SYMBOLISME ET RÈGLES OPÉRATOIRES DANS LES MATHÉMATIQUES SCOLAIRES

Résumé, dû à Mlle FÉLIX, d'une conférence faite au Congrès international d'Edimbourg, par M. STORER, directeur de la section mathématique de l'Institut de Pédagogie de Birmingham.

Les faits et les principes que j'ai en vue et que je voudrais réunir ici sont les suivants :

1) Il est désirable d'introduire à l'école quelques idées de Mathématiques modernes, et, en particulier, de prendre conscience clairement des lois fondamentales de l'arithmétique et de l'algèbre ;

2) le besoin universel d'augmenter le nombre et la qualité des mathématiciens et des scientifiques, y compris les professeurs, ne peut être satisfait que par une amélioration de la qualité de notre enseignement, en particulier en ce qui concerne les enfants de niveau moyen. Les plus doués apprendront toujours, même avec un enseignement médiocre ; ce sont les possibilités d'un élève moyen qui sont perdues par un enseignement insuffisant ;

3) on se plaint, dans tous les pays, des erreurs commises par les enfants. Je croyais que ces erreurs étaient plus communes en Angleterre que sur le continent, par suite de nos méthodes moins exactes d'enseignement, mais un article récent de Mme Krygowska (*Bulletin de l'A.P.M.*, mars 1958) indique que les professeurs des autres pays sont aux prises avec le même problème.

(Par exemple : $\dfrac{a+b}{a+c}=\dfrac{b}{c}$, $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$, etc...)

4) il y a, malgré tout, les différences de traditions et de méthodes dans les différents pays, de sorte qu'une transformation urgente dans un pays est peut-être inutile dans un autre. Certes, notre système anglais peut fournir une contribution à d'autres pays par l'importance donnée aux illustrations pratiques et par la liberté des discussions entre professeurs et élèves. Mais il serait dangereux de négliger l'aspect des Mathématiques comme discipline intellectuelle. Une récente étude russe sur l'enseignement de l'algèbre en Angleterre conclut que, malgré ses nombreux mérites, son but est de préparer les enfants à résoudre les exercices et à répondre aux questions d'examen plutôt que de développer la compréhension profonde du sujet. Bien qu'on puisse invoquer quelques justifications, cette critique est juste ;

5) le dernier point que je souligne est que, pour améliorer l'enseignement mathématique dans un pays, il n'est pas suffisant de penser à réformer les programmes et à compléter l'instruction des professeurs. Ceci produira un progrès à long terme, mais il est aussi désirable de produire une amélioration à court terme, avec les professeurs actuellement en exercice. Presque tous ces professeurs ont une expérience valable et la bonne volonté ne manque pas, mais ils ne voient pas toujours comment introduire des modifications dans leur enseignement. Si les professeurs qui ont pris l'initiative de faire des expériences peuvent indiquer des domaines limités où une nouvelle méthode a bien réussi, d'autres suivront. Il importe de ne pas être trop ambitieux au départ : il faut un large idéal, mais aller à petits pas (c'est peut-être la méthode anglaise de compromis empirique).

Les discussions de ce Congrès ont mis en évidence notre accord sur la possibilité de développer les lois fondamentales de l'arithmétique par voie inductive dès l'école primaire. Nous espérons que cela deviendra une pratique courante et que le travail commencé se développera au cours des études secondaires. Mon problème immédiat, toutefois, a été récemment de voir comment aider les enfants de 14 à

16 ans qui n'ont pas eu ce premier enseignement et qui font des fautes élémentaires en algèbre, telles que celles que nous avons mentionnées. Il me semble que les erreurs les plus graves proviennent de la confusion entre les opérations d'addition et de multiplication, ainsi que d'une méconnaissance de l'importance de l'ordre des opérations. Seule une « attaque directe » de ces fautes permettra d'espérer les corriger.

J'ai eu récemment l'occasion d'enseigner dans deux classes (13-14 ans et 14-15 ans) pour une quinzaine de jours dans chacune d'elles (sept à huit leçons et deux interrogations), et je me suis efforcé de voir jusqu'où l'on peut aller en si peu de temps.

Nous avons discuté les moyens par lesquels deux nombres peuvent en donner un troisième, puis discuté le comportement de ces « opérations », mot nouveau en ce sens pour les élèves. La commutativité fut discutée sous le titre : « L'ordre importe-t-il ? » et de nombreuses illustrations furent prises dans la vie de tous les jours (ordre suivant lequel on met ses habits, fait des mouvements, mélange d'ingrédients, ordre des mots d'une phrase, etc...).

L'associativité fut discutée sous le titre : « Les groupements interviennent-ils ? » Ici, les illustrations simples ne sont pas si nombreuses ; les plus frappantes semblent être, avec les filles, le mélange d'ingrédients pour faire un gâteau.

Ces idées furent appliquées aux quatre opérations, et les résultats furent mis en un tableau pour montrer clairement la ressemblance entre les deux opérations directes et les deux inverses. Les « éléments neutres » sont introduits sous le titre : « Rien ne change ».

Le procédé de « simplification » est basé sur la notion d'opération inverse « à l'intérieur d'une famille », et le résultat est l'élément neutre pour cette famille. (Des confusions à ce sujet conduisent aux erreurs : $\frac{a+b}{a+c}=\frac{b}{c}$, $\frac{a}{a}=0$).

A ce stade, il n'y a aucun mélange des familles : opérations (+ et —), et ($\times$ et :). Le signe $\times$ est conservé pour bien montrer qu'il y a une opération.

En cas d'opérations consécutives, une parenthèse à gauche peut être sous-entendue, mais, puisque l'ordre intervient pour les opérations — et :, il est nécessaire d'étudier la suppression des parenthèses pour des cas tels que : $a-(b-c+d)$ et : $a:(b:c\times d)$.

La règle pour (: et $\times$) est parallèle à celle qui correspond à (— et +). On n'y insiste pas suffisamment en général, si même on la mentionne. Ceci éclaire la règle de division par une fraction considérée comme une opération de division :

$$a:\frac{b}{c}=a:(b:c)=a:b\times c.$$

Tous ces résultats, écrits en tableau, mettent en évidence aussi clairement que possible les faits importants et les ressemblances. Ce tableau, affiché en classe, fixera les faits par la mémoire visuelle. Des feuilles d'exercices furent aussi utilisées en classe et à la maison.

Ensuite, il est nécessaire de mélanger les familles. Combien de manières possibles telles que : $(a+b)\times c$; $(a:b)+c$; $(a-b):c$, etc...
la parenthèse étant ici toujours placée la première à gauche.

Ceci fut regardé comme une question de commutativité dans l'ordre d'exécution des opérations. Ainsi, dans le troisième exemple, est-il indifférent de soustraire d'abord et diviser ensuite, ou bien de diviser d'abord par c et soustraire ensuite ?

Ceci conduit à la possibilité de discuter la distributivité dans des cas variés. Par exemple :

$(a+b)\times c$ donne : $(a\times c)+(b\times c)$,
mais $(a\times b)+c$ ne donne pas : $(a+c)\times(b+c)$.

Les règles de commutativité déjà connues :

$(a \pm b) \times c$ égal à : $c \times (a \pm b)$,
mais $(a \pm b) : c$ non égal à : $c : (a \pm b)$,
permettent d'étendre la distributivité :

de : $(a \pm b) \times c$ à $c \times (a \pm b)$,
mais non de : $(a \pm b) : c$ à $c : (a \pm b)$.

Ces règles étant comprises, il est possible de simplifier le symbolisme pour $\times$ et :, et d'écrire :

$$(a \times b) + c = ab + c \; ; \qquad (a : b) - c = \frac{a}{b} - c$$

l'indication des opérations étant restée visible jusqu'ici.

Enfin, l'étude se complète par la révision des méthodes de calcul élémentaire à la lumière des lois de commutativité, d'associativité et de distributivité, en particulier les règles des opérations de multiplication et de division.

Au cours de ces expériences, j'ai trouvé qu'en deux semaines, les enfants gagnent une bonne connaissance des principes de commutativité et d'associativité, mais n'ont pas encore consolidé suffisamment l'étude de la distributivité, ni la compréhension des algorithmes arithmétiques.

Naturellement, il serait mieux de ne pas enseigner tout ceci d'une façon continue et d'un bloc en une seule période, mais au contraire d'une façon intermittente sur un an et plus, et en outre par le professeur habituel et non par un visiteur qui se propose une expérience durant un temps limité. Un élargissement de la connaissance doit être développé durant toute la période d'instruction de l'élève, depuis huit ans, et même avant, jusqu'à 18 ans, le professeur faisant à chaque occasion appel au principe approprié. Mais à certaines époques, une courte période d'attention délibérée doit lui être consacrée, et ma courte expérience suggère qu'on obtient ainsi des résultats positifs.

Je répète que ma recommandation est seulement une proposition « par intérim », pour une situation particulière comme celle des élèves des écoles secondaires anglaises actuelles, mais proposer ces méthodes intérimaires est aussi utile que d'envisager des programmes à long terme. Pour les enfants les plus doués, je suggère que ce travail soit fait vers 13 ou 14 ans, et pour les élèves moyens vers 15 ans.

A bien d'autres stades du travail scolaire, la question « l'ordre intervient-il ? » est un stimulant efficace pour éveiller la pensée consciente et éviter les erreurs, qu'il s'agisse de termes, d'opérations ou de fonctions. Par exemple :

$$(a + b)^2 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2$$

c'est-à-dire une addition suivie de l'élévation au carré, ou bien deux élévations au carré suivies d'une addition ;

$$\sqrt{a + b} \quad \text{et} \quad \sqrt{a} + \sqrt{b},$$
$$\sqrt{a \times b} \quad \text{et} \quad \sqrt{a} \times \sqrt{b},$$
$$\log (a \underset{\times}{+} b) \quad \text{et} \quad \log a \underset{\times}{+} \log b,$$
$$\sin (A + B) \quad \text{et} \quad \sin A + \sin B,$$
$$\frac{d}{dx}(u \underset{\times}{+} v) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} u \underset{\times}{+} \frac{d}{dx} v$$
$$\int (u \underset{\times}{+} v) dx \quad \text{et} \quad \int u dx \underset{\times}{+} \int v dx$$

L'habitude de demander si l'ordre intervient rendra moins probables les réponses superficielles de pur verbalisme ou de symbolisme visuel. Pour les plus aptes, ce sera plus encore : ce sera une introduction à l'un des aspects des Mathématiques modernes, une préparation à un développement scientifique ultérieur.