II. PAGES A RELIRE

UN COURS DE FACULTÉ SOUS LOUIS-PHILIPPE

« Les étapes de la philosophie mathématique », de Léon BRUNSCHVICG, sont un beau livre qui fit quelque bruit lors de sa parution en 1912 et que l'on consulte toujours avec profit.

Mais, car il y a toujours un mais, encore faut-il le lire avec prudence. C'est ainsi qu'il oppose, page 334, la conception de la continuité de Cauchy et celle qu'il croit déceler dans un texte de Cournot, datant de 1847, « De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie », 1847.

Le lecteur superficiel risque devant la citation, fort courte d'ailleurs, de cet écrit du mathématicien philosophe, de prendre celui-ci pour un méchant rétrograde. Or, tout au contraire, il est un excellent témoin de son époque, très au courant de l'actualité scientifique et accessible aux idées les plus modernes.

Sans discuter ici la citation donnée par Léon Brunschvicg, je vais fournir quelques brefs renseignements sur Cournot, puis présenter un texte de lui, daté de 1841.

Antoine-Augustin Cournot (1801-1877) entra à l'Ecole Normale en 1821. Inspecteur-adjoint de l'Académie de Paris en 1831, professeur à la Faculté des Sciences de Lyon en 1834, recteur de l'Académie de Grenoble en 1835, Inspecteur général en 1838, recteur de l'Académie de Dijon en 1854, il prit sa retraite en 1862.

Il est connu comme mathématicien, comme philosophe et comme économiste.

En 1841, il écrit l'ouvrage dont nous publions la préface : « Traité élémentaire de la théorie des Fonctions et du Calcul infinitésimal », par M. A.-A. COURNOT, inspecteur général des études.

L'ouvrage est dédié « A la mémoire de M. Poisson, pair de France, membre de l'Académie des Sciences et du Conseil royal de l'instruction publique : témoignage de reconnaissance et de pieux attachement. »

Poisson venait de décéder le 25 avril 1840.

La préface est belle, dans une langue fort pure. On sent, à sa lecture, que tout n'était pas paix et harmonie dans le monde mathématique de la Monarchie de Juillet. Mais n'en est-il pas de même sous la Cinquième République ?

Jean ITARD.

PREFACE

Il y a déjà plusieurs années qu'ayant été chargé de remplir la chaire d'Analyse à la Faculté des Sciences de Lyon, je me suis trouvé conduit à jeter sur le papier l'esquisse de mon cours. Quelques personnes favorablement prévenues m'ont engagé à compléter ce travail, que je me décide à faire paraître, malgré la publication récente d'ouvrages fort estimables sur le même sujet. J'ai pu croire que je tirerais, dans l'accomplissement de ma tâche modeste, quelques avantages de ma position personnelle, qui ne m'assujettit point à un programme officiel, ni ne me suggère de prédilection trop exclusive pour la manière d'aucun maître. J'ai pu croire aussi que, porté depuis longtemps par goût vers l'étude de la philosophie des sciences (à laquelle tous sacrifient un peu, même en en médisant), j'étais assez bien préparé à traiter un sujet où des considérations de ce genre sont inévitables, et où chacun fait, bon gré, mal gré, sa *métaphysique* (1). Voici, en résumé, la marche que j'ai suivie dans l'exposition des principes de la matière.

J'ai cherché à faire comprendre comment, par les progrès de l'abstraction mathématique, on est amené à concevoir l'existence d'une théorie qui a pour objet les propriétés générales des fonctions continues : que ces fonctions s'expriment ou non par les signes de l'algèbre ou par d'autres symboles, d'une valeur mathématiquement définie. Il y a plus d'un avantage à distinguer ainsi la théorie des fonctions, de l'application qui s'en fait aux fonctions de l'algèbre et de la trigonométrie, et c'est en ce sens que j'ai donné au présent ouvrage le titre de *Traité élémentaire de la Théorie des Fonctions.*

Dans l'état actuel de l'analyse, la Théorie des Fonctions consiste presque entièrement dans la théorie des rapports qui s'établissent entre les fonctions que Lagrange a nommées *primitives* et *dérivées,* et l'expression analytique de ces rapports engendre ce qu'on a appelé depuis Leibniz le *Calcul différentiel et intégral,* ou bien le *Calcul infinitésimal,* à cause de la notion d'*infiniment petit* que Leibniz y a jointe. Pour peu que l'on ait une teinture de l'histoire des sciences, on n'ignore pas que Newton a inventé et fait connaître, sous le nom de *Méthode des fluxions,* un calcul qui a le même objet que celui de Leibniz, et l'on sait que le résultat d'un débat animé entre les partisans de ces grands hommes, a été d'assurer à chacun d'eux un droit égal à cette mémorable découverte.

Le développement parallèle des idées de Newton et de celles de Leibniz n'est pas seulement un fait historique ; il tient au fond du sujet, et ne peut être négligé

---

(1) Cournot ne cite personne. Cependant, l'abbé Moigno (1804-1884) se trouva visé. Il venait de faire paraître chez Bachelier, en 1840, le tome I[er] de ses « Leçons de Calcul différentiel et de Calcul intégral rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. A.-L. Cauchy. Par l'abbé Moigno. » Il écrit dans l'introduction : « Plusieurs savants... [me persuadèrent] que je rendrais un service éminent à l'enseignement des Mathématiques si j'arrivais à populariser les belles et rigoureuses méthodes du plus habile de nos géomètres. » Dans l'introduction au tome II du même ouvrage, datée du 15 avril 1844, il note : « J'ai une prédilection évidente pour la manière de M. Cauchy, j'en conviens... Mais cette prédilection n'est pas exclusive... et si M. Cournot veut bien comparer quelques-unes de ces Leçons aux chapitres correspondants de son ouvrage... il regrettera l'accusation qu'il a trop légèrement portée contre moi... Initié par mon éducation, par mes études, et par l'enseignement de la théologie, à toutes les subtilités de l'école, j'avais, suivant l'expression de M. Cournot, acquis le droit de *faire ma métaphysique ;* je ne l'ai pas voulu. »

Signalons que « la métaphysique » de 1840 est fort proche de l'axiomatique de nos jours, quant aux intentions du moins. Pour la rigueur, c'est autre chose.

dans une exposition didactique sans que l'exposition pèche en quelque point : les deux théories se complètent l'une l'autre, sans qu'on en puisse assigner une troisième qui ne rentre au fond dans l'une ou dans l'autre. J'ai cherché à faire sentir les raisons de cette double solution, autant que cela m'était permis dans un ouvrage destiné à des études élémentaires, et jusqu'à un certain point pratiques.

La méthode de Lagrange, avec les modifications qu'elle a reçues depuis qu'on a reconnu l'impossibilité de fonder, comme l'entendait ce grand géomètre, tout le calcul différentiel sur de simples identités algébriques, n'est au fond qu'un retour à la méthode de Newton. Sa notation, qu'il est utile dans une foule de cas d'employer concurremment avec celle de Leibniz, ne diffère par rien d'essentiel de la notation newtonienne, et les épithètes vagues de *primitives* et de *dérivées* ne valent pas les dénominations de *fluentes* et de *fluxions* auxquelles Newton avait donné un sens si précis. Mais je n'ai pas oublié que, dans un livre à l'usage des jeunes étudiants, il faut parler le langage actuellement reçu dans les écoles. En conséquence, j'ai exposé d'abord, dans un chapitre spécial, la théorie des fonctions dérivées, sous la forme qu'on lui donne maintenant ; puis, je me suis attaché à faire comprendre la théorie des infiniment petits, et l'identité des résultats obtenus par la méthode infinitésimale avec ceux que donne la considération des limites et des fonctions dérivées. Une fois cette identité bien saisie par le lecteur, il peut sans scrupule accepter les démonstrations par l'infiniment petit, et profiter des simplifications que ce tour de démonstration a la propriété d'opérer.

De cette manière, le lecteur n'arrive qu'avec lenteur, quoique sans circuits, à la différentiation des fonctions élémentaires, par laquelle les auteurs débutent ordinairement. Je souhaite que cette lenteur ne soit pas trop blâmée, et je m'imagine que, si j'ai réussi à me rendre clair, au moins à une seconde lecture, les commençants trouveront quelque avantage, pour la suite de leurs études, à avoir insisté un peu longuement sur ces généralités.

Pour représenter des fonctions qui peuvent être quelconques, et même n'avoir pas d'expression mathématique, j'ai fait un continuel usage des courbes. Ce signe, si naturel et si commode, rend presque évidents une foule de résultats dont la preuve exige, pour être suivie, un certain effort d'esprit, quand on ne s'aide pas de considérations graphiques, et il ne faut pas confondre l'emploi de ces considérations, pour la facile intelligence de la théorie des fonctions, avec l'application du calcul différentiel à la géométrie, qui fait, dans ce premier volume, l'objet d'un livre particulier. Les applications géométriques du calcul intégral ont beaucoup moins d'étendue, et on les trouvera dans le second volume, exposées après les théories de pure analyse auxquelles elles se rapportent le plus immédiatement.

Il était permis à une autre époque de regarder les applications géométriques comme le but principal de l'analyse : il n'en est plus de même depuis les rapides progrès de la physique mathématique. La discussion des questions particulières de physique, auxquelles les géomètres ont appliqué l'analyse, n'appartient pas sans doute à un traité de Mathématiques pures ; mais les propriétés générales des fonctions, en tant qu'elles représentent des grandeurs physiques, variables dans l'espace et dans le temps, sont un sujet de spéculations générales et abstraites qui n'emprunte rien à l'expérience, et qui appartient aux Mathématiques pures, aussi bien que l'exposition des propriétés de l'étendue. Nous avons appelé l'attention du lecteur sur ces propriétés générales des fonctions physiques et des fonctions du temps, chaque fois que l'occasion s'en est présentée, et sous ce rapport le présent ouvrage pourrait être considéré comme une introduction générale à la physique mathématique.

En adoptant la forme de Traité, j'ai dû m'attacher à rendre l'ordre et la distribution des matières aussi naturels que possible ; sans ignorer qu'on ne peut atteindre ce but de manière à éviter toute association arbitraire et toute séparation regrettable.

Le premier volume renferme ce qu'on a coutume de comprendre sous la rubrique de *Calcul différentiel* ; le second est consacré au *Calcul intégral* et à celui des *diffé-*

rences finies ; mais je donne, dès le commencement du premier volume, au livre intitulé *des Principes,* les premières notions du calcul intégral et du calcul des différences finies, qui m'ont semblé nécessaires pour rendre plus claires ou plus complètes, ou pour fixer à leur juste place des théories qui se rattachent au calcul différentiel.

Je me suis écarté de l'usage en plaçant le *Calcul des variations* dans le cinquième livre, qui a pour objet les quadratures, avant la théorie de l'intégration des équations différentielles. Cette innovation me paraît motivée sur l'ordre des difficultés, non moins que sur l'enchaînement des matières. En écartant le calcul des variations de la théorie des quadratures, à laquelle il se rattache naturellement, pour le rejeter après l'intégration des équations aux différences partielles, on induit les commençants en erreur sur la vraie nature de cette belle méthode de Lagrange, comme si elle constituait (selon l'expression proposée par un auteur de mérite) un nouveau calcul *hypertranscendant ;* tandis que ce n'est qu'une élégante application des principes du calcul différentiel aux fonctions renfermées sous le signe de quadrature.

Le progrès actuel des sciences mathématiques n'exige pas, comme celui de quelques branches de la physique, une refonte continuelle des éléments : cependant, à mesure que certaines théories se simplifient, ou reçoivent des applications plus importantes, elles acquièrent des droits à passer dans l'enseignement élémentaire, et à y prendre la place d'autres spéculations auxquelles on n'a pas reconnu la même fécondité. Il m'a semblé que les principes de la théorie des fonctions elliptiques et euléeriennes devaient se trouver dans les éléments du calcul intégral ; que les exemples de détermination d'intégrales définies devaient y être multipliés ; qu'il fallait insister sur les nouveaux procédés d'intégration des équations linéaires aux différences partielles, assez pour préparer convenablement le lecteur à l'intelligence des travaux spéciaux de physique mathématique. D'un autre côté, comme j'ai eu surtout en vue l'intérêt des jeunes gens qui se préparent à nos grades et à nos concours universitaires, j'ai indiqué par un astérisque, dans le texte et dans la table des chapitres, les matières qui, d'après l'usage, ne sont point réputées exigées pour la licence ès-sciences mathématiques, ni pour le concours d'agrégation, dont le grade de licencié est une condition préliminaire.

Il ne faut pas confondre, dans une exposition didactique, l'enchaînement logique des propositions, avec les liaisons naturelles qu'ont entre elles les vérités physiques ou abstraites qu'il s'agit d'exposer. On peut satisfaire à toutes les conditions d'un enchaînement logique, sans éclairer l'esprit sur les rapports essentiels des idées et des théories auxquelles on l'applique. Les intelligences pénétrantes finissent par saisir ces rapports, et n'en eussent-elles qu'une perception confuse, cela suffit pour les guider dans la recherche de vérités nouvelles ; mais il est bon de faciliter ce travail aux esprits ordinaires. On ne sera pas surpris que, d'après cette manière de voir, je n'aie pas fait consister seulement ma tâche dans la reproduction d'une suite de démonstrations pour le tableau. J'avoue même que j'attacherais moins de prix à mettre dans la démonstration d'un théorème cette rigueur extrême, si recherchée maintenant de quelques personnes, qu'à faire clairement apercevoir la raison de ce théorème et ses connexions avec les autres vérités mathématiques. Je prie donc que l'on m'accorde quelquefois, pour la commodité de l'exposition, et pour ne pas décourager dès le début mes jeunes lecteurs, des démonstrations qui ont satisfait si longtemps les plus grands géomètres.

.....

Quoiqu'on ne puisse se faire une loi, dans un livre élémentaire, de citer les inventeurs, j'ai passablement multiplié les citations, lorsqu'elles se rattachaient aux premières notions de l'histore des sciences, que les élèves eux-mêmes doivent posséder, ou lorsqu'elles pouvaient leur inspirer un juste respect pour ceux de nos contemporains dont les travaux contribuent aux progrès de la science. Les personnes déjà versées dans l'analyse supérieure, au jugement desquelles je soumets les idées qui me sont propres, reconnaîtront bien, sans que je les indique ici, les sources nom-

breuses auxquelles j'ai dû puiser sans scrupule. Si je cite en particulier le grand ouvrage de notre respectable maître, M. Lacroix, c'est pour acquitter une dette de reconnaissance personnelle ; car tout a été dit depuis longtemps sur le mérite du livre, et sur les services de tout genre que son auteur a rendus à l'enseignement (2).

J'ai évité soigneusement d'employer des mots qui n'eussent pas déjà cours, et l'on ne trouvera dans ce Traité, quant à la terminologie, qu'une innovation de quelque importance : celle qui consiste à distinguer par des numéros d'ordre les diverses solutions de continuité d'une fonction. Ainsi, je dis qu'une fonction éprouve une solution de continuité du premier ordre, lorsqu'elle prend une valeur infinie ou qu'elle passe brusquement d'une valeur finie à une autre ; si une pareille solution de continuité est subie par la fonction dérivée du premier ordre, je dis que la fonction primitive éprouve une solution de continuité du second ordre, et ainsi de suite. Cette définition a pour but, non seulement d'abréger le discours, mais aussi de donner plus de précision, à certaines notions fondamentales, et je m'étonne qu'on ne l'ait pas déjà introduite dans les livres didactiques (3).

Je n'ai pas craint d'employer, dans quelques passages fort courts du premier volume, des termes dont l'acception philosophique est bien connue, mais qui ne semblent pas appartenir à la langue mathématique. Ceux des lecteurs que ces termes choqueraient, peuvent passer outre sans inconvénient. J'ai conservé ces passages, en les resserrant, pour des personnes d'une autre tournure d'esprit, et peut-être trouverai-je une occasion de développer utilement les idées qui n'y sont qu'indiquées. Ce que je dis dans le chapitre IV du quatrième livre, sur les connexions de la géométrie et de l'algèbre, comporterait aussi des développements dans lesquels je ne suis pas entré, pour ne pas m'écarter du but principal que j'avais en vue.

---

(2) S.-F. Lacroix (1765-1843). Il est fait allusion ici à son « Traité du Calcul différentiel et du calcul intégral » en trois volumes, 2e édition : 1810, 1814, 1819.

(3) Nous sommes en 1841. La nouvelle définition de la continuité, qu'adopte d'ailleurs Cournot, a été rendue publique par Cauchy en 1821. Pensons au mal que nous avons aujourd'hui à introduire dans nos classes de Spéciales le calcul matriciel que Cayley trouva en 1843 !

Dans le cours de l'ouvrage, Cournot précise : « Une fonction quelconque étant représentée par l'ordonnée d'une courbe, cette courbe peut être continue et offrir en un point ce que dans les arts graphiques on appelle un *jarret*. La fonction dérivée éprouve une ruputure et la fonction primitive éprouve une solution de continuité du second ordre. »