SUR LES DÉFINITIONS

Il ne sera pas ici question des définitions axiomatiques, qui sont à la base d'une théorie et qu'il est préférable d'appeler *axiomes*, mais seulement des définitions que, une fois les axiomes posés, on est amené à créer au cours du développement de la théorie.

1) Que de fois n'avons-nous pas, comme M. Erhart, en classe de Quatrième, à la question : « Qu'est-ce qu'un parallélogramme ? », entendu la réponse suivante : « C'est un quadrilatère qui a ses côtés opposés égaux et parallèles et dont les diagonales... ». Le débutant, conformément à ses habitudes antérieures, réagit en littéraire, qui pense qu'un objet est d'autant mieux défini qu'on a cité un plus grand nombre de ses propriétés, et pour qui définition est description.

Le premier soin du maître doit donc être d'amener son élève à distinguer nettement ce qui est définition et ce qui est propriété démontrée. Il est amené à poser le principe suivant :

I. *Une définition doit comporter un minimum de conditions, conditions suffisantes, compatibles, indépendantes.*

Dans cette optique, il définit un parallélogramme par deux conditions simples (1) (AB parallèle à CD, AD parallèle à BC), un rectangle par trois conditions, un carré par quatre conditions. Ce procédé a de grands avantages : il assure la distinction fondamentale entre définition et propriété, c'est-à-dire la distinction entre propriétés dépendantes et propriétés indépendantes ; il oriente le débutant vers l'attitude scientifique fondamentale qui est la recherche de l'économie de la pensée, de la démarche strictement suffisante ; il permet d'apprécier le degré de complexité d'une définition, et, par suite, le degré de particularisation de l'objet défini, et achemine à la notion de dimension.

(1) Condition pouvant s'exprimer par une égalité de deux angles, de deux segments, de deux rapports.

2) Mais avec les exemples du rectangle et du carré nous rencontrons de suite une grosse difficulté. Si nous définissons le rectangle comme parallélogramme qui a un angle droit, nous définissons un quadrilatère dans lequel un angle est distingué et particularisé, nous accordons à cet angle un rôle privilégié et en quelque sorte directeur. Or, le rectangle a quatre angles droits : ils ont autant de droits l'un que l'autre à participer à sa définition. Pourquoi A plutôt que B ? Le sens de la justice — que nous appelons en Mathématiques le sens de la symétrie — nous fait une obligation de n'avantager aucun angle. De même, nous sentons qu'il est juste, et par conséquent beau, que le carré soit défini comme polygone régulier : quadrilatère ayant ses côtés égaux et ses angles égaux (six conditions au lieu de quatre).

Des raisons esthétiques — j'allais dire éthiques — nous conduisent donc à poser un second principe :

II. *Une définition doit respecter le principe de symétrie* (2).

3) Comment concilier ces deux principes contradictoires ?

a) Notons d'abord que la définition du rectangle par quatre angles droits ne peut être posée qu'après une justification. D'une façon générale, si le principe de symétrie conduit à employer dans une définition des données surabondantes, cela doit nécessairement venir après un *théorème de compatibilité*. Ainsi en est-il pour la définition du centre de gravité d'un triangle (point commun aux trois médianes), pour celle des triangles semblables (angles égaux, côtés proportionnels, soit cinq conditions au lieu du minimum de deux prescrit par les cas de similitude). pour celle du tétraèdre orthocentrique (trois couples d'arêtes opposées orthogonales), etc...

b) Notons ensuite que le principe de symétrie peut entraîner la donnée d'une *infinité* de conditions surabondantes : une perpendiculaire à un plan doit être définie comme droite rencontrant le plan et perpendiculaire à *toutes* les droites du plan passant par son pied (3). La définition négative des parallèles (deux droites n'ayant aucun point commun) respecte le principe de symétrie. La définition positive euclidienne ne la respecte qu'à condition de dire : droite formant avec *toute* sécante des angles alternes-internes égaux.

c) Notons enfin que tout théorème de compatibilité précédant une définition est au fond un théorème d'existence. Or, nous voici à un point capital :

III. *Toute définition proprement dite, même à données non surabondantes, exige un théorème d'existence.*

Un être mathématique, avant d'être défini, doit exister. En Mathématiques, l'existence précède l'essence. Tout mathématicien est existentialiste.

Ceci est bien évident lorsque la définition se rapporte à un invariant (puissance d'un point par rapport à un cercle) ou à un lieu (axe radical de deux cercles), ou à un ensemble (par exemple faisceau de cercles : ensemble tel que deux quelconques

---

(2) La surabondance pour raison de symétrie fourmille en Mathématiques. Une fonction homographique est définie par quatre constantes : $y = \frac{ax+b}{a'x+b'} (a' \neq 0,\ ab' - ba' \neq 0)$ et non par $y = \frac{a(x-\alpha)}{x-\beta}, a(\alpha-\beta) \neq 0$, forme pourtant plus économique et utile. Toute la trigonométrie repose sur une surabondance fondamentale : un arc, pourvu qu'on le ramène au premier quadrant, pouvant être défini par une seule ligne trigonométrique. Dans maints problèmes, les solutions élégantes sont obtenues en se fixant des données surabondantes ou des inconnues surabondantes.

(3) On pourrait aussi dire : droites orthogonales à toutes les droites du plan ; mais nous voulons laisser de côté le principe de la plus grande généralité, important en science, non en pédagogie.

ont comme axe radical une droite donnée) (4). Mais les définitions les plus humbles doivent aussi en principe ressortir à un théorème d'existence : celle du parallélogramme résulte du fait que si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre ; celle du triangle isocèle (AB = AC) résulte du fait qu'un triangle est déterminé par la donnée d'un angle et des deux côtés qui le comprennent. Le milieu, la bissectrice, l'angle droit, ne sont pas des données immédiates, mais les résultats de problèmes.

Certes, on fait pratiquement dans les débuts un large appel à l'intuition. Il semble d'ailleurs que certaines définitions résultent immédiatement de ce qui les précède et n'ont pas besoin de théorème d'existence. C'est que ces définitions (hauteur, supplément...) interviennent d'abord comme simples *commodités de langage*. Plutôt que de dire : la droite définie par un sommet et le milieu du côté opposé, il est plus économique de dire : médiane. A cette place, il s'agit plutôt d'une dénomination que d'une définition, si on veut qu'une définition donne essence à quelque chose ayant fait sa preuve de valeur. La notion de médiane ne prend valeur, et ne mérite par conséquent définition et nom qu'après qu'on a eu mis en évidence une propriété remarquable, celle de la concurrence des trois médianes, par exemple.

La nécessité du théorème d'existence précédant la définition va permettre de concilier les principes II et III. Il suffit en effet de charger le théorème d'existence, non seulement d'établir le nombre minimum de conditions créant la notion nouvelle, mais encore de rendre celle-ci de bonne tenue, et tout à fait présentable au public, c'est-à-dire équilibrée et aimable.

4) Enfin, il doit toujours être sensible à l'esprit de l'élève que la définition engendre, non pas un seul objet, mais une infinité d'objets. « Le rectangle » veut dire : tout rectangle. Le singulier de la définition doit toujours cacher un pluriel. Si l'on préfère :

IV. *La définition ramène à l'unité une infinité.*

Il semble que certaines définitions ne créent qu'un objet. S'il y a une infinité d'angles, il semble qu'il n'y ait qu'un angle droit. Cette conception est tout à fait fausse ; il y a une infinité d'angles droits. « Ils ne diffèrent que de situation » (Pascal). Si on définit l'unité de longueur, c'est pour la multiplier aussitôt, pour la faire glisser sur son support et tourner de mille manières autour d'un point.

Les définitions créant un invariant, un lieu, un ensemble, paraissent définir un objet unique ; mais cet objet est infiniment composé. La puissance d'un point par rapport à un cercle sous-entend l'infinité des sécantes passant par le point. La polaire d'un point par rapport à un cercle supporte et contient l'infinité de ses conjugués et le théorème d'existence qui précède la définition a pour but de mettre en évidence cette infinité. La définition exprime (paradoxalement) une *indétermination*.

La définition de la longueur d'un cercle paraît créer un nombre bien déterminé. Mais ce nombre est défini comme limite, par conséquent n'a d'existence que par l'infinité de ses approximations. Le périmètre du cercle n'est concevable que par l'infinité des périmètres des polygones réguliers inscrits.

5) Nous concluons. Toute définition proprement dite doit :

1° être précédée d'un théorème d'existence, qui lui donne essence et universalité ;

2° respecter le principe de symétrie ;

3° porter sur une infinité d'objets ;

4° ne pas viser du premier coup à la plus grande généralité, ce qui est crime pédagogique et sabotage par le haut.

A. Chauvin.

(4) Cette définition élémentaire ne respecte pas le principe de la plus grande généralité, car elle omet le faisceau des cercles concentriques, et aussi les deux faisceaux de cercles-droites, faisceaux qui, dans le plan conforme, sont les figures réduites des faisceaux de cercles.