IV. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES

SUR L'INTRODUCTION DES NOMBRES COMPLEXES

par P. SAMUEL, *professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand*

A la suite de l'audition et de la discussion de nombreuses leçons d'Agrégation, je crois pouvoir être utile aux candidats par quelques remarques sur les méthodes d'introduction des nombres complexes.

Méthode algébrique.

La méthode algébrique consiste à introduire formellement un élément i vérifiant $i^2 + 1 = 0$. Deux variantes sont possibles :

a) Construction de l'anneau quotient $R[X]/(X^2 + 1)$ de l'anneau $R[X]$ des polynômes à coefficients réels par l'idéal formé des multiples de $X^2 + 1$. Cette variante est assez naturelle, car elle consiste à calculer « modulo la relation désirée ». Mais elle n'est rapide que si on a traité au préalable des anneaux quotients.

b) Calcul sur les couples (a, b) de nombres réels. On définit $(a, b) + (a', b')$ comme étant $(a + a', b + b')$ et $(a, b)\,(a', b')$ comme étant $(aa' - bb', ab' + ba')$. La vérification du fait que, pour cette addition et cette multiplication, les couples forment un corps commutatif, est très rapide et facile (la seule chose non évidente est l'associativité de la multiplication). Cependant cette variante est assez artificielle ; faite devant des élèves, elle exigerait une habile introduction heuristique.

Méthode géométrique.

La méthode géométrique consiste à définir les nombres complexes non nuls comme étant les *similitudes directes* de centre donné du plan. Ayant entendu cette méthode exposée avec plus ou moins de bonheur par de nombreux agrégatifs, je voudrais établir ici une nette distinction entre, d'une part, les faits géométriques utilisés, d'autre part, les vérifications purement formelles qui en résultent ; il est en effet un peu choquant de voir des agrégatifs mélanger les deux choses.

On suppose connu (ou on démontre au préalable) le fait algébrique suivant : étant donné un espace vectoriel E, les applications linéaires de E dans E forment un *anneau* L(E) (addition de deux applications par addition des valeurs, multiplication par composition des applications). La vérification de ceci ne présente aucune difficulté, et c'est, en tout état de cause, un résultat fondamental d'algèbre linéaire.

On définit alors les similitudes directes du plan R^2 (par exemple comme produits d'homothéties et de rotations), et on vérifie géométriquement les résultats suivants :

(a) toute similitude directe (de centre O) de R^2 est une *application linéaire* de R^2 dans R^2 ;

(b) elles forment un *groupe commutatif* S ;

(c) ce groupe contient celui des homothéties non nulles ;

(d) étant donnés deux vecteurs non nuls, x, y de R^2, il existe une similitude directe $s \in S$ telle que $y = s(x)$ (*transitivité* de S).

Il résulte de (a) que S est un sous-groupe multiplicatif de l'anneau $\underline{L}(R^2)$. Il s'agit de montrer que la partie C de $\underline{L}(R^2)$ obtenue en adjoignant O à S est un *sous-corps commutatif* de $L(R^2)$. Le seul point qui ne soit pas évident est le fait que C est un sous-groupe additif de $L(R^2)$; en voici la démonstration :

1) Notons (— 1) l'application linéaire $x \to -x$, c'est-à-dire l'homothétie de rapport — 1 ; on a $(-1) \in C$ [par (c)]. Alors, pour $s \in C$, on a $-s = (-1)\,s \in C$.

2) Soient s et s' deux éléments de C ; montrons que $s + s'$ appartient à C. C'est évident, si l'un des trois éléments s, s', $s + s'$ est nul. Supposons donc $s \in S$, $s' \in S$ et $s + s' \neq 0$. Il existe alors un vecteur x de R^2 tel que $(s + s')(x) \neq 0$. D'après (d) il existe une similitude directe $s'' \in S$ telle que $s''(x) = (s + s')(x)$. Nous allons montrer que l'on a $s''(y) = (s + s')(y)$ pour tout vecteur y de R^2, c'est-à-dire $s'' = s + s'$. Or, comme on peut supposer $y \neq 0$, il existe $t \in S$, tel que $y = t(x)$ [par (d)]. On a alors $(s + s')(y) = s(y) + s'(y) = st(x) + s't(x)$, et aussi $s''(y) = s''t(x) = ts''(x)$ (commutativité de S !) $= t(s(x) + s'(x)) = ts(x) + ts'(x)$; d'où notre assertion en vertu encore de la commutativité de S.

Ceci étant, la *représentation géométrique* des nombres complexes arrive très naturellement. On fixe, une fois pour toutes, un vecteur unitaire u de R^2. A tout nombre complexe $z \in C$, on associe le vecteur $z(u)$ (ou encore son extrémité). D'après (d) tous les vecteurs de R^2 sont ainsi obtenus (autrement dit $z \to z(u)$ est une application de C *sur* R^2). Pour montrer que cette application est *biunivoque*, on peut constater géométriquement que l'égalité des vecteurs $z(u)$ et $z'(u)$ entraîne celle des similitudes z et z' ; mais il est intéressant de remarquer que cette biunivocité est une conséquence formelle de (b) et (d) (en termes savants : commutativité + transitivité entraîne simple transitivité). En effet, si $z(u) = z'(u)$ et si y est un vecteur $\neq 0$ quelconque de R^2, il existe $s \in S$ tel que $y = s(u)$; d'où

$$z(y) = zs(u) = sz(u) = sz'(u) = z's(u) = z'(y) \ ;$$

comme on a $z(y) = z'(y)$ pour tout $y \in R^2$, on a bien $z = z'$.

On a ainsi une correspondance biunivoque entre C et R^2, et il suffit de l'expliciter pour obtenir toutes les propriétés classiques.

Remarque (débordant probablement du cadre d'une leçon d'Agrégation). — La construction de C, qui a été donnée, peut se généraliser : on se donne un corps commutatif K, un espace vectoriel E sur K, et un sous-groupe multiplicatif commutatif S de $\underline{L}(E)$ qui contienne les homothéties et opère transitivement dans l'ensemble des éléments non nuls de E ; alors la partie K' de $\underline{L}(E)$, réunion de S et de O est un sous-corps commutatif de l'anneau $\underline{L}(E)$ (la démonstration est la même que ci-dessus). Réciproquement tout corps commutatif K' contenant K est obtenu par ce procédé : il suffit de prendre $E = K'$, et de prendre pour S l'ensemble des « multiplications » $x \to ax$ $(x \in K')$ où a parcourt l'ensemble des éléments non nuls de K'.