Quelques problèmes inusités

I. — Classe de Première.

A) *Enoncé.* — 1) On considère la fonction $y\,x^2 + 2x$. Placer sa courbe représentative (C) par rapport à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy. Placer de même la ligne (D) d'équation $y = 2x + 1$ par rapport à ces mêmes axes. Déterminer les points communs à (D) et (C) par leurs coordonnées.

2) On dit qu'une fonction $y = F(x)$ est une fonction convexe dans un intervalle $]a, b[$, si, quels que soient α et β pris dans cet intervalle, l'ordonnée y d'un point de la courbe (Γ), représentative de la fonction F, est inférieure ou égale à celle, y_1, du point de même abscisse x appartenant à la corde de (Γ) qui joint les points d'abscisses α et β de (Γ).

A l'aide de cette définition, prouver que $y = ax + b$ est une fonction convexe dans tout intervalle $]a, b[$.

Prouver de même que $y = ax^2 + bx + c$, où $a > 0$, est convexe dans tout intervalle $]a, b[$. Il sera utile de recourir à une interprétation graphique.

3) On décide d'appliquer la définition précédente à la fonction $y = \Phi(x)$ construite comme suit :

— Elle coïncide avec $y = x^2 + 2x$ dans chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]+1, +\infty[$.

— Elle coïncide avec $y = 2x + 1$ dans l'intervalle $[-1, +1]$.

Etablir que $y = \Phi(x)$ est convexe dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. Il faudra pour cela considérer des intervalles $]\alpha, \beta[$ de chacun des types suivants :

$]\alpha, \beta[$ est tout ou partie de $]-\infty, -1[$ ou de $]+1, +\infty[$.
$]\alpha, \beta[$ est partie de $[-1, +1]$.
$]\alpha, \beta[$ contient -1, ou bien contient $+1$.
$]\alpha, \beta[$ contient -1 et $+1$.

B. *Commentaire.* — Problème à trois parties indépendantes, qui consiste à vérifier une définition. Il faut toutefois accepter qu'une fonction se définisse autrement que par une loi fixée, *ne varietur*, pour tout x.

Le recours aux mouvements d'un mobile, d'équations horaires distinctes dans divers intervalles de temps, usuel dès la Troisième, pourrait y aider les élèves.

II. — Classe de Mathématiques Elémentaires.

Premier sujet. — Dans l'ensemble des polynômes à une variable x, à coefficients rationnels, on définit une relation E entre deux polynômes $f(x)$, $\varphi(x)$, notée : $f(x) \sim \varphi(x)$ mod. E (lire : $f(x)$ reliée à $\varphi(x)$ module E). Cette relation a lieu si, et seulement si :

$$f(x) - \varphi(x) \equiv (x^2 - 1)\, q(x)$$

où $q(x)$ est un polynôme.

I. — *a*) Vérifier que E est une relation d'équivalence, c'est-à-dire qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

b) Prouver que tout polynôme $f(x)$ est relié (mod. E) à un polynôme déterminé $\Gamma(x)$ de degré inférieur à 2.

c) Utiliser I (*a*) pour former l'expression générale des polynômes reliés (mod. E) à un même polynôme $r(x)$ de degré inférieur à 2, à partir de $x^2 - 1$, de $r(x)$ et d'un polynôme arbitraire $q(x)$. On appellera une telle famille de polynômes « classe d'équivalence (mod. E) » de $r(x)$. On la désignera par R. Donner des exemples de telles classes. Cas de $r(x) \equiv 0$; de $r(x) \equiv 1$.

II. — *a*) Prouver que si :

$$f(x) \sim r(x) \text{ et } \varphi(x) \sim \rho(x) \text{ (mod. E), alors :}$$

(1) $f(x) \pm \varphi(x) \sim r(x) \pm \rho(x)$,
(2) $f(x) \times \varphi(x) \sim r(x) \times \rho(x)$. (mod. E)

II. — *b*) La question II *a* associe à des opérations sur les polynômes $f(x)$, $\varphi(x)$, appartenant respectivement aux classes (mod. E) R et P, des opérations analogues sur l'ensemble des polynômes des classes associées. La classe du polynôme $f(x) + \varphi(x)$ étant appelée « somme » des classes de $f(x)$ et de $\varphi(x)$, la classe du polynôme $f(x) \times \varphi(x)$ étant appelée classe « produit » des classes $f(x)$ et de $\psi(x)$, vérifier que :

si l'on a à la fois : $f(x) \sim r(x)$, $\varphi(x) \sim \rho(x)$, $f_1(x) \sim r_1(x)$, (mod. E),
alors : $\varphi(x)\,[f(x) + f_1(x)] \sim \rho(x)\,[r(x) + r_1(x)]$, (mod. E),
et de plus : $\rho(x).[r(x) + r_1(x)] \sim \rho(x) \times r(x) + \rho(x) \times r_1(x)$, (mod. E).

Quelle propriété de la « multiplication » des classes les équivalences précédentes traduisent-elles ?

III. — Dans la suite, on représentera chaque classe par son polynôme de degré inférieur à 2.

1) $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant de même classe R, peut-on avoir :

Ω : $$f(x) \times \varphi(x) \sim 0, \text{ (mod. E)}.$$

Examiner le cas où $r(x)$ est de degré 0, puis de degré 1.

$f(x)$ et $\varphi(x)$ étant de classes distinctes, étudier Ω :

si $f(x) \sim 0$, (mod. E) ; si $f(x)$ n'est pas équivalent à 0 (mod. E).

On montrera que, ou bien $\varphi(x) \sim 0$, ou bien $f(x)$ sont, l'une du type $h(x-1)$, l'autre du type $k(x+1)$.

2) Même étude pour : $f(x) \times \varphi(x) \sim 1$.

α) $f(x)$ et $\varphi(x)$ appartenant à la même classe, montrer qu'il y a quatre classes solutions ;

β) $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant de classes distinctes, déterminer la classe de $\varphi(x)$, connaissant celle de $f(x)$.

Remarque. — L'énoncé suppose connue la théorie de la division des polynômes suivant les puissances décroissantes. Il est dû à M. Châtelet (*Arithmétique et Algèbre modernes*).

Deuxième sujet. — 1° Soient $y_a(x)$ la fonction nulle pour $x < a$, égale à 1 pour $x \geqslant a$;

$z_a(x)$ la fonction nulle pour $x > a$, égale à 1 pour $x \leqslant a$.

Donner la valeur de $u(x) = y_a(x) \times z_b(x)$ suivant que x appartient ou non à $[a, b]$, a étant inférieur à b.

Même question pour : $w(x) = 1 - u(x)$.

2° A tout intervalle $[a, b]$, on attache la fonction $\varphi_{ab}(x)$ égale à 1 pour $x \in [a, b]$ et nulle pour $x \notin [a, b]$, appelée fonction caractéristique de $[a, b]$.

Soient $[a, b]$ et $[c, d]$ deux intervalles tels que : $a < c < b < d$.

a) Vérifier qu'à $[c, b]$ est attachée la fonction caractéristique $\rho(x) = \varphi_{a,b}^{(x)} \times \varphi_{c,d}^{(x)}$ pour tout x.

Donc : $$(1) \qquad \varphi_{c,b}^{(x)} = \varphi_{a,b}^{(x)} \times \varphi_{c,d}^{(x)}.$$

b) Quelles valeurs prend la fonction $\varphi_{a,b}^{(x)} + \varphi_{c,d}^{(x)}$ suivant la valeur de x ?

En déduire que la fonction caractéristique de $[a, d]$ est :

$$\varphi_{a,d}^{(x)} = \varphi_{a,b}^{(x)} + \varphi_{c,d}^{(x)} - \varphi_{a,b}^{(x)} \times \varphi_{c,d}^{(x)}.$$

3° Les constructions 2^e_a et 2^e_b attachent à l'intersection $X \cap Y = [c, b]$, supposée non vide, de deux intervalles $X = [a, b]$ et $Y = [c, d]$, ainsi qu'à leur réunion $X \cup Y = [a, d]$, deux fonctions caractéristiques ne dépendant que des fonctions caractéristiques de X et Y.

En posant $\varphi_{x \cap y} = 0$, si l'intersection [qui n'est plus nécessairement (c, b)] de $X = [a, b]$ et de $Y = [c, d]$ est vide, établir les formules :

$$\varphi_{xy} = \varphi_x + \varphi_y - \varphi_x \cdot \varphi_y, \quad \varphi_{x \cap y} = \varphi_x \cdot \varphi_z$$

valables quelle que soit la disposition relative des intervalles X et Y.

4° Ces formules associent à l'intersection de deux intervalles le produit des fonctions caractéristiques de ces intervalles.

Désignons par $\varphi_x * \varphi_y$ l'opération qui, à φ_x et φ_y, associe $\varphi_{x \cup y}$:

$$\varphi_{x \cup y} = \varphi_x * \varphi_y = \varphi_x + \varphi_y - \varphi_x \cdot \varphi_y$$

a) vérifier que :

$$\varphi_x . \varphi_x = \varphi_x, \quad \varphi_x * \varphi_x = \varphi_x.$$

b) vérifier que l'opération * est commutative et associative, c'est-à-dire : si Z est un autre intervalle $[e, f]$ et φ_z sa fonction caractéristique, on a :

$$\varphi_x * \varphi_y * \varphi_z = (\varphi_x * \varphi_y) * \varphi_z = \varphi_x * (\varphi_y * \varphi_z).$$

c) vérifier que :

$$\varphi_z . (\varphi_x * \varphi_y) = (\varphi_z . \varphi_x) * (\varphi_y . \varphi_z)$$
$$\varphi_z * (\varphi_x . \varphi_y) = (\varphi_z * \varphi_x) . (\varphi_z * \varphi_y).$$

5° Vérifier que :

$$\varphi_{z \cap (x \cup y)} = \varphi_{z \cap x} * \varphi_{z \cap y}$$
$$\varphi_{z \cap (x \cap y)} = \varphi_z . \varphi_x . \varphi_y$$
$$\varphi_{z \cup (x \cap y)} = \varphi_{z \cup x} . \varphi_{z \cup y}$$
$$\varphi_{z \cup (x \cup y)} = \varphi_z * \varphi_x * \varphi_y$$

Commentaire. — Les diverses fonctions φ ne pouvant prendre que les valeurs 0 et 1 (comme les restes mod. 2), les opérations . et * sont, sur l'ensemble M formé par 0 et 1, commutatives, associatives, distributives l'une par rapport à l'autre. L'ensemble M, muni de ces opérations, a une structure d'algèbre de Boole (voir article de CRUMEYROLLES, *Bulletin* 179).

Je remercie Mlle FÉLIX, qui a bien voulu m'envoyer des remarques sur une première rédaction de ces énoncés.

C. ALMÉRAS (*Lycée de Nîmes*).

Aux problèmes précédents, joignons ceux proposés naguère dans l'excellente revue « Les Humanités Scientifiques » que dirige notre collègue MINOIS (1). Certains désapprouveront sans doute ces textes, au moins en ce qui concerne les notations. Mais ce ne sont que des suggestions, que chacun est libre de discuter, et nous rappellerons que l'une des questions mises à l'étude, pour la période 1959-62, par la Commission Internationale de l'Enseignement mathématique, est celle-ci :

« *Quelles sont les questions de « Mathématiques modernes » et quelles sont les applications des « Mathématiques modernes » qui peuvent trouver place dans les programmes de l'Enseignement Secondaire ?*

I. — Construire les courbes représentatives des fonctions :

$$y = f(x) = 3 - |x - |3 - x|\,|,$$
$$y = g(x) = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{|1 - x^2|}{x^2 - 1}\right\}$$
$$y = h(x) = \sqrt{|1 - x^2|},$$

ainsi que la courbe représentative de la fonction $g(x) . h(x)$.

II. — Soit f une fonction définie pour toutes les valeurs de x. On désignera par E_f l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ s'annule ; par E_f^+ l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles f est strictement positif, et par E_f^- l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles f est strictement négatif.

1° Soient f et g deux fonctions ; exprimer, à l'aide des signes $\cup$ et $\cap$, E_{fg},

(1) *Les Humanités scientifiques*, décembre 1956. Ces énoncés étaient dus à notre collègue GLAESER, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Nancy.

E^{+}_{fg} et E^{-}_{fg}, (où fg désigne le produit des fonctions f et g), en fonction des ensembles analogues attachés aux fonctions f et g.

2° Calculer, en utilisant les formules établies au 1°, les ensembles E_{fgh}, E^{+}_{fgh} et E^{-}_{fgh}, où f, g, h, sont trois fonctions données.

(On pourra vérifier les formules obtenues en utilisant les fonctions de I comme exemples).

III. — On désigne par Z l'ensemble des entiers relatifs. Soit E l'ensemble de Z^4, formé des quadruplets (a, b, c, d) satisfaisant à la relation : $ad - cb = 1$.

A tout quadruplet $(a, b, c, d) \in E$, on fait correspondre la transformation : $\mathcal{C}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ qui à tout nombre se fait correspondre le nombre $\mathcal{C}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

1° Deux éléments distincts de E peuvent-ils définir la même transformation $\mathcal{C}$?

2° On désigne par $\mathcal{C}\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \cdot \mathcal{C}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ la transformation qui consiste à effectuer la transformation $\mathcal{C}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, puis à effectuer la transformation $\mathcal{C}\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ sur le résultat. Montrer que les transformations $\mathcal{C}$ forment un groupe pour cette opération.