premier membre est assuré d'être positif. Les inéquations du problème $(\mathcal{P})$, moyennant (1) se réduisent à $r < \rho < |l|$.

Pour discuter on est conduit à rechercher si, en posant $\rho^2 = X$, la fonction

$$\varphi(X) = \frac{(a^2 - X)(X - r^2)}{X}$$

peut prendre, dans l'intervalle $r^2 \leqslant X \leqslant l^2$ une valeur égale à $\dfrac{d^2}{4}$.

L'intervalle $r^2 \leqslant X \leqslant a^2$ est plus étendu (car $|l| < a$). On le substitue au précédent puisque, comme il a été noté, le paramètre $|l| = \dfrac{+r}{\sin\theta}$ peut être considéré comme n'intervenant qu'en second lieu, puisque seuls a, ρ, r et d figurent dans (1) [ou bien a et r dans $\varphi(X)$].

Dans l'intervalle (r^2, a^2), $\varphi(X)$ est définie et continue

$$\varphi(X) = a^2 + r^2 - \frac{X^2 + a^2 r^2}{X}.$$

La dérivée est $\varphi'(X) = -1 + \dfrac{a^2 r^2}{X^2} = \dfrac{a^2 r^2 - X^2}{X^2}$ elle s'annule pour $X = ar$ dans l'intervalle. D'où le tableau des variations de $\varphi(X)$:

X	r^2	ar	a^2
$\varphi'(X)$	+	o	—
$\varphi(X)$	croît	max.	décroît.

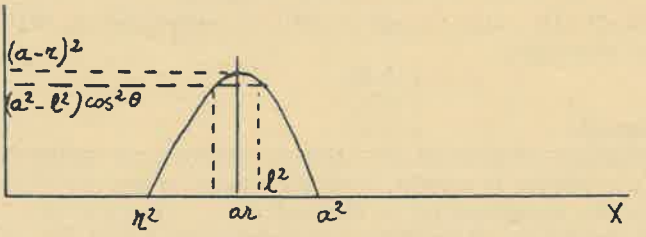
La valeur du maximum est $\varphi(ar) = \dfrac{a(a-r)\ r\ (a-r)}{ar} = (a-r)^2$.

Il est *nécessaire* pour que le problème $(\mathcal{P})$ ait des solutions, et *nécessaire et suffisant* pour que l'équation (1) ait des racines en ρ (quatre racines deux à deux opposées) que d satisfasse à l'inégalité $\dfrac{d^2}{4} \leqslant (a-r)^2$.

Pour une discussion plus complète du problème $(\mathcal{P})$, il nous faut revenir à l'intervalle (r^2, l^2), voir comment y varie la fonction $\varphi(X)$ et lire sur son graphique en combien de points il est coupé par une parallèle à l'axe des X d'ordonnée $\dfrac{d^2}{4}$.

l^2 est supérieur à r^2, mais peut être inférieur ou supérieur à ar. Formons $l^4 - a^2r^2 = l^2(l^2 - a^2\sin^2\theta)$. Donc si $a\sin\theta > |l|$ $l^2 > ar$,
$a\sin\theta < |l|$ $l^2 < ar$,

1er *cas* : $a\sin\theta > |l|$ (soit H entre F et F') $\varphi(X)$ est croissante dans (r^2, l^2),



$$\varphi(l^2) = \frac{(a^2-l^2)\ (l^2-r^2)}{l^2} = (a^2-l^2)\cos^2\theta.$$

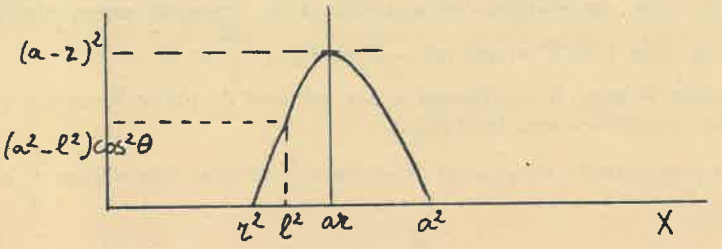
Résultats $\dfrac{d^2}{4} < (a^2-l^2)\cos^2\theta$, une valeur acceptable de ρ^2, la plus petite racine de (1) en ρ^2 $(\rho^2 < ar)$.

$\dfrac{d^2}{4} = (a^2-l^2)\cos^2\theta$ une valeur $< ar$ et la valeur l^2 acceptables pour ρ^2.

$(a^2-l^2)\cos^2\theta < \dfrac{d^2}{4} < (a-r)^2$ deux valeurs acceptables de ρ^2 encadrant ar.

Ces valeurs sont égales si $\dfrac{d^2}{4} = (a-r)^2$. Le problème est impossible pour $\dfrac{d^2}{4} > (a-r)^2$.

2° *cas* : $a \sin\theta < |l|$ (H est, soit entre A et F, soit entre A′ et F′).



Résultats $\frac{d^2}{4} < (a^2 - l^2)\cos^2\theta$, une valeur acceptable de ρ^2, la plus petite racine en ρ^2 de (1) ($\rho^2 < ar$).

$\frac{d^2}{4} = (a^2 - l^2)\cos^2\theta$, une valeur acceptable l^2.

$(a^2 - l^2)\cos^2\theta < \frac{d^2}{4}$, problème impossible.

3° Exprimons les mesures de $\overline{FG}$ et $\overline{F'G'}$ (sens positif de $\overrightarrow{OP}$),

$\overline{FG} = \overline{OP} - \text{proj}_{OP}\, OF$. Désignons $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})$ par v $\text{proj}_{OP}\, OF = a \sin\theta \cos v$.

Mais le vecteur $\overline{OP}$ est projeté sur $x'x$ selon $\overrightarrow{OH}$: $l = \rho \cos v$ d'où $\cos v = \frac{l}{\rho}$.

Ainsi $\overline{FG} = \rho - a \sin\theta \frac{l}{\rho}$,

$$\overline{F'G'} = \overline{OP} - \text{proj}_{OP}\, OF' = \rho + \frac{a \sin\theta l}{\rho}$$

ces expressions ne font intervenir l que par $l \sin\theta$,

$$\overline{FG}.\overline{F'G'} = \rho^2 - a^2 \sin^2\theta \frac{l^2}{\rho^2} = \rho^2 - \frac{a^2 r^2}{\rho^2} = X - \frac{a^2 r^2}{X} \quad \text{en posant } \rho^2 = X.$$

D'autre part $\varphi'(X) = \frac{a^2 r^2 - X^2}{X^2}$ ce qui peut s'écrire

$$\varphi'(X) = -\frac{\overline{FG}.\overline{F'G'}}{X} = -\frac{\overline{FG}.\overline{F'G'}}{\rho^2}.$$

Une solution du problème ($\mathcal{P}$), considérée comme l'*association de deux cordes* MM′ *symétriques par rapport à* $x'x$ et répondant à ce problème peut être :

de *première espèce* si F et F′ sont de part et d'autre de la corde MM′ : alors $\overline{FG}.\overline{F'G'}$ est négatif, $\varphi'(X)$ est positif et la solution correspond à un intervalle pour X où la fonction $\varphi(X)$ est croissante ;

de *deuxième espèce* si F et F′ sont d'un même côté de la droite MM′ : alors $\overline{FG}.\overline{F'G'}$ est positif, $\varphi'(X)$ est négatif et la solution correspond à un intervalle pour X où la fonction $\varphi(X)$ est décroissante ;

de *troisième espèce* si la droite MM′ passe par l'un des points F, F′ ; alors $\overline{FG}.\overline{F'G'}$ est nul, la solution corespond à la valeur ar de X. Ceci nécessite

$$\frac{d^2}{4} = (a - r)^2.$$

Il résulte de la discussion que, *lorsque le problème* ($\mathcal{P}$) *est possible, il comporte au plus une solution d'espèce donnée.*

Il peut avoir des solutions de première et de deuxième espèce simultanément quand H est entre F et F′ et que $(a^2 - l^2)\cos^2\theta < \frac{d^2}{4} < (a-r)^2$.

La valeur l^2 pour X correspond à une solution de première espèce formée de deux cordes confondues avec la droite Δ.

4° On peut résoudre simplement l'équation (1) où nous supposerons $\frac{d^2}{4} < (a-r)^2$. Elle s'écrit :

$$(a^2 - X)\ (X - r^2) - \frac{d^2}{4} X = 0.$$ Revenons à l'inconnue ρ

$$\rho^4 + a^2r^2 - \rho^2\left(a^2 + r^2 - \frac{d^2}{4}\right) = 0.$$

Si l'on considère que $\rho^4 + a^2r^2 = [\rho^2 + ar]^2 - 2\,ar\,\rho^2$ ceci s'écrit

$$(\rho^2 + ar)^2 - \rho^2\left(a^2 + r^2 + 2\,ar - \frac{d^2}{4}\right) = 0,$$

d'où $\rho^2 + ar = \sqrt{(a+r)^2 - \frac{d^2}{4}}\,\rho$,

($\rho^2 + ar$ est *a priori* positif).

De même, si l'on considère que $\rho^4 + a^2r^2 = [\rho^2 - ar]^2 + 2\,ar\,\rho^2$ on est amené à $(\rho^2 - ar)^2 - \rho^2\left(a^2 + r^2 - 2\,ar - \frac{d^2}{4}\right) = 0$,

d'où $\rho^2 - ar = \varepsilon\sqrt{(a-r)^2 - \frac{d^2}{4}}\,\rho$,

ε est égal à -1 ou à $+1$, selon que $\rho^2 < ar$ ou que $\rho^2 > ar$.

Mais dans la discussion, on ne trouve une solution telle que $\rho^2 > ar$ que dans le 1er cas $a\sin\theta > |l|$, c'est une solution de deuxième espèce puisque $\varphi(X)$ est décroissante pour cette valeur de ρ^2.

Ajoutons membre à membre les deux formules irrationnelles, ce qui donne 2ρ et en fin

$$\rho = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(a+r)^2 - \frac{d^2}{4}} + \varepsilon\sqrt{(a-r)^2 - \frac{d^2}{4}}\right] \qquad (2)$$

ε *étant égal à* -1 *pour une solution de première espèce,* $+1$ *pour une solution de deuxième espèce.*

II. 1° *Solution géométrique du problème* ($\mathcal{P}$). — Supposons que M et M′ satisfasse au problème ($\mathcal{P}$). Il existe une rotation autour de l'axe Oz qui transforme le milieu P de MM′ en un point P_1 appartenant à la perpendiculaire (Δ_1) à $x'x$ élevée en H_1, H_1 étant le point de $x'x$ d'abscisse $\overline{OH_1} = l\sin\theta$. En effet

$$OH_1 = |l|\sin\theta\ \ OH = |l|,$$

donc $OH_1 < OH$, la droite Δ_1 est sécante au cercle de centre O et de rayon OP.

On a vu que le rayon r de la sphère (Σ) est $|l|\sin\theta$, c'est-à-dire OH_1. Le point H_1 est donc situé sur (Σ).

Soit P_1 un des points de rencontre de (Δ_1) avec le cercle de centre O et de rayon OP : son choix n'aura pas d'influence dans la suite. $OP_1 = OP = \rho$.

Rappelons que l'angle α de MM′ avec (Q) est égal à l'angle de OP avec le plan R_1 tangent à (Σ), autrement dit α est le demi-angle d'ouverture du cône de révolution de sommet P circonscrit à (Σ). Il est encore égal au demi-angle d'ouver-

ture du cône de révolution de sommet P_1 circonscrit à (Σ). L'une des génératrices de ce cône est la droite P_1H_1 visiblement tangente à la sphère (Σ) en H_1. Donc α est égal à l'angle $\widehat{OP_1H_1}$.

L'équation fondamentale (1) traduisait le fait que $d = MM' \cos\alpha$. Or

$$MM' = M_1M'_1,$$

$M_1M'_1$ étant la corde de (C) de milieu P_1, déduite de MM' par la rotation d'angle $\widehat{POP_1}$ autour de Oz. Nous avons donc $d = M_1M'_1 \cos\widehat{OP_1H_1}$.

Soient m_1 et m'_1 les projections orthogonales de M_1 et M'_1 sur $x'x$. Dans le plan (Q) on voit que $m_1m'_1 = M_1M'_1 \cos\widehat{OP_1H_1}$ donc $d = m_1m'_1$. Les points m_1 et m'_1 sont faciles à connaître, le point H_1 pouvant être regardé comme connu. Les tracés pour obtenir une solution MM' du problème $(\mathcal{P})$ sont les suivants :

Marquer sur $x'x$ le point H_1 homothétique de H dans l'homothétie de centre O et de rapport $\sin\theta$; *porter sur $x'x$ à partir de et de part et d'autre de H_1 les longueurs H_1m_1 et $H_1m'_1$, de longueur* $\frac{d}{2}$. *Construire les points M_1 et M'_1 de (C) dont les projections orthogonales sur $x'x$ sont les points m_1 et m'_1. Décrire le cercle de centre O tangent à une corde $M_1M'_1$ (en son milieu P_1) et prendre, s'ils existent, ses points d'intersection avec la droite (Δ). Soit P un tel point ; en effectuant sur $M_1M'_1$, la rotation de centre O et d'angle $(\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP})$ dans (Q), on obtient MPM', soit la corde MM' de milieu P.*

Inversement une corde MM' ainsi obtenue a d'après les considérations précédentes sa projections sur Q égale à $m_1m'_1$ et par construction est donc égale à d. Elle est bien une solution de $(\mathcal{P})$ et il s'y associe sa symétrique par rapport à $x'x$.

Ayant obtenu séparément M_1 et M'_1 (avec ambiguïté pour chacun de ces points), le choix de $M_1M'_1$ se fait de quatre manières deux à deux symétriques par rapport à $x'x$. Les solutions correspondantes de $(\mathcal{P})$ si *elles existent toutes*, sont au nombre de deux, une étant de première, l'autre de seconde espèce, comme on va le voir, en général.

2° Appelons G_1 et G'_1 les projections orthogonales respectives de A et A' sur la droite $M_1M'_1$,

$$\overline{AG_1} = \overline{OP_1} - \text{proj } OP_1\, OA.$$

C'est le même calcul que pour FG, mais OP est remplacé par OP_1 et v par $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{OP_1} = v_1$. Ici $\overline{OP_1}\cos v_1 = \overline{OH_1}$ donc

$$\cos v_1 = \frac{l_1}{\rho} \text{ et } \overline{AG_1} = \rho - a\frac{l\sin\theta}{\rho_1}.$$

On avait $\overline{FG} = \rho - a\sin\theta\,\frac{l}{\rho}$, donc $\overline{AG_1} = \overline{FG}$

$$(\text{sens} + \overrightarrow{OP_1})\ (\text{sens} + \overrightarrow{OP})$$

De même $\overline{A'G'_1} = \overline{F'G'}$.

Le produit $\overline{AG_1}.\overline{A'G'_1}$ qui, par son signe, indique la position du couple AA' par rapport à la droite $M_1M'_1$ est égal à $\overline{FG}.\overline{F'G'}$ qui a servi à caractériser, par ce signe, l'espèce de la solution considérée.

Donc, si la corde MM' est de première espèce, $\overline{AG_1}.\overline{A'G'_1}$ est négatif, les points A et A' sont de différents côtés de la droite $M_1M'_1$, ce qui revient à dire que M_1 et M'_1 sont de part et d'autre du diamètre AA' de (C).

Si la corde MM′ est de deuxième espèce, $\overline{AG_1}.\overline{A'G'_1}$ est positif, les points M_1 et M'_1 sont du même côté du diamètre AA′.

Si la corde MM′ est de troisième espèce, $AG_1.A'G'_1 = 0$, donc l'un des points A ou A′ est sur la droite $M_1M'_1$, autrement dit, l'un des points M_1 ou M'_1 coïncide avec A ou A′.

En résumé, l'espèce de la corde MM′ fournie, si elle existe, par une corde $M_1M'_1$ de (C) dépend de la position de la droite $M_1M'_1$ par rapport au segment AA′.

3° Le quadrilatère $Am_1M_1G_1$ est inscriptible dans le cercle décrit sur AM_1 comme diamètre. Donc la droite G_1m_1 est antiparallèle de la droite AM_1 par rapport aux deux droites AA′ et $M_1M'_1$.

De même, à partir de la considération du quadrilatère $A'm_1M_1G'_1$, on montre que la droite G'_1m_1 est antiparallèle de la droite $A'M_1$ par rapport aux deux droites AA′ et $M_1M'_1$.

L'antiparallélisme est une symétrie des directions, donc l'angle (G_1m_1, G'_1m_1) est opposé, à $k\pi$ près, à l'angle $(AM_1, A'M_1)$. Ces droites AM_1 et $A'M_1$ sont rectangulaires puisque AA′ est diamètre de (C). Donc G_1m_1 et G'_1m_1 sont aussi rectangulaires. Autrement dit le cercle décrit sur $G_1G'_1$ comme diamètre contient m_1.

En répétant un raisonnement analogue où m'_1 et M'_1 remplacent respectivement m_1 et M_1 on montre que le cercle décrit sur $G_1G'_1$ comme diamètre contient m'_1.

Soit (K) ce cercle de diamètre $G_1G'_1$; il est tangent en G_1 à AG_1 et en G'_1 à $A'G'_1$. Considérons le cercle (A) de centre A et de rayon AG_1 et le cercle (A′) de centre A′ et de rayon $A'G'_1$. $G_1G'_1$ est une tangente commune à ces cercles (A) et (A′). Le cercle (K) est un cercle orthogonal à (A) et (A′) qui rencontre en m_1, m'_1 leur ligne des centres AA′ : *les points m_1 et m'_1 sont donc les points de Poncelet du système des deux cercles* (A), (A′).

Ceci permet un nouveau calcul de AG_1 et $A'G'_1$:

$$\overline{AG_1}^2 = Am_1.Am'_1 \qquad \overline{A'G'_1}^2 = A'm_1.A'm'_1.$$

Supposons $\overline{H_1m_1} = +\frac{d}{2}$.

Or $\overline{Am_1} = \overline{AH_1} + \frac{d}{2}$ $\overline{Am'_1} = \overline{AH_1} - \frac{d}{2}$ $\overline{A'm_1} = \overline{A'H_1} + \frac{d}{2}$ $\overline{A'm'_1} = \overline{A'H_1} - \frac{d}{2}$

donc $\overline{H_1m'_1} = -\frac{d}{2}$.

$$\overline{AG_1}^2 = \overline{AH_1}^2 - \frac{d^2}{4} = (r-a)^2 - \frac{d^2}{4} \qquad \overline{A'G'_1}^2 = \overline{A'H_1}^2 - \frac{d^2}{4} = (r+a)^2 - \frac{d^2}{4}$$

suppose $\overline{OH_1} = +r$ (pour fixer les idées).

Enfin : si MM′ est de première espèce, A et A′ sont de part et d'autre de $M_1M'_1$ qui est une tangente commune intérieure à (R) et (A′). La distance OP_1 du milieu O de AA′ à la droite $M_1M'_1$ est la demi-différence des distances de A et A′ à cette droite : ce qui donne ρ, puisque $OP = OP_1$,

$$\rho = \left|\frac{1}{2}\left[\sqrt{(a-r)^2 - \frac{d^2}{4}} - \sqrt{(a+r)^2 - \frac{d^2}{4}}\right]\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(a+r)^2 - \frac{d^2}{4}} - \sqrt{(a-r)^2 - \frac{d^2}{4}}\right)$$

Si MM′ est de deuxième espèce, $M_1M'_1$ est une tangente commune extérieure à (A) et (A′). OP_1 est la demi-somme de AG_1 et $A'G'_1$ et dans ce cas

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(a+r)^2 - \frac{d^2}{4}} + \sqrt{(a-r)^2 - \frac{d^2}{4}}\right)$$

On vient de redémontrer la formule (2).

Si MM′ est de troisième espèce, $AG_1 = 0$, $(a-r)^2 = \frac{d^2}{4}$, mais la formule subsiste, (ε quelconque). Le calcul fait a supposé $\overline{OH_1} = +r$. Dans le cas où $\overline{OH_1} = -r$, le calcul est semblable, les radicaux s'échangent entre eux, les résultats restent les mêmes, ρ étant une valeur absolue. Seulement il peut arriver que $A'G'_1$ soit nul, résultat inchangé encore dans ce cas :

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(a+r)^2 - (a-r)^2}\right) = \sqrt{ar}.$$

4° Les rayons OM, OM′ forment avec OP le même angle u $\left(0 < u < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\rho = OP = a\cos u \quad PM = a\sin u.$$

L'aire σ_1 du segment de cercle compris entre la corde MM′ et le cercle (C), et n'excédant pas un demi-cercle, est la différence entre l'aire du secteur circulaire de même arc $\overline{MM'}$ et l'aire du triangle isocèle MOM′

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\, a^2.\, 2u - \frac{1}{2}\, a^2 \sin 2u = a^2\,[u - \sin u\, \cos u].$$

Evaluons l'aire σ_2 du secteur mixtiligne limité par les segments FM, FM′ et l'arc $\overline{MM'}$ du segment de cercle. En considérant deux cas de figure, on voit que
$\sigma_2 = \sigma_1 +$ aire triangle MFM′ quand F et O sont du même côté de la droite MM′ et que
$\sigma_2 = \sigma_1 -$ aire triangle MFM′ quand F et O sont de part et d'autre de MM′.

On a trouvé pour $\overline{FG}$ (sens positif de $\overrightarrow{OP}$) $\overline{FG} = \rho - a\,\frac{\sin\theta l}{\rho} = a\left[\cos u - \frac{l\sin\theta}{\cos u}\right]$

L'aire du triangle MFM′ est $\frac{MM'}{2} \times FG$. Dans le premier cas de figure $\overline{FG}$ est du signe de $\overline{OP}$, soit positif, donc $FG = +\overline{FG}$. Dans le second cas $\overline{FG}$ est du signe de $-\overline{OP}$, soit négatif, donc $FG = -\overline{FG}$.

Finalement, dans les deux cas $\sigma_2 = \sigma_1 + \frac{1}{2}\, MM' a\left[\cos u - \frac{l\sin\theta}{\cos u}\right]$.

$$\sigma_2 = a^2 u - al\sin\theta\,\mathrm{tg}\,u,$$

$$\sigma_2 = a^2\left[u - \frac{l\sin\theta}{a}\,\mathrm{tg}\,u\right].$$

III^e PARTIE. — Considérons ici une orbite elliptique autour du foyer attirant F. On appelle O son centre, A et A′ ses sommets de grand axe, en supposant $\overrightarrow{OA}$ de même sens que $\overrightarrow{OF}$; (R) le plan de cette ellipse (E), a la mesure de son demi-grand axe, e son excentricité ($0 < e < 1$). L'ellipse a un second foyer F′ supposé distinct de F. En orientant A′A dans le sens $x'x$ du vecteur $\overrightarrow{OA}$ les abscisses de A, A′, F, F′ sont respectivement a, $-a$, ae, $-ae$.

b étant le demi-grand axe et c la demi-distance focale de (E), on sait que l'ellipse (E) peut être regardée comme la projection orthogonale sur son plan (R) d'un cercle (C) ayant AA′ comme diamètre, choisi entre deux, une fois pour toutes, et que

l'angle θ du plan (Q) du cercle avec (R) est tel que $\cos\theta = \frac{b}{a}$. D'où $\sin\theta = \frac{c}{a}$, puisque $a^2 = b^2 + c^2$. Donc $\sin\theta = e$. Nous sommes amenés à reconstituer ainsi les données fixes du 1 de la 1re partie du problème.

(E) étant envisagée comme la trajectoire d'un mobile (planète, comète ou satellite) dans un mouvement ($\mathcal{M}$) déterminé, satisfaisant aux lois de Képler, soient m, m' deux positions successives distinctes de ce mobile.

Les points m, m' de (E) sont les projections orthogonales des points M et M' de (C). La notion d'espèce de la corde mm' de l'ellipse se définit à partir de l'espèce de la corde MM' sur (C), les points F et F' utilisés à cet effet dans (II, 2°) étant les foyers de l'ellipse. En clair, mm' est de première espèce si la droite mm' traverse le segment FF', de deuxième espèce, si F et F' sont de même côté de la droite mm', de troisième espèce si cette droite mm' passe par F ou F'.

Appelons encore P le milieu de MM', H la projection orthogonale de P sur AA' et p le milieu de mm', projection de P sur le plan (R) ; la droite pH est perpendiculaire en H à AA' (théorème des trois perpendiculaires), donc parallèle à la directrice de (E) relative au foyer F. La distance de p à cette directrice est d'une part $\frac{a^2}{c} - \overline{OH}$; d'autre part c'est la demi-somme des distances de m et m' à cette directrice, qui sont les produits par $\frac{1}{e}$ des rayons vecteurs focaux Fm et Fm'.

$$\text{Donc } \frac{1}{e}\left[Fm + Fm'\right] = 2\left[\frac{a^2}{c} - \overline{OH}\right] = 2\left[\frac{a}{e} - l\right]$$

En posant avec l'énoncé $Fm + Fm' = s$ on voit que $s = 2(a - el)$ (3)

Il y a proportionnalité entre les aires balayées par le rayon vecteur du mobile et les durées ; d'autre part, l'aire balayée entre les positions mm' est proportionnelle à l'aire mixtiligne σ_2 dont mfm' est la projection orthogonale sur le plan (R). Appelons Δt le temps mis par le mobile pour balayer l'arc mm' d'ellipse inférieur au demi-périmètre de (E). Δt est proportionnel à σ_2. Pour une demi-ellipse balayée, projection d'un demi-cercle de (C), la durée est la demi-période T du mouvement ($\mathcal{M}$). Donc

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\sigma_2}{\pi a^2}$$

D'après le dernier résultat de (II, 4°) où l'on remplace $l\sin\theta$ par sa valeur r' ($r = |r'|$) $\operatorname{sgn} r' = \operatorname{sgn} l$,

$$\Delta t = T\frac{1}{\pi}\left[u - \frac{l\sin\theta}{a}\,tg\,u\right] = \frac{T}{\pi}\left[u - \frac{r'}{a}\,tg\,u\right]$$

La longueur d de la corde mm' projection orthogonale de MM' sur le plan (R) a été calculée dans I

(1) $\qquad \frac{d^2}{4} = \frac{(a^2 - \rho^2)(\rho^2 - r^2)}{\rho^2}$ dans laquelle $\rho = OP = a\cos u \quad r = |r'|$

De (3) on tire $el = a - \frac{s}{2}$ ou $r' = a - \frac{s}{2}$ donc $\Delta t = \frac{T}{\pi}\left[u - \left(1 - \frac{s}{2a}\right)tg\,u\right]$

Pour utiliser u tel que $\cos u = \rho$ revenons à la formule irrationnelle

$$\rho = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(a+r)^2 - \frac{d^2}{4}} + \varepsilon\sqrt{(a-r)^2 - \frac{d^2}{4}}\right]$$

où $\varepsilon = -1$ si mm' est de première espèce, $\varepsilon = +1$ si mm' est de deuxième espèce. Supposons qu'on connaisse par des mesures a, s, d, on peut en déduire Δt par les

calculs suivants, à condition de connaître aussi ε, c'est-à-dire l'espèce de la corde mm' :

évaluer $r' = a - \frac{s}{2}$, puis $r = |r'|$,

puis u par $a \cos u = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(a+r)^2 - \frac{d^2}{4}} + \varepsilon \sqrt{(a-r)^2 - \frac{d^2}{4}}\right]$ $\quad 0 < u < \frac{\pi}{2}$

on peut remarquer que $a + r = 2a - \frac{s}{2}$ $\quad a - r = \frac{s}{2}$,

$$\text{si } a > \frac{s}{2} \quad r = r',$$

au contraire si $\quad a < \frac{s}{2} \quad r = -r' \quad a + r = \frac{s}{2} \quad a - r = 2a - \frac{s}{2}$.

Enfin $\qquad \Delta t = \frac{T}{\pi}\left[u - \frac{r'}{a} tg\, u\right]$

Ces calculs sont fort simples.

Théorème de Lambert. — Comparons deux mouvements $(\mathcal{M})$ sur des orbites *ayant même longueur de grand axe*, et les temps mis par les mobiles respectifs à parcourir les arcs $\overline{mm'}$, $\overline{nn'}$ de ces deux orbites. Les durées de révolution T sont les mêmes pour les deux mouvements d'après la troisième loi de Képler.

Si, en outre, on suppose les cordes mm', nn' telles que

$$\text{corde } mm' = \text{corde } nn' \qquad Fm + Fm' = Fn + Fn'$$

et si elles sont de même espèce dans les deux orbites, les calculs sont exactement les mêmes de part et d'autre : même r', même u, enfin même Δt.

Donc les mobiles de ces mouvements parcourent les arcs elliptiques $\overset{\frown}{mm'}$, $\overset{\frown}{nn'}$ correspondants dans des temps égaux.

Ce qu'il y a de remarquable, c'est que l'influence de l'excentricité de l'orbite ne se fait pas sentir, Lambert est amené à comparer le mouvement général avec celui où l'ellipse est aplatie selon un segment de droite (Lambert : *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik*, Berlin, 1765-1772).

Une corde mm' est de troisième espèce, soit si elle passe par le foyer F et alors $s = d$, soit si elle passe par le foyer F' et alors $s = 4a - d$

$$(\text{car } MF + MF' = M'F + M'F' = 2a).$$

Il semble que la partie algébrique du problème n'ait pas beaucoup embarrassé les concurrents. Toutefois, après avoir retrouvé la formule (1), nombreux sont ceux qui n'ont pas soupçonné l'avantage qu'il y a pour discuter le problème à résoudre cette équation par rapport à $\frac{d^2}{4}$, pris comme paramètre de discussion, et se sont référés à une équation du second degré en $\rho^2 = X$.

En général, on a résolu cette équation par la formule classique donnant les racines d'une équation du second degré. Il est heureux pour les candidats que l'énoncé donnait le résultat sous forme irrationnelle, on se demande si, d'eux-mêmes, ils l'auraient découvert. Sur ce point, beaucoup ont en somme effectué plutôt une vérification qu'une démonstration. Ce qui est peu satisfaisant alors, c'est le rattachement de ε de la formule (2) à la notion d'espèce.

Souvent cette résolution précède la discussion du problème $(\mathcal{P})$.

Le calcul de $\overline{FG}$, $\overline{F'G'}$ est présenté comme une conséquence de l'emploi de triangles semblables, mais est peu concluant sur le point de savoir si les résultats obtenus sont généraux. De même pour $\overline{AG_1}$, $\overline{A'G'_1}$.

La construction géométrique semble, dans beaucoup de copies, avoir été bien comprise, mais l'étude des cercles (A) et (A'), avec leurs points limites, a généralement arrêté les concurrents.

Quant à la III[e] partie, elle n'est pas abordée dans la majorité des copies, sinon pour affirmer des détails évidents. En n'étalonnant pas pour la correction une série de questions précises dans cette partie, qui se bornait à guider et fixer un but à la recherche, on s'était proposé de juger ceux qui, ayant constamment remarqué que l et θ n'intervenaient que par le produit $l \sin\theta$, auraient pu en tirer des conséquences.

La proportionnalité entre la durée Δt et l'aire σ_2 de la figure du cercle dans le plan (Q) a été signalé dans une bonne copie.

Ce fut donc, pour cette partie, un insuccès presque total. Il ne faut pas croire que le fait que l'Astronomie, dans certains cours, puisse être enseignée tardivement dans l'année, ait découragé les concurrents. *Il suffisait de connaître les lois de Képler* que l'énoncé a tenu à rappeler et encore la troisième n'intervenait que sous sa forme la plus qualitative : *la durée de révolution* T *ne dépend que de la longueur du grand axe de l'orbite a.*

Une erreur regrettable dans la distribution des enveloppes de sujets aux centres de composition put heureusement être corrigée à temps : le carré T^2 est proportionnel au cube a^3 : il n'est pas inversemuent proportionnel à a^3. T est fonction croissante de a, comme chacun sait.

La méthode suivie dans ce problème permet de trouver les lois des accélérations et des vitesses du mouvement newtonien, en n'utilisant, bien entendu, que les lois de Képler. Le théorème des forces vives, par une anomalie que d'aucuns regretteront, est au programme de physique, mais non au programme de Mathématiques de la classe, et il nous faut nous passer de lui ici.

La formule donnant d^2 fait connaître en somme la longueur de la corde mm' de l'arc parcouru pendant le temps Δt. En ayant recours à la notion de vitesse moyenne du mouvement de t à $t + \Delta t$, on peut considérer le rapport d'infiniment petits corde mm' et Δt pour en déduire sa limite quand Δt tend vers o. Il n'y a là rien qui présente quelque difficulté : il est visible que ρ a pour limite $a - Fm$. On en déduit une expression de la vitesse à l'instant t, contenant la longueur Fm du rayon vecteur et la durée de révolution T du mouvement

$$v^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} \frac{(2a - Fm)}{Fm}.$$

D'après la troisième loi de Képler $\frac{a^3}{T^2}$ est une constante pour tous les mouvements $(\mathcal{M})$.

Remarque : On démontre avec Newton que

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{4\pi^2}{G.M}$$

G constante de la gravitation universelle,
M masse du corps attirant le mobile et placé en F.

La formule de la vitesse est

$$v = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{F'm}{Fm}}$$

Or la distance FJ du foyer à la tangente en M a pour valeur $Fm \sin \widehat{JmF}$ et le produit $Fm.F'm \sin^2 \widehat{JmF} = b^2$ d'où $\sin \widehat{JmF} = \frac{b}{\sqrt{Fm.Fm'}}$ $FJ = b\sqrt{\frac{Fm}{Fm'}}$

$v \times FJ = \frac{2\pi ab}{T} = C^{te}$.

Par un raisonnement classique, l'hodographe du mouvement est semblable, au lieu géométrique de J, qui est le cercle directeur de l'ellipse : on en déduit les accélérations $\vec{\gamma}$ et on peut retrouver la formule

$$\gamma = + \frac{MG}{Fm^2} \vec{\gamma} \text{ étant situé sur } \overrightarrow{mF}.$$

Nous signalons ici ce tour d'horizon théorique non sans faire toutes réserves sur son emploi et les difficultés qu'il pourrait rencontrer dans les classes. Entre deux démarches d'esprit, pour enseigner une théorie, il est fréquent qu'on doive préférer celle qui a pour elle la tradition, tout simplement parce que les réactions des élèves sont ou semblent mieux connues qu'avec une exposition toute nouvelle. Ils commettent facilement des erreurs en s'aventurant sur un terrain nouveau : ainsi, certains concurrents ont affirmé à la légère que le mouvement elliptique képlérien provenait de la projection sur un plan d'un mouvement circulaire uniforme ! Cela dénote un manque de maturité (ou un sujet placé un peu trop haut).

194 élèves de la classe de Mathématiques ont pris part à ce concours. Le Jury a tenu sa première réunion le 16 mai et y a rendu compte d'une première lecture des copies. Il a décidé de retenir pour une étude plus complète très soigneusement pourvue d'un barème d'étalonnage seize copies, parmi lesquelles toutes celles qui avaient abordé la III[e] partie.

Dans la réunion finale du Jury, le 23 mai, il fut procédé à l'établissement du palmarès de l'épreuve : trois prix et neuf accessits. Le premier prix dominait largement (18,4 sur 20) ; le second et le troisième prix (15 et 13,75) sont inférieurs de forme et de distinction au précédent, mais témoignent d'un effort très estimable.

Il a été décerné des accessits de 13,3 à 10,4, dont les 2[e] et 7[e] accessits réunissent chacun deux *ex-æquo*.

Somme toute, le concours est satisfaisant. Comme d'habitude on retrouve dans la liste des lauréats le titulaire du premier prix du concours de Physique et des lauréats du concours de 1957 en classe de Première. Le premier prix de 1957 obtint cette année le second prix ; le premier accessit de 1957 eut le troisième prix ; le troisième accessit de 1957 s'est classé 9[e] accessit en 1958.

L'habitude de dessiner des figures d'ensemble en perspective, contre laquelle nous nous étions élevé l'an dernier, sévit encore un peu, bien que les raisonnements préliminaires ont été généralement suivis avec facilité sur de simples figures planes. L'emploi de procédés algébriques ne constitue-t-il pas une dérogation, en lui-même, à la hantise du visuel ? on semble l'avoir définitivement compris.

L'Inspecteur général honoraire, président du Jury.
P. ROBERT.

29 novembre 1957.