BULLETIN de l'ASSOCIATION des PROFESSEURS de MATHÉMATIQUES de l'Enseignement Public

SOMMAIRE

I. ETUDES.

A. REVUZ : Théorie de l'intégration (II) 173

R. FORTET : Le calcul des probabilités. Les grandes lignes de son développement et ses principaux champs d'application 182

II. ESSAI.

A. BUQUET : Le théorème de Bachet 194

III. PROBLEMES PEDAGOGIQUES.

P. M. VAN HIELE : La pensée de l'enfant et la géométrie . 199

G. WALUSINSKI : Sur les problèmes 206

C. DELAPIERRE : Exemple de problème à motif technique .. 212

E. ANGLADE : Sur l'unicité de la réduction d'un déplacement à un déplacement hélicoïdal 214

H. MAS : Le premier cas d'égalité méconnu 215

Mlle VERVAECKE : Quelques remarques sur la méthode de substitution appliquée à un système de **m** équations à **n** inconnues 217

Mlle MASSON : Le baccalauréat Sciences Expérimentales .. 219

IV. DOCUMENTATION.

Y. MARTIN : L'I.P.E.S. de Rennes 221

V. LA VIE DE L'ASSOCIATION.

A. M. : Rapport sur l'activité générale de l'A.P.M. 222

Compte rendu financier 229

CHAZAL : Rapport sur les concours des Grandes Ecoles 230

Mlle FÉLIX : Rapport sur les définitions de mots et notations 232

G. WALUSINSKI : Querelle de mots ? 235

G. WALUSINSKI : Pour un programme d'action de l'A.P.M. . 238

Réunion du Bureau du 18 décembre 1958 242

Réunion du Comité du 29 janvier 1959 243

Bloc-notes de l'A.P.M. 244

38e année — N° 198 Publication trimestrielle **Mars 1959**

Le n° 197 est un recueil de problèmes (baccalauréat).

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD

GRENOBLE (Isère)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU

Professeurs au Lycée de Grenoble

PROGRAMMES DU 18 AVRIL 1947

TARIF JANVIER 1959

Taxe locale comprise

ARITHMÉTIQUE 6e	**336 »**
DESSIN GÉOMÉTRIQUE 6e et 5e	**188 »**
GEOMÉTRIE 5e et 4e avec fascicule de mise à jour 1958	**621 »**
Fascicule de mise à jour 1958 pour la Géométrie 4e	**76 »**
ARITHMÉTIQUE 5e	**458 »**
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 4e avec fascicule de mise à jour 1958	**412 »**
Fascicule de mise à jour 1958 pour l'Algèbre de 4e	**76 »**
Compléments de mise à jour 1958 pour l'Algèbre et la Géométrie de 4e	**152 »**
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 3e	**510 »**
GEOMÉTRIE 3e. — Nouvelle édition. Programme 1958	**650 »**
GEOMÉTRIE 5e, 4e, 3e, cartonnée	**895 »**
COMPLÉMENTS d'ALGÈBRE et de GÉOMÉTRIE 3e MODERNE COURT.	**102 »**
ALGÈBRE 2e A.B.C.M.	**560 »**
GÉOMÉTRIE 2e A.B.C.M.	**550 »**
ALGÈBRE 1re A.B.	**295 »**
ALGÈBRE et TRIGONOMÉTRIE 1re C.M.	**662 »**
GÉOMÉTRIE 1re A.B.C.M.	**509 »**

POUR LES EXAMENS :

QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT, 1re partie, A.B.C.M.	**427 »**
LES MATHÉMATIQUES AU B.E.P.C., 156 PAGES, NOMBREUX CLICHÉS	**458 »**

38e Année — N° 198 Mars 1959

BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

I. ÉTUDES

THÉORIE DE L'INTÉGRATION (II)

par A. REVUZ
Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers *

Les mesures dénombrablement additives et l'intégrale de Lebesgue

I. LES σ-ANNEAUX ET LES MESURES σ-ADDITIVES

1) *Idée initiale. Position du problème.*

Etant donné un anneau $\mathcal{M}$ et une étendue positive m sur $\mathcal{M}$, nous avons vu que le principe d'Eudoxe ne pouvait être appliqué avec profit qu'une seule fois, et qu'il pouvait exister des ensembles non quarrables. Par exemple, sur le segment $[0, 1]$, partant des intervalles et de leur longueur, on trouve que l'ensemble des rationnels n'est pas quarrable. Il est cependant dénombrable, et chaque point, comme segment dont les extrémités sont confondues, a une longueur nulle : la série de terme général nul a une somme nulle. Il est « naturel » alors d'attribuer zéro comme « longueur » à l'ensemble des rationnels, et également d'attribuer comme « longueur » à tout ouvert O inclus dans $[0, 1]$, la somme s, inférieure ou égale à 1, de la série à termes positifs dont les termes sont les longueurs des intervalles deux à deux disjoints dont l'ouvert est réunion et d'attribuer $1 - s$ comme longueur au fermé $[0, 1] - O$.

Mais il ne peut être question d'étendre la « longueur » à certains ensembles particuliers seulement, s'il s'agit de créer une théorie utilisable.

L'idée à dégager des exemples précédents est la suivante : une réunion dénombrable d'ensembles quarrables A_i deux à deux disjoints doit recevoir une mesure, somme de la série dont les termes sont les étendues mA_i.

Pour préciser, donnons deux définitions :

Un σ-anneau sur un ensemble X est une partie $\mathcal{M}$ de $\mathfrak{p}(X)$ telle que, N étant l'ensemble des entiers positifs :

* Conférence prononcée le 20 mars 1958, à l'Institut Henri-Poincaré, et organisée par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

$$A_i \in \mathcal{M},\ i \in N, \implies \bigcup_{i \in N} A_i \in \mathcal{M}$$

$$A, B \in \mathcal{M} \implies A - B \in \mathcal{M}$$

Une mesure (ou pour préciser une mesure dénombrablement additive ou σ-additive) est une application μ de $\mathcal{M}$ dans R telle que :

si $A_i \cap A_j = \emptyset$ quand $i \neq j$

on ait $\mu\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right) = \sum_{i \in N} \mu A_i$.

Nous nous limiterons d'abord à des mesures positives, mais nous accepterons la valeur $+\infty$ pour une mesure.

Avec ces définitions, nous pouvons poser les problèmes :

α) Existe-t-il des σ-anneaux ?

β) Existe-t-il des mesures ?

γ) Un anneau $\mathcal{M}_0$ et une étendue m sur $\mathcal{M}_0$ étant donnés, existe-t-il un σ-anneau $\mathcal{M}$ contenant $\mathcal{M}_0$ et une mesure μ sur m dont la restriction à $\mathcal{M}_0$ soit m ?

La réponse à la question α) est immédiate : $\mathfrak{p}(X)$ est un σ-anneau. De plus, l'intersection d'une famille quelconque de σ-anneaux est un σ-anneau ; étant donné une partie $\mathcal{Y} \neq \emptyset$ quelconque de $\mathfrak{p}(X)$, il existe donc un plus petit σ-anneau non vide contenant $\mathcal{Y}$: ensemble non vide (il contient $\mathcal{Y}$), intersection des σ-anneaux contenant $\mathcal{Y}$.

Les réponses aux questions β) et γ) que nous allons donner maintenant sont nettement moins aisées.

2) *Mesure extérieure. Ensembles mesurables.*

Partons d'un anneau $\mathcal{M}_0$ et d'une étendue positive m sur $\mathcal{M}_0$. On peut essayer de remédier aux insuffisances du principe d'Eudoxe en substituant des réunions dénombrables aux réunions finies :

Nous considérerons donc les ensembles A inclus dans au moins une réunion dénombrable d'ensembles $\alpha_i \in \mathcal{M}_0$, soit $H(\mathcal{M}_0)$ l'ensemble de ces A.

Les ensembles $\bigcup_{i \in N} \alpha_i$ joueront pour A le rôle des α du principe d'Eudoxe [cf. 1re partie].

Nous sommes donc conduits à définir une application :

m^* de $H(\mathcal{M}_0)$ dans $\bar{R}_+$ ($[0, +\infty]$) par

$$m^* A = \inf \left\{ \sum_{i \in N} m\alpha_i ;\ A \subset \bigcup_{i \in N} \alpha_i,\ \alpha_i \in \mathcal{M} \right\}^{(1)}$$

m^* sera dite une mesure extérieure.

(1) A noter qu'on a toujours $m^* \emptyset = 0$.

Sa propriété fondamentale est sa *sous-additivité ;*

il est clair que $A_i \in H(\mathcal{M}_0)$, $i \in N \Longrightarrow \bigcup_{i \in N} A_i \in H(\mathcal{M}_0)$ (1)

et on a alors $m^*\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right) \leqslant \sum_{i \in N} m^* A_i$.

Exemple : La mesure extérieure de l'ensemble des rationnels de [0, 1] est nulle (prendre pour α_i un intervalle de longueur $\frac{\varepsilon}{2^i}$ contenant le $i^{\text{ème}}$ des points rationnels rangés dans une suite).

Mais, on ne peut en général trouver d'ensembles jouant le rôle des ensembles β du principe d'Eudoxe. [Par exemple, pour un fermé F de [0, 1] et l'ouvert complémentaire O, on trouve $m^*O = s$, $m^*F = 1 - s$; mais tandis qu'il existe en O des réunions finies d'intervalles dont la borne supérieure des étendues est précisément s, le seul ensemble de $\mathcal{M}_0$ contenu en F est $\emptyset$ si F est totalement discontinu].

A l'origine, étudiant des ensembles E contenus dans [0, 1], Lebesgue remplaça le sup $m\beta$ défaillant du principe d'Eudoxe, par ce qu'il appela la mesure intérieure de E, $m_* E = 1 - m^*E'$ (E' complémentaire de E par rapport à [0, 1]), et définit comme mesurables ceux pour lesquels $m_* E = m^*E$, soit $m^*E + m^*E' = 1$.

Dans la situation plus générale où nous nous sommes placés, on définira comme m^*-mesurables les ensembles $E \in H(\mathcal{M}_0)$ tels que $\forall\ A \in H(\mathcal{M}_0)$, on ait (si E' est le complémentaire de E) :

$$m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E') \quad (2).$$

On peut établir que la mesurabilité s'exprime aussi par (3) : Si $m^*A < \infty$,

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \alpha, \alpha' \in H(\mathcal{M}_0) \text{ avec } A \cap E \subset \alpha \quad A \cap E' \subset \alpha'$$
$$\text{et } m^*(\alpha \cap \alpha') < \varepsilon.$$

Le résultat fondamental de la théorie est énoncé par le

Théorème : *La famille des ensembles m^*-mesurables est un σ-anneau. La restriction μ de m^* à $\mathcal{M}$ est une mesure.*

1° Supposons E et F mesurables.

Mesurabilité de E : $m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E') \quad \forall\ A \in H(\mathcal{M}_0)$.

Nous écrivons la mesurabilité de F, en prenant pour ensemble A : $A \cap E$ et $A \cap E'$; cela donne :

$$m^*(A \cap E) = m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap E \cap F')$$
$$m^*(A \cap E') = m^*(A \cap E' \cap F) + m^*(A \cap E' \cap F')$$

On en déduit : $\forall\ A \in H(\mathcal{M}_0)$.

---

(2) En vertu de la sous-additivité de m^*, on a toujours $m^*\ A \leqslant m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E')$. Il suffit donc de vérifier $m^*\ A \geqslant \ldots$ pour obtenir la mesurabilité de E.

Si $X \in H(\mathcal{M}_0)$ et $m^*X < \infty$, la mesurabilité peut être définie par $m^*E + m^*E' = m^*X$. (La démonstration de cette équivalence utilise la deuxième définition de la mesurabilité).

(3) Ce second énoncé est plus intuitif et plus proche des idées de Lebesgue. Le premier, plus moderne (Caratheodory), conduit à des démonstrations plus simples.

(1) $m^*A = m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap E \cap F') + m^*(A \cap E' \cap F) + m^*(A \cap E' \cap F')$

On remarque que $A \cap E' \cap F' = A \cap (E \cup F)'$ et que si l'on remplace dans (1) A par :

$$A \cap (E \cup F),$$

on obtient :

(2) $m^*[A \cap (E \cup F)] = m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap E \cap F') + m^*(A \cap E' \cap F)$.

D'où finalement :

$$m^*A = m^*[A \cap (E \cup F)] + m^*[A \cap (E \cup F)']$$

$E \cup F$ est mesurable.

2° Remarquant que $E - F = E \cap F'$ et que $(E - F)' = E' \cup F$, on voit en remplaçant dans (1) A par $A \cap (E' \cup F)$ que :

$$m^*(A \cap (E - F)') = m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap E' \cap F) + m^*(A \cap E' \cap F')$$

d'où :

$$m^*A = m^*[A \cap (E - F)] + m^*[A \cap (E - F)']$$

$E - F$ est mesurable.

3° Si E_1 et E_2 sont mesurables et disjoints :

$m^*(A \cap E_1 \cap E_2) = m^*\emptyset = 0$, et (2) donne :

$$m^*[A \cap (E_1 \cup E_2)] = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2).$$

Soient alors E_i, $i \in N$, mesurables avec $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

On a :

$$m^*(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i).$$

Posons : $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. F_n est mesurable et

$$m^*A = m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F'_n) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap F'_n).$$

Si $E = \bigcup_{i \in N} E_i$, $E' \subset F'_n$ et on a : $m^*A \geqslant \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E')$

d'où :

$$m^*A \geqslant \sum_{i \in N} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E') \geqslant m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E')$$

la dernière conclusion étant due à la sous-additivité de m^*. Elle prouve la mesurabilité de E et les égalités :

$$m^*A = \sum_{i \in N} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E') = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E').$$

Remplaçant A par E, on obtient :

$$m^*(E) = \sum_{i \in N} m^*(E_i).$$

REMARQUE : On montre aisément que si $E \in \mathcal{M}$ et $m^*(E) = 0$, alors $\forall F \subset E$, on a $F \in \mathcal{M}$ et $m^*F = 0$. La mesure μ obtenue est alors dite complète (i.e. tout ensemble inclus dans un ensemble mesurable de mesure nulle possède la même propriété).

L'existence d'une mesure σ-additive ne résulte du théorème précédent que si on établit que $\mathcal{M}$ est non vide, ce qui résulte du *théorème :* "$\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$".

Soit, en effet, $E \in \mathcal{M}_0$, $A \in H(\mathcal{M}_0)$ et $\alpha_i \in \mathcal{M}_0$ tels que :

$$A \subset \bigcup_{i \in N} \alpha_i \quad \text{et} \quad \sum_{i \in N} m\alpha_i \leqslant m^*A + \varepsilon$$

on a : $m(\alpha_i \cap E) + m(\alpha_i \cap E') = m\alpha_i$.

D'où :

$$m^*A + \varepsilon \geqslant \sum_{i \in N} m(\alpha^i \cap E) + m\alpha^i \cap E') \geqslant m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E')$$

ce qui, ε étant arbitraire, établit la mesurabilité de E.

La réponse à la question γ est fournie par le théorème.

THÉORÈME : *m est la restriction de μ à $\mathcal{M}_0$, si et seulement si*

$$i \in N, \quad E_i \in \mathcal{M}_0,\ E_i \cap E_j = \emptyset \text{ si } i \neq j,\ \bigcup_{i \in N} E_i = E \in \mathcal{M}_0$$

implique $mE = \sum_{i \in N} mE_i$.

La nécessité de la condition est évidente.

La réciproque résulte de la proposition précédente et du fait que si la condition de l'énoncé est satisfaite, on a $m^*E = mE$ pour $E \in \mathcal{M}_0$.

Soit en effet : $\alpha_i \in \mathcal{M}_0$, $i \in N$ et $E \subset \bigcup_{i \in N} \alpha_i$.

Posons : $\beta_i = \alpha_i \cap E$, on a $\beta_i \in \mathcal{M}_0$ et $E = \bigcup_{i \in N} \beta_i$ et $m\beta_i \leqslant m\alpha_i$.

Posons $E_i = \beta_i - \bigcup_{j<i} \beta_j$, on a $E_i \in \mathcal{M}_0$, $mE_i \leqslant m\beta_i$

et $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$. D'où :

$$mE = \sum mE_i \leqslant \sum m\beta_i \leqslant \sum m\alpha_i$$

ce qui implique $mE \leqslant m^*E$.

L'égalité résulte de ce que E est à lui seul un recouvrement de lui-même.

Une étendue satisfaisant aux conditions de la proposition précédente est dite σ-additive.

Exemple d'étendue non σ-additive :

Prenons pour X le semi-segment $]0, 1]$ et pour $\mathcal{M}_0$ l'anneau des réunions finies de demi-segments $]\alpha, \beta]$. On pose $m(]0, x]) = x + 1$, ce qui permet de définir m sur $\mathcal{M}_0$. On a en particulier :

$$m(]\alpha, \beta]) = \beta - \alpha \text{ si } \alpha \neq 0.$$

On a $m]0, 1] = 2$, mais on remarque que :

$$\left]0, 1\right] = \bigcup_{n \in N} \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$$

$$\text{Or} \quad \sum_{n \in N} m\left(\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) = 1 \neq 2$$

La conclusion subsiste si $X = [0, 1]$ et si on adjoint à $\mathcal{M}_0$ l'ensemble $\{0\}$ avec la mesure 0.

On démontre aisément par contre que pour $X = [0, 1]$ et l'anneau précédent, si l'on pose $m([0, x]) = g(x)$, la condition nécessaire et suffisante pour que m soit σ-additive est que g soit continue à droite.

INTÉGRALE DE LEBESGUE. FONCTIONS MESURABLES BORNÉES.

Nous reprenons exactement la théorie faite dans le cas général pour l'intégrale de Riemann, mais en supposant que $\mathcal{M}$ est un σ-anneau, et en remplaçant l'étendue m par une mesure sur $\mathcal{M}$: soit $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu)$ (4) l'ensemble des fonctions intégrables [au sens de Riemann par rapport à $(\mathcal{M}, \mu)$]. Il est possible de caractériser simplement ces fonctions.

DÉFINITION : Une fonction réelle définie sur X est dite mesurable (par rapport à $\mathcal{M}$) si, quel que soit le semi-segment $]\alpha, \beta]$, on a $f^{-1}(]\alpha, \beta] - \{0\}) \in \mathcal{M}$. (Il est clair qu'on peut remplacer dans cette définition $]\alpha, \beta]$, par $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta[$, $]\alpha, \beta[$, et prendre α, (ou β) infini, car les réunions dénombrables et les différences d'ensemble de $\mathcal{M}$ sont dans $\mathcal{M}$).

THÉORÈME : Il y a identité entre les fonctions mesurables bornées et les fonctions de $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Nous établirons ci-dessous que toute fonction mesurable bornée est intégrable. Soit $[A, B]$ un segment à l'intérieur duquel f prend ses valeurs. Considérons avec LEBESGUE un découpage :

$$l_0 = A < l_1 < \dots l_i < l_{i+1} < \dots < l_n = B \text{ de } [A, B]$$

et les sommes (dites sommes de Lebesgue) :

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} l_i \, m(f^{-1}(]l_i, l_{i+1}])) \qquad \Sigma = \sum_{i=0}^{n-1} l_{i+1} \, m(f^{-1}(]l_i, l_{i+1}]))$$

en remplaçant éventuellement un des ensembles par :

$$f^{-1}(]l_i, l_{i+1}] - \{0\})$$

si $0 \in [A, B]$.

On remarque que les ensembles $f^{-1}(]l_i, l_{i+1}])$ (avec la réserve que l'on vient de faire) constituent une partition de l'ensemble A_f sur lequel f prend des valeurs non nulles, et que si l'on désigne par σ' et Σ' les sommes de Riemann relatives à cette partition, on a :

$$\sigma \leqslant \sigma' \leqslant \Sigma' \leqslant \Sigma$$

---

(4) $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, m)$, dans le cas où m est une étendue, est un sous-espace de l'ensemble des fonctions bornées f nulles hors d'un ensemble $A_f \in \mathcal{M}$ et on avait $mA_f < \infty$, comme pour tout ensemble de $\mathcal{M}$.

Pour une mesure, la restriction $\mu A < \infty$, $\forall A \in \mathcal{M}$ peut être inopportune, aussi est-ce l'ensemble des fonctions considérées *a priori* que nous restreindrons : fonctions bornées f nulles hors d'un ensemble $A_f \in \mathcal{M}$ et de *mesure finie* : $\mu A_f < \infty$.

Or, si $l_{i+1} - l_i < \varepsilon$ pour $i = 1, ..., n-1$, on a :

$$0 < \sum - \sigma < \varepsilon\mu(A),$$

ce qui établit l'intégrabilité de f.

La réciproque que nous établirons dans la 3e partie de cet exposé fait intervenir la structure de σ-anneau de $\mathcal{M}$.

L'intégrale définie sur $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu)$ est dite intégrale de Lebesgue :

$$I(f) = \int_X f \, d\mu.$$

Le théorème précédent a l'intérêt de montrer que l'originalité essentielle de l'intégrale de Lebesgue est de s'appuyer sur un σ-anneau et une mesure σ-additive et que la substitution d'un découpage de l'espace des valeurs de f à une partition de A_f n'affecte que la présentation de l'intégrale et n'a pas l'importance qu'on semble lui avoir d'abord attribuée.

Il est clair que toutes les propriétés démontrées pour $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}_0, m)$ et pour l'intégrale de Riemann sont valables pour $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu)$ et l'intégrale de Lebesgue, ainsi que le fait que si $(\mathcal{M}, \mu)$ est l'extension de $(\mathcal{M}_0, m)$, on a $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu) \supset \mathcal{J}(X, \mathcal{M}_0, m)$, et que l'intégrale de Riemann est la restriction à $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}_0, m)$ de l'intégrale de Lebesgue, forme linéaire sur $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Le fait que l'inclusion soit stricte, résulte d'une remarquable propriété de $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu)$ et de l'intégrale de Lebesgue.

THÉORÈME : Si la suite f_n est constituée de fonctions mesurables bornées avec $|f_n(x)| < K$, $\forall n \in N$; $A(f_n) \subset A \in \mathcal{M}$, avec $\mu A < \infty$ et si la suite converge simplement vers une fonction f, celle-ci est mesurable et bornée et $I(f) = \lim_n I(f_n)$.

La mesurabilité de f résulte de l'égalité :

$$\varphi = \overline{\lim} f_n = \inf_m \sup_{n>m} f_n$$

et de $\overset{-1}{\varphi}([\alpha, \infty[) = \bigcap_m \bigcup_{n>m} \overset{-1}{f_n}([\alpha, \infty[)$.

Pour établir la propriété relative à I, on peut, en remplaçant f_n par $f_n - f$, se ramener au cas où $f = 0$.

Soit alors $F_n = \{x ; x \in A, \exists\, m \geqslant n \, |f_n(x)| > \varepsilon\}$ on a $F_n \in \mathcal{M}$, $F_n \supset F_{n+1}$ et $\bigcap_n F_n = \emptyset$, puisque la suite f_n converge simplement.

Par suite, $\forall\, \varepsilon\ \exists\ n$ tel que $\mu(F_n) < \varepsilon$.

Le théorème de la moyenne permet alors d'écrire :

$$|I(f_n)| < K\mu(F_n) + \varepsilon\mu(A - F_n) < K\varepsilon + \varepsilon\mu A.$$

Pour situer l'importance de ce résultat, remarquons que si $X \in \mathcal{M}$, l'intégrale de Riemann est continue si $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, m)$ reçoit la topologie de la convergence uniforme, tandis que l'intégrale de Lebesgue l'est si $\mathcal{J}$ reçoit la topologie de la convergence simple, topologies qui sont res-

pectivement la plus fine et la moins fine des topologies naturelles que l'on peut définir sur un espace de fonctions numériques.

FONCTIONS SOMMABLES.

On peut plonger $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu)$ dans un espace plus grand auquel I est prolongeable.

Soit $\widehat{\mathcal{J}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ l'ensemble comprenant :

a) les fonctions f positives telles que :

$I(f) = \sup \{ I(g) \; ; \; g \in \mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu), \; 0 < g < f \} < \infty$;

b) les fonctions négatives telles que $-f$ satisfasse à *a*) avec $\widehat{I}(+f) = -\widehat{I}(-f)$;

c) les fonctions de signe quelconque telles que $f^+ = \sup(f, 0)$ et $\inf(f, 0) = f^-$ satisfassent à *a*) et *b*) pour lesquelles on pose :

$\widehat{I}(f) = \widehat{I}(f^+) + I(f^-)$.

On vérifie aisément que $\widehat{\mathcal{J}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ (ensemble des fonctions *sommables*) a toutes les propriétés algébriques de $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu)$ qu'il contient.

Pour $f \in \widehat{\mathcal{J}}(X, \mathcal{M}, \mu)$, il existe encore $A_f \in \mathcal{M}$ tel que f soit nulle hors de A_f, mais on ne peut plus garantir que $\mu A_f < \infty$. Mais, on peut définir $\hat{I}(f)$ par des sommes de Lebesgue en faisant varier les nombres l_i de $-\infty$, à $+\infty$, σ et $\sum$ étant alors des sommes de séries absolument convergentes. On peut de manière équivalente définir $\widehat{I}(f)$ à partir de sommes (généralisant les sommes de Riemann) définies à partir de partitions dénombrables de A_f en ensembles A_i telles que les séries $\sum_i \sup \{ f(x) \; ; \; x \in A_i \} \mu A_i$ et $\sum_i \inf \{ f(x) \; ; \; x \in A_i \} \mu A_i$ soient absolument convergentes.

Les propriétés de linéarité et de croissance de $\widehat{I}$ (dont la restriction à $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu)$ est I) sont conservées. Sa « continuité » est décrite par les théorèmes suivants, que nous énoncerons sans démonstration :

I. Si $f_n, g \in \widehat{\mathcal{J}}(X, \mathcal{M}, \mu)$, si $|f_n| < g$, et si f_n converge simplement vers f, $f \in \widehat{\mathcal{J}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ et

$$\widehat{I}(f) = \lim \widehat{I}(f_n).$$

II. Si $f_n \in \widehat{\mathcal{J}}(X, \mathcal{M}, \mu)$, si $f_n < f_{n+1}$ et si $\lim \widehat{I}(f_n)$ existe, il existe une fonction $f \in \widehat{\mathcal{J}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ telle $\lim f_n(x) = f(x)$, sauf peut-être pour $x \in A_0$, $A_0 \in \mathcal{M}$ et $\mu A_0 = 0$, et $\lim \widehat{I}(f_n) = I(f)$.

III. $\widehat{I}(|f|)$ est une semi-norme pour $\widehat{\mathcal{J}}(X, \mathcal{M}, \mu)$.

L'espace normé correspondant est complet : espace $L_1(X, \mathcal{M}, \mu)$.

CAS DES MESURES DE SIGNES QUELCONQUES.

On démontre que toute mesure μ prenant les deux signes peut s'écrire :

$\mu = \mu_1 - \mu_2$, où μ_1 et μ_2 sont toutes deux positives. Pour toute fonction telle que $\int f d\mu_1$ et $\int f d\mu_2$ existe, on pose :

$$\int f d\mu = \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2.$$

Les propriétés des fonctions intégrables et des intégrales s'étendent sans difficulté.

LE CALCUL DES PROBABILITÉS, LES GRANDES LIGNES DE SON DÉVELOPPEMENT ET SES PRINCIPAUX CHAMPS D'APPLICATION *

par R. FORTET
Professeur à la Sorbonne

A. — AXIOMATIQUE ET GÉNÉRALITÉS

1° La notion de probabilité est intuitive ; pourtant, elle n'est devenue une notion scientifique, plus précisément mathématique, que tardivement ; cette élaboration s'est opérée principalement par deux voies à certains égards bien différentes : les jeux de hasard et les dénombrements statistiques. Dans les jeux de hasard, les événements intéressant le joueur sont combinaisons d'un nombre fini d'événements fondamentaux ; les dispositions sont prises pour que ces événements fondamentaux soient équivalents du point de vue de la question de savoir lequel d'entre eux se produira, ce qu'on peut traduire en disant qu'ils ont la même probabilité : c'est ce qu'on a appelé le « principe de symétrie » ; la probabilité Pr (A) d'un événement A quelconque est alors repérée par le rapport n/N du nombre n de ceux des événements fondamentaux qui réalisent A au nombre total N des événements fondamentaux ; et rien n'empêche de poser conventionnellement $\Pr(A) = \frac{n}{N}$. La théorie des « événements équivalents » de de Finetti peut être considérée comme une forme moderne et généralisée du « principe de symétrie ».

Les premiers dénombrements statistiques portant sur des populations assez larges et prolongés assez longtemps concernaient surtout des caractères sociaux ou économiques ; un tel dénombrement fait apparaître, par exemple, que, sur les N individus recensés, n ont le caractère C étudié (d'être célibataire, chômeur, etc...) ; il est arrivé que, pour une population donnée (mais qui évolue nécessairement au cours du temps), la fréquence empirique $\frac{n}{N}$ garde une stabilité frappante ; on peut traduire cette observation concrète en disant qu'il y a une probabilité Pr (C) qu'un individu de la population en question ait le caractère C ; la fréquence empirique $\frac{n}{N}$ diffère peu de Pr (C), si N est assez grand, et, intuitivement, d'autant moins que N est plus grand : $\frac{n}{N}$ fournit donc une estimation plus ou moins précise de la valeur inconnue

---

* Conférence prononcée le 20 novembre 1958, à l'Institut Henri-Poincaré, et organisée par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

de Pr (C) : ce qui conduit naturellement à attribuer aux probabilités Pr (C) les propriétés mathématiques des rapports $\frac{n}{N}$.

Les probabilités auxquelles on accède par l'un ou l'autre des deux procédés ci-dessus sont-elles bien de même nature ? En tout cas, elles ont les mêmes propriétés formelles ; ce sont ces propriétés qui, exprimées sous une forme mathématique rigoureuse et imposées par axiomes aux probabilités, constituent l'axiomatique du calcul des probabilités ; je vais indiquer cette axiomatique, sous la forme aujourd'hui classique dite de « Kolmogorov ».

2° *Axiomatique de Kolmogorov :* Un problème de calcul des probabilités concerne un système $\sum$ quelconque, mais déterminé, qui a plusieurs configurations distinctes possibles, parmi lesquelles il en adopte une déterminée sous l'influence du hasard. Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble de toutes les configurations possibles, u un élément quelconque de $\mathcal{U}$; dans la terminologie Fréchet, $\mathcal{U}$ est la catégorie d'épreuves, u une épreuve ; dans la terminologie de Kolmogorov, u est un « événement élémentaire », $\mathcal{U}$ l'ensemble des « événements élémentaires ». Un événement A (concernant $\sum$) est toujours définissable sous la forme suivante : A est réalisé si l'épreuve u réalisée possède un certain caractère ou propriété C ; si alors on appelle A le sous-ensemble de $\mathcal{U}$ constituée par les u qui ont le caractère C, on peut identifier l'événement A et le sous-ensemble A : *les événements sont les sous-ensembles de* $\mathcal{U}$. Les éléments généraux de la théorie des ensembles sont donc applicables aux événements : notion de réunion, intersection, limite, etc... ; des sous-ensembles disjoints de $\mathcal{U}$ sont des événements incompatibles, etc...

La probabilité p(A) d'un événement A $\subset \mathcal{U}$ est une fonction d'ensemble A ; l'un des axiomes comporte que c'est une fonction complètement additive ; comme le domaine de définition d'une telle fonction est nécessairement une σ-algèbre (corps de Borel), nous pouvons dire finalement que :

Axiome 1 : Tout problème de calcul des probabilités porte :

a) sur un ensemble arbitraire $\mathcal{U}$ (catégorie d'épreuves) d'éléments u de nature quelconque (épreuves) ; tout sous-ensemble A de $\mathcal{U}$ est un événement ;

b) sur une σ-algèbre (corps de Borel) $\mathcal{B}$ de sous-ensembles A $\subset \mathcal{U}$, contenant $\mathcal{U}$ lui-même, mais pouvant être quelconque par ailleurs ;

c) sur une mesure finie, ou probabilité, p définie sur $\mathcal{B}$, c'est-à-dire sur une fonction d'ensemble p(A) réelle non négative, complètement additive (σ-additive), définie sur $\mathcal{B}$, telle que $p(\mathcal{U}) = 1$, mais pouvant être quelconque par ailleurs ; p est la loi de probabilité de la catégorie $\mathcal{U}$.

Les jeux de hasard et les relevés statistiques dont j'ai parlé au § 1 invitent évidemment à imposer à p d'être additive ; aucune évidence

expérimentale n'oblige à imposer à p la restriction supplémentaire d'être *complètement* additive, mais sans elle trop de questions devraient rester sans réponse.

On peut imposer à p la condition supplémentaire d'être une mesure *complète*, mais ce n'est pas à proprement parler une restriction, puisque si p n'est pas complète, il est toujours possible de la compléter, par un élargissement convenable du σ-corps $\mathcal{B}$.

On notera qu'en général il existe des sous-ensembles A de $\mathcal{U}$ qui ne font pas partie de $\mathcal{B}$, donc il existe des événements A qui n'ont pas de probabilité : non-probabilisés.

Probabilités conditionnelles : Un point très important est que la probabilité d'un événement n'est pas une propriété intrinsèque de cet événement ; elle dépend de lui, mais aussi de la catégorie d'épreuves $\mathcal{U}$ à laquelle on réfère l'événement.

Soit $\mathcal{U}'$ une partie quelconque de $\mathcal{U}$: c'est aussi une catégorie d'épreuves, plus restreinte que $\mathcal{U}$; comme sous-ensemble de $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$ représente un événement B, et $\mathcal{U}'$ est la catégorie des épreuves qui réalisent B.

Supposons un événement ε consistant en ce que l'épreuve réalisée u possède un certain caractère C ; par rapport à la catégorie $\mathcal{U}$, ε est représenté par le sous-ensemble $A \subset \mathcal{U}$ constitué par les $u \in \mathcal{U}$ qui possèdent le caractère C ; par rapport à la catégorie $\mathcal{U}'$, ε est représenté par le sous-ensemble A' des u de $\mathcal{U}'$ qui ont le caractère C ; évidemment :

$$A' = A \cap B ;$$

supposons ε probabilisé dans $\mathcal{U}$ [$\varepsilon \in \mathcal{B}$; $\Pr(\varepsilon)$ ou $\Pr(A) = p(A)$] ; pour que ε soit aussi probabilisé dans $\mathcal{U}'$, il faut d'abord que $\mathcal{U}'$ soit munie d'une loi de probabilité ; donc :

— qu'il existe un σ-corps $\mathcal{B}'$ de sous-ensembles de $\mathcal{U}'$, contenant $\mathcal{U}'$; avec, définie sur $\mathcal{B}'$, une mesure de probabilité $p'[p'(\mathcal{U}') = 1]$;

— ensuite, il faut que $A' = A \cap B \subset \mathcal{B}'$; alors la probabilité de ε par rapport à $\mathcal{U}'$ est $p'(A \cap B)$; on l'appelle la probabilité conditionnelle de ε (ou de A) par rapport à B [quand B est réalisé] et on la note souvent : $\Pr(A/B)$.

Les jeux de hasard et les dénombrements statistiques suggèrent que $\Pr(A/B)$ est normalement différente de la probabilité $\Pr(A)$ de ε dans $\mathcal{U}$; et plus précisément que :

(2,1) $\Pr(B)\Pr(A/B) = \Pr(A \cap B)$ [$p(B)\,p'(A \cap B) = p(A \cap B)$] ;

on est donc amené à imposer la propriété (2,1) par axiome ; mais on s'aperçoit rapidement que cet axiome est insuffisant. Le problème typique que l'on rencontre est le suivant : en considérant le triplet ($\mathcal{U}$, $\mathcal{B}$, p) comme donné, soit donnée également une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles $e \in \mathcal{B}$, deux à deux disjoints et dont la réunion est $\mathcal{U}$; A désignant un événement quelconque de $\mathcal{B}$, la probabilité conditionnelle $q(e ; A) = \Pr(A/e)$, si elle existe pour tout $e \in \mathcal{F}$ et tout $A \in \mathcal{B}$, doit

être, pour tout e fixe, une fonction complètement additive de A $\mathcal{B}$, avec $q(e\ ;\mathcal{U}) = 1$. Complété par (2,1), cela ne suffit pas à déterminer q ; il est naturel de substituer à (2,1) la propriété plus stricte suivante ; soit $\mathcal{B}_{(\mathcal{G})}$ le plus petit σ-corps contenant tous les e ; pour tout événement E $\mathcal{B}_{(\mathcal{G})}$, on doit avoir :

$$(2,2) \qquad \int_E q(e\ ;\mathrm{A})\,d\mu = p(e \cap \mathrm{A}),$$

où μ est la mesure induite par p sur $\mathcal{B}_{(\mathcal{G})}$: nous adopterons (2,2) comme second axiome (axiome des probabilités composées).

Alors q(e ; A) est déterminée par le théorème de Radon-Nicodym ; mais elle n'est pas ainsi déterminée de façon unique ; et, en général, parmi les solutions ainsi offertes par le théorème de Radon-Nicodym, il n'y en a aucune qui, comme fonction de A, soit complètement additive.

On s'est alors demandé quelles conditions, au moins suffisantes, il convient d'imposer à ($\mathcal{U}$, $\mathcal{B}$, p), — et à la famille $\mathcal{G}$ —, pour qu'il y ait au moins une solution complètement additive ; les résultats dans ce sens les plus intéressants semblent ceux obtenus par Irgina, qui a utilisé le concept de « mesure parfaite » introduit par Gnedenko et Kolmogorov. Il serait utile d'avoir des conditions assurant l'existence, mais aussi *l'unicité* d'une solution complètement additive ; pour le moment, on n'a de telles conditions que dans des cas assez particuliers.

J'ai, ici, considéré le problème de la probabilité conditionnelle en partant de p (ou probabilité *a priori*) comme donnée, la probabilité conditionnelle étant à déduire de p : c'est ainsi que le problème se présente naturellement en statistique. Mais, dans d'autres domaines (processus stochastiques), ce qui est naturellement donné, c'est un jeu de probabilités conditionnelles, à partir duquel il faut construire p ; dans les cas simples, le théorème de Fubini règle la question ; dans des cas compliqués, on se trouve en présence d'un problème non encore résolu.

3° *Commentaires sur l'axiomatique de Kolmogorov :* On a critiqué (et d'ailleurs Kolmogorov lui-même) l'axiomatique précédente, en particulier sur les points suivants :

1) elle prend comme base les notions d'épreuve et de catégorie d'épreuves : or ces notions sont très abstraites ;

2) un événement de probabilité 1 n'est pas forcément certain, mais seulement presque-certain ; cette distinction entre événements certains et événements presque-certains n'est pas immédiatement intuitive, ou suggérée par l'expérience ;

3) l'additivité complète, adoptée pour les raisons dites plus haut, garde cependant un certain caractère d'arbitraire.

On peut éviter ces objections, en prenant comme base les événements probabilisés eux-mêmes ; ils forment une algèbre de Boole, et finalement tout problème de probabilité concerne alors une algèbre de Boole métrique, qu'on peut toujours supposer complète ; divers auteurs ont étudié cette autre forme d'axiomatique, montrant qu'elle échappe effectivement aux objections 1), 2), 3) ci-dessus, tout en étant en fait

strictement équivalente à l'axiomatique de Kolmogorov (les objections 1), 2), 3) sont donc de forme plutôt qu'essentielles) ; jusqu'à présent, on utilise peu cette axiomatique booléenne.

4° *Indépendance :* Revenant au triplet $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, p)$, deux événements A et B sont indépendants si :

$$\begin{cases} \Pr(A \cap B) = \Pr(A) \times \Pr(B) \\ \Pr(\overset{\vee}{A} \cap B) = \Pr(\overset{\vee}{A}) \times \Pr(B) \\ \Pr(A \cap \overset{\vee}{B}) = \Pr(A) \times \Pr(\overset{\vee}{B}) \\ \Pr(\overset{\vee}{A} \cap \overset{\vee}{B}) = \Pr(\overset{\vee}{A}) \times \Pr(\overset{\vee}{B}) \end{cases}$$

en désignant par $\overset{\vee}{E}$ le contraire (complémentaire) d'un événement E ; ces quatre conditions se réduisent à une seule si ni Pr (A), ni Pr (B) ne valent 0 ou 1 ; on définit de façon analogue l'indépendance « *mutuelle* » d'un nombre fini quelconque d'événements ; noter que trois événements A, B, C peuvent être indépendants deux à deux sans l'être mutuellement.

5° *Notion générale d'élément aléatoire :* Soit $\mathcal{X}$ un espace quelconque et $x = x(u)$ une application quelconque de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{X}$: c'est un élément aléatoire, à valeurs dans $\mathcal{X}$, qu'on désignera souvent par une majuscule X. En général, on se limite aux éléments aléatoires X, ou applications $x = x(u)$, tels que les événements intéressants concernant X soient probabilisés. Un événement concernant X est toujours du type : $X \in e$, où e est un certain sous-ensemble de $\mathcal{X}$. L'ensemble des $\Pr(X \in e)$ pour tous les e tels que l'événement $X \in e$ soit probabilisé constitue *la loi de probabilité de* X.

B. — Variables aléatoires

6° *Définition et description d'une variable aléatoire :* Naturellement, la première catégorie d'éléments aléatoires qu'on a considérés sont ceux pour lesquels $\mathcal{X}$ est l'ensemble R des nombres réels ; il s'agit alors des nombres (réels) ou variables aléatoires ; pour une variable aléatoire X, les événements naturellement intéressants sont ceux du type $X < x$, x nombre réel donné quelconque ; on supposera donc que ces événements sont probabilisés [$x(u)$ est une fonction mesurable-p de $u \in \mathcal{U}$], et on posera :

$$\Pr(X < x) = F(x) :$$

$F(x)$ est la *fonction de répartition* de X ; c'est une fonction monotone non-décroissante, continue à gauche. On écarte en général le cas où il y aurait une probabilité positive que X soit infini ; on a alors :

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 ;$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

$F(x)$ détermine $\Pr(X \in e)$, du moins pour tout sous-ensemble $e \subset R$ d'intérêt pratique, en particulier si e est un ensemble de Borel.

Lorsque $F(x)$ est dérivable, sa dérivée $f(x)$ est *la densité de probabilité* de X.

Espérance mathématique et moments : L'espérance mathématique E(X) de X est définie par :

$$E(X) = \int_{\mathcal{U}} x(u)p(du) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF(x),$$

où, par définition, l'intégrale existe si, et seulement si, elle est absolument convergente.

Le moment algébrique d'ordre K (K entier $\geqq 0$), rapporté à l'abscisse a, $a^m K$ est défini par :

$$a^m K = E[(X-a^K)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^K\, dF(x);$$

le moment absolu d'ordre K (K réel $\geqq 0$) rapporté à l'abscisse a, $a^{m*}K$, est défini par :

$$a^{m*}K = E(|X-a|^K) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x-a|^K\, dF(x).$$

Quels que soient $K > 0$ et $h > 0$, on a :

$$(6,1) \qquad Pr(|X-a| \geqslant h) \leqslant \frac{a^{m*}K}{h^K}$$

(inégalités de Bienaymé-Tschebischev).

Extensions :

a) *Variables aléatoires complexes :* Si $\mathcal{X}$, au lieu d'être l'espace R des nombres réels, est l'espace C des nombres complexes, X est une variable aléatoire complexe.

b) *Variables aléatoires réelles à plusieurs dimensions :* Si $\mathcal{X}$ est un espace E_n affine proprement euclidien, X est une variable aléatoire réelle à n dimensions ; si on rapporte E_n à un repère cartésien, si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont les coordonnées de X par rapport à ce repère, il apparaît qu'une variable à n dimensions n'est autre qu'un système de n variables aléatoires (en général non indépendantes). Une variable complexe peut être considérée comme une variable réelle à deux dimensions.

Si $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ est une variable réelle à n dimensions, $F(x_1, x_2, ..., x_n) = Pr(X_1 < x_1, X_2 < x_2, ..., X_n < x_n)$ est sa fonction de répartition ; c'est une fonction de n variables.

Fonction caractéristique : Revenons au cas d'une variable réelle X à une dimension. Sa fonction caractéristique $\varphi(u)$ est la fonction de u réel définie par :

$$\varphi(u) = E[e^{iux}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\, dF(x);$$

autrement dit, $\varphi(u)$ est la transformée de Fourier de $F(x)$. $\varphi(0) = 1$, $\varphi(u)$ est uniformément continue sur $(-\infty, +\infty)$ et est définie positive ; toute fonction $\varphi(u)$ continue et définie positive avec $\varphi(0) = 1$ est la transformée de Fourier d'une fonction de répartition et d'une seule ; la

correspondance biunivoque entre $F(x)$ et $\varphi(u)$ est bicontinue (avec des topologies convenables).

Avec des adaptations convenables, les notions d'espérance mathématique, de moments, de fonction caractéristique s'étendent aux variables complexes, ou aux variables à plusieurs dimensions.

Si X et Y sont deux variables réelles (à 1 seule dimension chacune), on a toujours :

(6,1) $$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

Si on pose :

$$\sigma_X^2 = E(|X - E(X)|^2)$$
$$\sigma_Y^2 = E(|Y - E(Y)|^2)$$
$$\sigma_X \sigma_Y r = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\},$$

on a : $0 \leq |r| \leq 1$ d'après l'inégalité de Schwarz ; $|r| = 1$ si, et seulement si, il y a entre X et Y une relation linéaire à coefficients non aléatoires : r s'appelle le *coefficient de corrélation* de X et Y.

X et Y sont indépendants si, quels que soient les ensembles e_1, e_2 de nombres réels, les deux événements $X \in e_1$, $Y \in e_2$ sont indépendants. Si X et Y sont indépendants, on a :

(6,2) $$E(XY) = E(X) \times E(Y),$$

et par suite le coefficient de corrélation de X et de Y est nul.

7° *Addition des variables aléatoires indépendantes :* Si X et Y sont indépendantes, et si $S = X + Y$ est leur somme, on a :

(7,1) $$E(S) = E(X) + E(Y)$$

d'après (6,2) ; si $E(X) = E(Y) = E(S) = 0$, on voit avec (6,2) que :

(7,2) $$E(S^2) = E(X^2) + E(Y^2)\ ;$$

d'une façon générale, il n'est pas difficile de calculer un moment algébrique quelconque $E(S^K)$ de S, en fonction des moments, d'ordre $\leq K$, de X et de Y ; les formules obtenues sont de plus en plus compliquées quand K augmente.

Si $F(x)$, $G(y)$, $H(s)$ sont les fonctions de répartition de X, Y, S respectivement, on a :

(7,3) $$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s-x)\, dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s-y)\, dG(y),$$

autrement dit, H est le produit de convolution de F et G ; par suite, si $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_3(u)$ sont les caractéristiques de X, Y, S, on a :

(7,4) $$\varphi_3(u) = \varphi_1(u) \times \varphi_2(u).$$

8° *Convergence en probabilité, presque-sûre, en moyenne :* Les convergences en mesure, presque-partout, en moyenne d'ordre α, usuelles dans la théorie de la mesure et des fonctions mesurables, se transforment immédiatement en calcul des probabilités, où elles prennent les noms, respectivement, de convergence en probabilité, presque-sûre, en moyenne d'ordre α ; par exemple, une variable aléatoire X_K $(K = 1, 2, 3)$ tend, lorsque $K \to +\infty$, vers une variable aléatoire limite X en moyenne d'ordre 2 (en moyenne quadratique) si $E[(X_K - X)^2] \to 0$; alors, d'après (6,1), X_K tend vers X en probabilité. Si X_K tend vers X en pro-

babilité, cela ne signifie pas que la différence $X_K - X$ est petite, mais seulement qu'il y a, pour K assez grand, une probabilité arbitrairement voisine de 1 pour que $X_K - X$ soit arbitrairement petite.

9° *Lois asymptomatiques de l'addition des variables aléatoires indépendantes :* Le chapitre le plus anciennement développé du calcul des probabilités consiste à étudier la somme S_n d'un grand nombre n de variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, ..., X_n$:

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n ;$$

on dégage ainsi des lois asymptotiques (pour $n \to +\infty$) qui appartiennent à deux types principaux :

1° *Lois des grands nombres :* Les lois des grands nombres proprement dites sont des théorèmes établissant, sous des conditions convenables, que lorsque $n \to +\infty$ la moyenne arithmétique S_n/n tend (par exemple en probabilité) vers une limite L.

Exemple : Soient une succession de parties indépendantes de pile ou face, numérotées 1, 2, ..., n ; à chaque partie, les probabilités de pile et face ont les mêmes valeurs respectivement p et $q = 1 - p$ (on suppose $0 < p < 1$). Si X_j vaut 1 ou 0 suivant que la partie N° j donne pile ou face, S_n/n est la fréquence relative de pile sur les n parties ; on prouve facilement que S_n/n tend en moyenne quadratique (donc en probabilité), et aussi presque-sûrement vers p ; car

$$(9,1) \qquad E(|S_n/n - p|^2) \sim \frac{1}{n} ;$$

ce qui rejoint l'idée intuitive que la fréquence empirique, sur un grand nombre n d'expériences, de l'événement pile doit être en un certain sens une valeur approchée de sa probabilité p.

2° *Lois de probabilités limites :* Reprenons l'exemple de pile ou face ; pour n grand, S_n est probablement grand ; sa fonction de répartition $F_n(x)$ tend donc vers 0 pour tout x fini ; mais cette constatation n'apporte rien de nouveau ; mais normons S_n convenablement, après l'avoir rapporté à une origine également convenable ; en fait, considérons, au lieu de S_n,

$$U_n = (S_n - np)/\sqrt{pqn},$$

qui pour tout n a une espérance nulle et un moment d'ordre 2 constamment égal à 1. On démontre que la fonction de répartition $G_n(u)$ de U_n tend pour tout u vers :

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

fonction de répartition connue sous le nom de loi de Laplace (ou de Gauss).

De telles lois-limites peuvent être mises en évidence dans des cas beaucoup plus généraux que celui de pile ou face ; l'usage des caractéristiques et de (7,4) est fondamental pour cette étude, aujourd'hui à peu près terminée ; elle a mis en évidence les notions de lois stables, quasi-stables, indéfiniment divisibles (la loi de Laplace est stable, et par suite indéfiniment divisible) ; les efforts les plus récents ont visé à préciser la rapidité des convergences [de $G_n(u)$ vers $\Phi(u)$, par exemple], ou à

savoir si la convergence des fonctions de répartition s'accompagne de la convergence des densités de probabilités (en supposant que celles-ci existent).

C. — Les grands chapitres du calcul des probabilités

10° *Les processus stochastiques :* En dehors de l'addition des variables aléatoires indépendantes, le calcul des probabilités, dans son état actuel, est principalement consacré à l'étude des processus stochastiques, ou évolutions aléatoires au cours du temps d'un système quelconque. On peut concevoir une infinie variété de processus stochastiques ; pour des raisons théoriques et, plus souvent, pratiques, on a étudié principalement :

a) les processus à accroissements indépendants, dont la théorie se fonde sur l'addition des variables aléatoires indépendantes ;

b) les processus de Markov, dont l'étude peut être envisagée comme une application de la théorie des semi-groupes d'opérations linéaires dans un espace de Banach ; les processus de Wiener-Lévy, qui sont à la fois de Markov et à accroissements indépendants, présentent d'intéressantes connexions avec la théorie du potentiel ;

c) les processus stationnaires du second ordre, dont l'analyse harmonique est un chapitre de l'analyse harmonique générale.

Je ne donne pas d'autres indications sur ces questions qui seront reprises dans des conférences suivantes.

Je note seulement que les processus stochastiques sont des éléments aléatoires d'un certain type, évidemment beaucoup plus complexes que les variables aléatoires, et qu'une façon indirecte de les étudier est de développer la théorie des éléments aléatoires les plus généraux possibles [c'est-à-dire celle des applications $x(u)$ dans des espaces $\mathcal{X}$ aussi généraux que possible] ; cette théorie, encore à son début, comporte déjà des résultats prometteurs.

D. — Les applications du calcul des probabilités

11° *Les applications du calcul des probabilités :* Les premières applications, historiquement, du calcul des probabilités concernèrent la démographie, les assurances, divers phénomènes économiques et sociaux. Ce domaine reste important avec une branche nouvelle : la psychométrie ; toutefois, l'introduction des processus stochastiques en économétrie, bien qu'apparemment souhaitable, reste très timide.

Mais le calcul des probabilités a trouvé, plus récemment, un immense champ d'application en physique ou dans des techniques dérivées de la physique, dans tous les cas où intervient un ensemble considérable de particules : diffusion et mouvement brownien, mécanique statistique (classique ou quantique), phénomènes d'émission (bruit de fond dans les tubes électroniques), semi-conducteurs... ; je citerai aussi, d'un type différent et également très importantes, la théorie de la transmission de l'information et celle de la détection. En retour, ces applications ont

notablement influé sur le cours du développement moderne du calcul des probabilités.

Je ne puis donner aucun détail sur ces applications ; d'ailleurs, leur existence au moins est bien connue ; je préfère m'arrêter sur une autre application, très curieuse, qui peut éventuellement être utilisée dans n'importe quel domaine, et qui est généralement ignorée en dehors des spécialistes : les méthodes de Monte-Carlo.

12° *Les méthodes de Monte-Carlo :* Je veux d'ailleurs simplement faire comprendre le principe de ces méthodes, sans entrer dans la technique de leur utilisation.

Pour obtenir la valeur numérique θ_0, supposée inconnue *a priori*, d'un paramètre θ dont dépend la fonction de répartition d'une variable aléatoire X, il n'y a pas d'autre moyen que le procédé empirique : on procédera à n déterminations, par exemple indépendantes, de X et on déduira de leurs résultats une estimation de θ_0 qui sera adoptée comme valeur approchée de θ_0, généralement en application d'une loi des grands nombres [comme, d'après (9,1), S_n/n peut être adopté comme estimation de p] ; sous le nom de « théorie de l'estimation des paramètres », les statisticiens ont de longue date développé des méthodes perfectionnées (notion de résumé exhaustif, analyse séquentielle, etc...) pour réduire l'erreur e à craindre, et le temps nécessaire (c'est-à-dire n) ; le calcul des probabilités montre [cf. (9,1)] que e est ordinairement de l'ordre de $n^{-\frac{1}{2}}$:

$$(12,1) \qquad e \sim n^{-\frac{1}{2}} .$$

Soit θ_0 un nombre ; supposons que l'on possède de θ_0, non sa valeur, mais une définition mathématique qui le détermine entièrement : par exemple, θ_0 est la plus petite racine d'une équation algébrique donnée à racines toutes positives ; de la définition mathématique de θ_0, on peut déduire en général une méthode de calcul au moins approchée de sa valeur : de telles méthodes reposent souvent sur l'itération d'une opération plus ou moins complexe, de sorte que l'erreur e a en général un ordre de grandeur du type :

$$(12,2) \qquad e \sim a^n \qquad (a < 1),$$

où n est le nombre de fois qu'on a répété l'opération.

Mais soit une famille de variables aléatoires $\{X_\theta\}$ dont la fonction de répartition $F(\theta ; x)$ dépend d'un paramètre θ ; et supposons qu'on sache procéder à des déterminations empiriques de X_{θ_0} ; comme la valeur de θ_0 n'est pas connue, il faudra que la définition mathématique de θ_0 suffise à permettre de telles déterminations empiriques ; s'il en est ainsi, on voit qu'on pourra évaluer θ_0 par une méthode d'estimation de paramètre : on dira alors qu'on évalue θ_0 par une *méthode de Monte-Carlo.*

Exemple 1 : Soit $\theta_0 = \pi$; π possède des propriétés mathématiques qui le définissent absolument et dont on a depuis longtemps déduit sa valeur numérique avec une précision considérable ; mais imaginons qu'on n'ait pas encore effectué ce calcul ; on pourrait obtenir la valeur de π par une méthode de Monte-Carlo, par exemple de la façon suivante :

— On connaît le « jeu de l'aiguille » de Buffon ; soit X le nombre des intersections de l'aiguille et des parallèles tracées sur le plan ; si la longueur de l'aiguille est la moitié de l'écart des parallèles (de sorte que X ne peut valoir que 0 ou 1), on a :

$$\Pr(X = 1) = \frac{1}{\pi} :$$

c'est pile ou face, avec $p = \frac{1}{\pi}$; la fréquence S_n/n correspondante (cf. § 9) sera donc une estimation de π.

Exemple 2 : u variant de 0 à 1, soit $f(u)$ une fonction continue donnée, avec : $0 \leqq f(u) \leqq 1$; et soit :

$$\theta_0 = \int_0^1 f(u)du.$$

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme (densité constante) sur (0,1), et soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si $V \leqq f(U)$ et 0 si $V > f(U)$; on a :

$$E(X) = \theta_0.$$

On peut procéder à des déterminations empiriques de U et de V, donc de X ; pour n déterminations indépendantes $x_1, x_2, ..., x_n$ de X, $\frac{1}{n} \sum_j x_j$ tend en moyenne quadratique vers $E(X) = \theta_0$ (loi des grands nombres) ; on peut donc estimer θ_0 par $\frac{1}{n} \sum_j x_j$, et l'erreur à craindre est de l'ordre de :

$$\left\{ E(|\frac{1}{n}\sum_j x_j - \theta_0|^2) \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}.$$

On a recouru (von Neumann, Ulam) aux méthodes de Monte-Carlo en 1942 pour des problèmes de diffusion de neutrons, difficiles à étudier par les procédés mathématiques ordinaires et se rattachant à la fabrication de la bombe atomique ; dans ce domaine, ce recours est demeuré usuel.

Naturellement, pour pouvoir évaluer un nombre θ_0 dont on possède une définition mathématique par une méthode de Monte-Carlo, il faut trouver un schéma stochastique auquel rattacher θ_0 et réalisable sur la base de la définition mathématique possédée de θ_0 ; cela peut être difficile ; mais, souvent aussi, un tel schéma est en évidence parce que θ_0 est précisément apparu à propos d'un phénomène aléatoire (cas de la diffusion des neutrons, du fonctionnement des centraux téléphoniques, etc...) ; il suffit alors de reproduire ce phénomène, naturellement, ou artificiellement avec une machine électronique.

L'usage de méthodes statistiques pour évaluer des quantités relevant normalement d'un calcul strictement mathématique semble cependant paradoxal ; la comparaison de (12,1) avec (12,2) met en évidence que, pour le même nombre n d'opérations, l'erreur est ordinairement beaucoup plus forte pour une méthode de Monte-Carlo que pour une méthode mathématique ; à vrai dire, les opérations à faire ne sont pas

les mêmes dans les deux cas, et peuvent être beaucoup plus simples et rapides pour la méthode de Monte-Carlo.

Il reste qu'avec une méthode statistique, n devra généralement être pris très grand, ce qui pose le problème pratique de fabriquer du hasard, en quelque sorte, en grande quantité ; plus correctement à opérer (assez rapidement), un grand nombre n de tirages au sort. On peut toujours se ramener à des tirages au sort (mutuellement indépendants) d'un nombre ou variable aléatoire compris entre 0 et 1, selon une loi uniforme sur (0,1) [densité de probabilité de la variable aléatoire constante et égale à 1, sur (0,1)]. On a eu l'idée d'observer empiriquement de tels nombres produits par un phénomène naturel aléatoire (bruit de fond dans un tube électronique), et on a dressé et publié une table de $1,2.10^6$ tels nombres. Cette table est difficile à utiliser si on emploie par ailleurs une machine à calculer électronique, et on préfère généralement faire fabriquer les nombres aléatoires par la machine elle-même, selon un procédé arithmétique qui, naturellement, fournit des nombres qui sont en réalité des nombres déterminés, qu'on ne peut considérer comme aléatoires que par approximation.

N.D.L.R. — Nous croyons utile de signaler l'ouvrage récent de M. FORTET : « Some Aspects of Analysis and Probability », John Wiley and Sons, New-York (en collaboration avec I. KAPLANSKY, E. HEWITT et MARSHALL HALL), ainsi que les suivants, en préparation :

Collection universitaire de Mathématiques (Dunod) :

VIII. R. FORTET : « Matrices ».

X. R. FORTET : « Processus stochastiques ».

II. ESSAI

THÉORÈME DE BACHET

I. Congruences. Théorèmes de Fermat et de Wilson

(En réponse à une demande formulée par un collègue, A. Buquet *nous donne ici une démonstration difficilement accessible dans les ouvrages courants, et n'utilise que les éléments d'arithmétique de la classe de Mathématiques Elémentaires. Nous pensons que cette étude pourra intéresser d'autres collègues que l'auteur de la question relative au « théorème de Bachet »).*

Pour exprimer que deux nombres entiers a et b ont le même reste de division par un même troisième c, il est équivalent d'affirmer que a est un multiple de c augmenté de b ou que a et b sont congrus suivant le module c, ce qui est noté de façon courante respectivement par $a = \mathcal{M}\, c + b$ ou $a \equiv b \pmod{c}$.

Un des chapitres fondamentaux de la théorie des nombres est l'étude des congruences à inconnues lorsque le module est donné. Si la notation des congruences est employée ici, il n'est fait aucun appel à des résultats, même classiques, non montrés directement à l'aide des éléments d'arithmétique du programme de Mathématiques Elémentaires.

Résoudre la congruence $f(x) \equiv 0 \pmod{P}$ où $f(x)$ est un polynôme de degré n à coefficients entiers positifs, négatifs ou nuls : $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, c'est trouver toutes les valeurs entières qu'il faut attribuer à x pour que le polynôme prenne une valeur numérique multiple du module entier P.

Si une valeur x_0 convient, il en est de même pour tous les termes de la progression arithmétique de raison P de terme général $u_k = x_0 + KP$, illimitée dans les deux sens, car $f(x_0 + KP) - f(x_0)$ est manifestement multiple de P quel que soit l'entier K. On dit que les termes de cette progression forment *une classe de solutions*. On peut se borner, pour résoudre une telle congruence, à essayer les termes de la suite $(0, 1, 2, \ldots, P-1)$. Les propriétés de telles congruences sont les plus simples lorsque le module P est premier absolu ; c'est ce qui sera toujours supposé par la suite.

Théorème 1. — *Tout polynôme de degré n à coefficients entiers*

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

multiple d'un nombre premier P *pour n valeurs distinctes* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *prises dans la suite* $(0, 1, 2, \ldots, P-1)$ *peut être mis sous la forme*

$$f(x) = a_n g_n(x) + b_n g_{n-1}(x) + b_{n-2}\, g_{n-2}(x) + \ldots + b_2 g_1(x) + b_1$$

où $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *sont nuls ou multiples de* P *et* $g_i(x)$ *désigne le produit*

$$(x - x_1)\,(x - x_2) \ldots (x - x_i).$$

Divisons $f(x)$ par $(x - x_1)$; on a $f(x) = (x - x_1)\, Q_1(x) + b_1$. $Q_1(x)$ est un polynôme à coefficients entiers et b_1, égal à $f(x_1)$, est multiple de P ou occasionnellement nul. Si l'on remplace x par x_2 dans cette identité, il vient

$$f(x_2) = (x_2 - x_1)\, Q_1(x_2) + b_1 ;$$

$f(x_2)$ et b_1 étant multiples de P, il en est de même du produit $(x_2 - x_1)\, Q_1(x_2)$. Comme le facteur $x_2 - x_1$, qui est en valeur absolue au plus égal à $P - 1$ ne peut être multiple de P, c'est l'autre facteur $Q_1(x_2)$ qui est égal à un multiple b_2 de P. Pour une raison analogue, $Q_1(x)$ est aussi multiple de P pour $x = x_3, x_4, \ldots x_n$. Divisons $Q_1(x)$ par $x - x_2$, il vient $Q_1(x) = (x - x_2)\, Q_2(x) + b_2$, le quotient $Q_2(x)$ étant aussi à termes entiers.

$Q_2(x_2)$ et b_2 étant multiples de P, il en est de même de $(x_3 - x_2)\, Q_2(x_3)$;

$x_2 - x_3$ ne pouvant l'être, c'est le facteur $Q_2(x_3)$ qui est égal à un multiple b_3 de P (s'il n'est pas nul). $Q_3(x)$ est également multiple de P pour $x = x_4, x_5, \ldots, x_n$.

Par divisions successives on définit des quotients $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, .., $Q_n(x)$ de degrés $n-1$, $n-2$, ..., 0 et des multiples de P : b_1, b_2, ..., b_n liés par la relation de récurrence $Q_{i-1}(x) = (x - x_i)\, Q_i(x) + b_i$.

Le dernier quotient $Q_n(x)$, de degré nul, est égal à A_n. L'élimination de $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, .., $Q_{n-1}(x)$ conduit à la relation de l'énoncé.

THÉORÈME 2. — *Si un polynôme à coefficients entiers de degré n est multiple d'un nombre premier* P *pour plus de n valeurs distinctes de x prises dans la suite* (0, 1, 2, .., P — 1) *ses coefficients sont nuls ou multiples de* P.

Dans l'identité du théorème précédent remplaçons x par une valeur supplémentaire x_{n+1} rendant aussi $f(x)$ multiple de P. Le produit

$$a_n(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2)\ldots(x_{n+1} - x_n)$$

doit être multiple de P. Ce ne peut être aucun des facteurs $(x_{n+1} - x_i)$. c'est donc a_n et le théorème s'ensuit.

THÉORÈME 3. — *La congruence* $f(x) \equiv 0$ (*mod.* P) *où* P *est un nombre premier et* $f(x)$ *un polynôme de degré n dont les termes sont des nombres entiers non tous multiples de* P *ou nuls, ne peut admettre plus de n classes distinctes de solutions.*

Les P classes distinctes possibles comprennent les P termes de la suite (0, 1, 2, .., P — 1). S'il existait plus de n classes distinctes de solutions, on se trouverait dans les conditions du théorème précédent et tous les coefficients de $f(x)$ seraient, en contradiction avec l'hypothèse, tous multiples de P ou nuls.

Ainsi, on peut dire qu'en général une congruence de degré n à module premier admet au plus n classes de solutions distinctes. Si ce maximum est atteint de façon banale avec la congruence $g(x) \equiv$ (mod. P) avec $g(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-n)$, il est aussi atteint dans le cas du polynôme $x^{P-1} - 1$, comme cela résulte du

THÉORÈME 4 (DE FERMAT). — *Etant donné un nombre premier* P *et un nombre a non multiple de* P. *l'expression* $a^{P-1} - 1$ *est multiple de* P.

Divisons par a les P — 1 produits a, $2a$, $3a$, .., $(P-1)a$, ce qui introduit des quotients et des restes définis par les relations

$$(1) \qquad ka = Pq_k + r_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, P-1).$$

Deux restes quelconques, r_i et r_j sont différents, car leur égalité entraînerait

$$ia - Pq_i = ja - Pq_j \quad \text{et} \quad (i-j)\,a = P(q_i - q_j),$$

P devrait alors diviser a ou $(i-j)$ ce qui est impossible, $i-j$ étant en valeur absolue inférieur à P. Les restes r_k en nombre P — 1 sont donc dans leur ensemble les nombres 1, 2, .., P — 1. En multipliant membre à membre les égalités (1) on obtient $(P-1)!\, a^{P-1} = \mathcal{M}P + (P-1)!$ et $(P-1)!\,(a^{P-1} - 1) = \mathcal{M}P$, ce qui entraîne $a^{P-1} - 1 = \mathcal{M}P$.

THÉORÈME 5 (DE WILSON). — *Si* P *est un nombre premier, l'expression* $(P-1)! + 1$ *est multiple de* P.

Les deux congruences $f(x) = x^{P-1} - 1 \equiv 0$ (mod. P) et

$$g(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-P+1) \equiv 0 \text{ (mod. P)}$$

admettent l'une et l'autre les P — 1 classes de solutions distinctes

$$KP + 1,\ KP + 2,\ \ldots,\ KP + P - 1$$

et il en est de même de la congruence de degré P — 2

$$h(x) = g(x) - f(x) \equiv 0 \text{ (mod. P)}.$$

D'après le théorème 2, tous les coefficients du polynôme $h(x)$, supposé ordonné, sont multiples de P ou nuls. Si P est impair, il s'ensuit que la somme des termes de la suite (1, 2, 3, .., P — 1) est multiple de P, ainsi que les sommes de leurs produits 2 à 2, 3 à 3, .., P — 2 à P — 2. Il en est de même du terme constant $(P-)! + 1$, ce qui démontre la proposition, qui est aussi vérifiée pour P = 2, puisque $1! + 1 = 2$.

II. Restes et résidus quadratiques

Une congruence du second degré de la forme particulière $x^2 - a \equiv 0$ suivant un module premier impair $P = 2N + 1$ admet au plus deux classes de solutions. La discussion de sa possibilité suivant les valeurs de a conduit à une notion très importante en théorie des nombres. *On appelle reste quadratique du nombre premier impair* $P = 2N + 1$ *tout nombre* R *de la suite* $(1, 2, \ldots, 2N - 1, 2N)$ *pour lequel* $x^2 - R = \mathcal{M}P$, *c'est-à-dire pour lequel la congruence* $x^2 \equiv R$ *est possible*. On appelle *résidu quadratique* tout terme de la progression $R + KP$, progression nommée *classe résiduelle*. *On appelle non reste tout nombre* S *de la même suite* $(1, 2, \ldots, 2N)$ *pour lequel la congruence* $x^2 \equiv S$ *est impossible*. La congruence est également impossible pour tous les termes de la progression $s = S + KP$. Tout terme s est nommé *non résidu*, leur ensemble forme *une classe non résiduelle*.

Pour $P = 3$ on a une classe résiduelle $3K + 1$ et une classe non résiduelle $3K + 2$ (ou $3K - 1$) ; pour $P = 7$ on a trois classes résiduelles $7K + 1$, $7K + 2$, $7K + 4$ et trois classes non résiduelles $7K + 3$, $7K + 5$, $7K + 6$. Pour $P = 13$ on a six restes 1, 3, 4, 9, 10, 12 et six non restes 2, 5, 6, 7, 8, 11.

Théorème 6. — *Les restes de division par un nombre premier impair* $P = 2N + 1$ *des carrés des nombres de* 1 *à* N *sont distincts et sont dans l'ordre inverse les restes de division par* P *des carrés des nombres de* $N + 1$ *à* $2N$. *Le nombre* P *admet* N *classes résiduelles et* N *classes non résiduelles*.

Il suffit d'étudier les restes R_i de division par P des carrés consécutifs de 1^2 à $(2N)^2$, car $(n + KP)^2$ donne le même reste que n^2. Soient $R_1, R_2, \ldots, R_n$ les restes de division relatifs à la première moitié de ces carrés. Ils sont tous distincts, car $R_i - R_j = (i - j)(i + j)$ ne peut être multiple de P, $i + j$ et $|i - j|$ étant au plus égaux à $2N - 1$ sont inférieurs à P. Chacun d'eux est égal à un seul des restes $R_{N+1}, \ldots, R_{2N}$ provenant de la seconde moitié des carrés, car de

$$(2N + 1 - i)^2 - i^2 = (2N + 1)(2N + 1 - 2i) = \mathcal{M}P,$$

suit $R_i = R_{2N+1-i}$. Il y a donc exactement N restes et par suite N non restes et autant de classes résiduelles et non résiduelles.

Théorème 7. — *Pour qu'un nombre* r *soit résidu quadratique d'un nombre premier impair* $P = 2N + 1$, *il faut et il suffit que* $r^N - 1$ *soit multiple de* P ; *pour qu'un nombre* s *soit un non résidu, il faut et il suffit que* $s^N + 1$ *soit multiple de* P.

Il suffit de faire la démonstration pour un reste et un non reste puisque

$$(n + KP)^N \pm 1 = \mathcal{M}P + n^N \pm 1.$$

Pour la totalité des restes et des non restes, c'est-à-dire pour nombre a de la suite $(1, 2, \ldots, 2N)$, et d'après le théorème 4 de Fermat $a^{2N} - 1 = \mathcal{M}P$ ou encore $(a^N - 1)(a^N + 1) = \mathcal{M}P$. L'un des facteurs $a^N - 1$ et $a^N + 1$ est donc multiple de P et jamais les deux puisque leur différence 2 ne peut être multiple de P.

Si a est un reste R_i, on a $i^2 = \mathcal{M}P + R_i$ entraînant $R_i^N = \mathcal{M}P + i^{2N}$ et $R_i^N - 1 = \mathcal{M}P + i^{2N} - 1$. D'après le théorème de Fermat, $i^{2N} - 1$ est multiple de P et il en est donc de même de $R_i^N - 1$. La congruence $x^N - 1 \equiv 0 \pmod{P}$ admet donc pour solutions les N classes résiduelles distinctes $KP + R_i$ et ne peut admettre d'après le théorème 3 d'autres solutions. Lorsque a est égal à un non reste S le produit $(S^N - 1)(S^N + 1)$ est multiple de P sans que $S^N - 1$ le soit. C'est le facteur $S^N + 1$ qui est multiple de P et la totalité des classes de solutions de la congruence $x^N + 1 \equiv 0 \pmod{P}$ est fournie par les N classes non résiduelles.

Théorème 8. — *Le produit de deux résidus ou de deux non résidus est un résidu ; le produit d'un résidu par un non résidu est un non résidu.*

Soient r et r' deux résidus et s et s' deux non résidus ; on a

$$r^N = \mathcal{M}P+1,\ r'^N = \mathcal{M}P+1,\ s^N = \mathcal{M}P-1,\ s'^N = \mathcal{M}P-1$$

d'où l'on déduit par multiplication :

$$(rr')^N = \mathcal{M}P+1,\ (ss')^N = \mathcal{M}P+1,\ (rs)^N = \mathcal{M}P-1$$

ce qui, d'après le théorème 7 démontre la proposition.

III. Décomposition en somme de carrés

Théorème 9. — *Un produit de sommes de deux carrés est une somme de deux carrés ; un produit de sommes de quatre carrés est une somme de quatre carrés.*

Cela résulte des identités

$$(a^2+b^2)\ (a'^2+b'^2) = (aa'+bb')^2 + (ab'-a'b)^2,$$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)\ (a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) = (aa'+bb'+cc'+dd')^2 + (ab'-ba'-cd'+dc')^2 + (ac'+bd'-ca'-db')^2 + (ad'-bc'+cb'-da')^2.$$

Théorème 10. — *Si le produit d'un nombre premier* P *par un nombre n inférieur à* P *est égal à une somme de deux carrés, il existe un nombre n' inférieur à n tel que le produit* Pn' *soit égal à une somme de deux carrés.*

Soit $Pn = a^2 + b^2$; en divisant a et b par n et en prenant les restes minima en valeur absolue on obtient des nombres a', b', a'', b'' vérifiant les conditions

$$a'' = a - na',\ b'' = b - nb',\ |a''| \leqslant \frac{n}{2},\ |b''| \leqslant \frac{n}{2},\ \text{d'où}\ a''^2 + b''^2 \leqslant \frac{n^2}{2} < n^2.$$

Alors $a''^2 + b''^2 = a^2 + b^2 - 2(aa' + bb')n + (a'^2 + b'^2)n^2$ est égal à un multiple nn' de n si $n' = P - 2(aa' + bb') + (a'^2 + b'^2)n < n$. Le produit P$n'$ est bien une somme de deux carrés,

$$Pn' = P^2 - 2(aa' + bb')P + (a^2 + b^2)\ (a'^2 + b'^2) = (P - aa' - bb')^2 + (ab' - a'b)^2$$

Il s'agit bien de deux carrés et non d'un seul (cas où la démonstration serait illusoire), car si l'un des deux carrés était nul, l'autre serait un multiple KP de P, ce qui entraînerait $n' = K^2P \geqslant P$ et $n > n' \geqslant P$ en contradiction avec l'hypothèse.

Théorème 11. — *Si un nombre premier* P *divise une somme de deux carrés inférieure à son carré* P^2, *il est lui-même égal à une somme de deux carrés.*

Il existe alors un nombre $n < P$, tel que $Pn = a^2 + b^2$ et par suite on est assuré de l'existence d'un nombre $n_1 < n$ et d'une décomposition $Pn_1 = a^2_1 + b^2_1$. Le théorème est vérifié si $n_1 = 1$, sinon on peut trouver n_2 tel que $n_2 < n_1 < n < P$ et une décomposition $Pn_2 = a^2_2 + b^2_2$ avec une conclusion analogue. On peut ainsi former une suite décroissante $n_1, n_2, \ldots$ qui se termine par un terme égal à 1, ce qui vérifie la proposition.

Théorème 12. — *Si le produit d'un nombre premier* P *par un nombre entier n inférieur à* P *est égal à une somme de 2, 3 ou 4 carrés, il existe un nombre entier n' inférieur à n, tel que le produit* Pn' *soit égal à une somme de 2, 3 ou 4 carrés.*

Soit $Pn = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$; en divisant a, b, c, d par n et en prenant les restes minima en valeur absolue, on obtient quatre quotients a', b', c', d' et quatre restes a'', b'', c'', d'' vérifiant les conditions

$a'' = a - na'$, $b'' = b - nb'$, $c'' = c - nc'$, $d'' = d - nd'$ où $|a''|$, $|b''|$, $|c''|$, $|d''|$ sont inférieurs ou égaux à $\frac{n}{2}$. La somme $\Sigma a''^2 = \Sigma a^2 - 2n\Sigma aa' + n^2\Sigma a'^2$ est égale à un multiple nn' de $n' = P - 2\Sigma aa' + n\Sigma a'^2 \leqslant n$.

Si $n' < n$, il vient

$$Pn' = (p - \Sigma aa')^2 + (ab' - ba' - cd' + dc')^2 + (ac' + bd' - ca' - db')^2 + (ad' - bc' + cb' - da')^2.$$

Si $n' = n$, cette décomposition ne peut convenir. Dans ce cas n est un nombre pair $2n''$ et les nombres a, b, c, d se répartissent en deux couples de même parité. Si

a et b sont de même parité, il en est de même de c et d. A la place de n' on prendra $n'' = \frac{n}{2} < n$, avec la décomposition

$$Pn'' = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-d}{2}\right)^2.$$

Les carrés sont au nombre de 2, 3 ou 4 ; s'il n'y avait qu'un seul carré (cas où la démonstration serait illusoire), ce carré serait un multiple KP de P. On aurait n' ou $n'' = K^2P \geqslant P$ et n ne serait pas inférieur à P.

THÉORÈME 13. — *Si un nombre premier* P *divise une somme de 2, 3 ou 4 carrés inférieure à son carré* P^2, *il est lui-même égal à une somme de 2, 3 ou 4 carrés.*

On peut déterminer une suite de décompositions $Pn_i = \Sigma a^2_i$, où les nombres n_1, n_2, ... vont en décroissant, le dernier étant égal à 1.

THÉORÈME 14. — *Tout nombre premier de la forme* $4n + 1$ *est égal à une somme de deux carrés.*

Pour un tel nombre premier $P = 2N + 1 = 4n + 1$, N est pair et puisque $(-1)^N = (-1)^{2n} = 1$, d'après le théorème 7 le nombre -1 est un résidu quadratique. Le nombre $P - 1$ est donc un reste et il existe un nombre i (théorème 6) au plus égal à N tel que $i^2 - (P - 1) = \mathcal{M}P$, ou encore $i^2 + 1 = \mathcal{M}P$. Le nombre P qui divise $i^2 + 1 \leqslant N^2 + 1 < P^2$ se trouve dans les conditions d'application du théorème 11, il est somme de deux carrés.

THÉORÈME 15. — *Tout nombre premier de la forme* $4n + 3$ *est égal à une somme de 3 ou 4 carrés.*

Pour un tel nombre premier $P = 2N + 1 = 4n + 3$, $N = 2n + 1$ est impair et $(-1) = -1$. D'après le théorème 7, le nombre -1 est un non résidu et, par suite, $P - 1$ est un non reste.

Dans la suite (1, 2, 3, .., 2N) le premier terme est un reste et le dernier $2N = P - 1$ est un non reste. Il existe donc deux termes consécutifs h et $h + 1$ dont le premier est un reste et le second un non reste, le produit des deux non résidus $h + 1$ et -1 soit $-h - 1$ est, d'après le théorème 8, un résidu. Il existe donc, d'après le théorème 6, deux nombres i et j au plus égaux à N, tels que

$$i^2 - h = \mathcal{M}P, \quad j^2 + h + 1 = \mathcal{M}P, \text{ d'où } i^2 + j^2 + 1 = \mathcal{M}P.$$

Avec $P = 7$ on pourra prendre $h = 2$, $i = 3$, $j = 2$, $i^2 + j^2 + 1 = 7 \times 2$.

Comme $i^2 + j^2 + 1 \leqslant N^2 + N^2 + 1 < P^2$, le théorème 15 est applicable et P est somme de 2, 3 ou 4 carrés. Mais il ne peut être la somme de deux carrés seulement ; ces carrés de parités différentes conduiraient à

$$P = (2p + 1)^2 + (2q)^2 = 4k + 1 \neq 4n + 3.$$

THÉORÈME 16 (DE BACHET). — *Tout nombre entier est égal à une somme de quatre carrés, dont certains peuvent être nuls.*

Tout nombre entier N peut être décomposé en un produit de facteurs premiers qui sont, soit 2, soit de la forme $4n + 1$, soit de la forme $4n + 3$, tous décomposables en sommes de 2, 3 ou 4 carrés. D'après le théorème 9, N peut être décomposé en somme de 2, 3 ou 4 carrés. Le plus petit nombre demandant 4 carrés est

$$7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2.$$

A. BUQUET, *professeur au Lycée, St-Quentin (Aisne).*

A. BUQUET nous donne en outre les références suivantes :

1° Démonstration élémentaire du théorème de Bachet, par A. MATROT (Vuibert et Nony).

2° Exercices d'analyse numérique, par V.-A. LEBESGUE, 1859 (Leiberck-Faraguet, 11, rue de Seine, Paris).

3° Théorie des nombres ordinaires et algébriques, par H. LAURENT (Naud, Paris).

D'autre part, notre collègue MARTY (Nay, Basses-Pyrénées) nous indique celles-ci :

4° Traité d'arithmétique, par HUMBERT, 1893 (Nony et C^ie).

5° Les nombres premiers, par E. BOREL, collection « Que sais-je ? », n° 571, P.U.F.

III. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES

LA PENSÉE DE L'ENFANT ET LA GÉOMÉTRIE *

par P.-H. van Hiele

La didactique est une rencontre de trois éléments : le professeur, l'élève et la matière à enseigner. Puisqu'il est très difficile d'embrasser d'un coup d'œil ces trois composantes de la situation didactique, on a tendance à en négliger une, ce qui donne une image incorrecte de la situation. Car si l'on néglige la matière, on ne voit que les rapports entre le professeur et l'élève, si l'on perd de vue l'élève, on ne voit que la structure de la matière. Parfois on ne réalise pas suffisamment qu'il y a le professeur pour diriger les études de l'enfant.

Admettons cependant que l'on tienne compte des trois aspects mentionnés plus haut sans en omettre un seul pour les besoins de la cause. Il reste tout de même un grand danger et il me paraît qu'on ne l'a pas suffisamment reconnu. La difficulté qui se présente, c'est que les matières, telles que l'élève les rencontre, sont d'une toute autre structure que celles qui sont connues par le professeur.

Si nous admettons comme un but de notre enseignement que l'élève sache prouver des théorèmes, il est hautement improbable que la pensée de l'élève vise directement vers ce but. Improbable parce que l'élève ne pourra saisir dans son sens intrinsèque la notion de *prouver un théorème*. En effet, s'il avait cette notion, il n'aurait pas besoin de l'apprendre. Comprendre les Mathématiques revient à ceci : connaître les rapports entre les théorèmes qu'on étudie. Dès qu'on comprend le sens de ces théorèmes, on connaît en même temps leurs rapports.

Tout cela est très simple et nous montre clairement pourquoi les Mathématiques sont tellement difficiles pour les élèves. Le professeur connaît les relations entre les théorèmes, mais il les connaît autrement que l'élève. Son exposé de ces relations ne suffit pas à les rendre intelligibles à l'élève. Ce que l'élève doit comprendre en premier lieu, c'est qu'il y a quelque chose comme des théorèmes. C'est tout ce qu'on est en droit d'attendre de l'élève débutant. L'exemple suivant pourra illustrer ce que je veux dire.

Un professeur veut enseigner la planimétrie aux élèves débutants. Il se sert de la symétrie par rapport à une droite pour les informer des relations entre l'égalité de segments ou d'angles, la perpendicularité, etc... Il leur apprend que les points de l'axe de symétrie sont invariants, que les segments symétriques ont même longueur, que les droites symétriques se coupent sur l'axe de symétrie. Pour savoir si les élèves ont bien compris ce qu'il a enseigné, il leur donne le problème suivant : « soit un triangle ABC dont les prolongements des côtés rencontrent la droite L. Il faut construire le triangle symétrique par rapport à la droite L. » Le professeur imagine la solution suivante : « les droites AB et AC rencontrent l'axe L en deux points que nous nommerons P et Q. Ces points sont invariants pour la symétrie. Puis les dis-

---

M. P.-M. van Hiele, professeur au Lycée de Bilthoven (Pays-Bas), est l'auteur d'une thèse sur le problème de l'intuition (en particulier sur le rôle de l'intuition dans l'enseignement de la géométrie). Cette thèse a été soutenue devant l'Université d'Utrecht le 4 juillet 1957.

M. van Hiele a prononcé la conférence, que l'on va lire ci-dessous, devant le « cours pilote sur l'enseignement des Mathématiques », organisé par l'O.E.C.E. à Sèvres, du 17 au 27 novembre 1957. Nous le remercions vivement de nous avoir autorisés à publier cette remarquable étude sur les problèmes de l'initiation.

tances AP et AQ sont invariantes, de sorte qu'on peut construire le point symétrique A'. De pareille façon on trouve les points B' et C'. »

Tout ce raisonnement, toute cette façon de concevoir la matière, c'est le raisonnement du professeur qui connaît tous les rapports. L'élève, lui, est tout à fait incapable de développer un pareil cheminement de la pensée sans l'aide du professeur. Le professeur a pris pour base de son raisonnement que les longueurs de segments symétriques sont invariants. Une telle thèse est stérile pour les élèves, parce qu'ils n'ont pas encore rencontré le contraire : ils n'ont pas encore vu des transformations qui font changer la longueur des segments.

Mais il y a une raison plus importante pour nous opposer à la méthode d'enseignement dont nous avons donné un exemple : on exige que les élèves raisonnent à l'aide d'un réseau de relations entre des notions dont ils ignorent le sens même. Il est question de « points », « axe de symétrie », « segments » « rencontrer «, « invariant », « changer de longueur », « triangle », « prolongement ». Evidemment, le professeur a expliqué ces expressions, il a montré les points et les segments. Il a démontré au tableau noir ce que signifie le prolongement d'un segment. Il se peut qu'il ait demandé aux élèves de formuler la définition d'angles opposés par le sommet. Il se peut même que la définition n'ait pas été trouvée tout à fait correcte et que, par conséquent, il ait montré cela au moyen d'un contre-exemple. Il faut réaliser pourtant que c'est le professeur qui donne le contre-exemple. Les élèves échoueraient puisque pour être en état de donner un contre-exemple, il faut disposer du réseau de relations, et ils n'en disposent pas.

J'espère que les considérations que je viens de vous donner auront montré clairement que le professeur raisonne au moyen d'un réseau de relations que lui seul possède. En partant de ce réseau, il fait voir des relations mathématiques que les élèves finissent par manipuler par habitude. Ou bien l'élève apprend, par habitude, à opérer avec des relations, dont il ignore, dont il n'a jamais vu, la naissance.

En apparence, la chosé est tout à fait en règle : les élèves finiront par disposer du même réseau que le professeur. La possession d'un réseau de relations, identique pour tous ceux qui s'en servent, propre à exprimer les raisonnements, un réseau dans lequel les relations sont liées d'une façon logique et déductive, n'est-elle pas le but propre de l'enseignement des Mathématiques ?

Ne soyons pas trop optimiste. D'abord un réseau de relations ainsi constitué n'est pas fondé sur les expériences sensorielles de l'étudiant. Quoiqu'il soit possible que le réseau de relations lui-même a inspiré des expériences chez l'élève, les expériences mathématiques que l'élève a bien pu avoir se basent justement sur ce réseau imposé par le professeur. Ce réseau imposé, et non pas compris, forme la base de ses raisonnements. Un réseau de relations, qui n'est pas fondé sur des expériences précédentes, risque, on le sait, d'être oublié en peu de temps.

Ensuite, le réseau de relations est une construction autonome, il n'a pas de rapports avec les autres expériences de l'enfant. Cela signifie que, précisément, l'élève ne sait que ce qu'on lui a enseigné et ce qui y est lié déductivement. Il n'a pas appris à établir les rapports entre le réseau de relations et le monde sensible. Il ne saura pas appliquer ce qu'il a appris dans des situations nouvelles.

Enfin, l'enfant a appris à appliquer un réseau de relations qu'on lui a offert tout prêt, il a appris à l'appliquer dans certaines situations spécialement désignées pour lui. Mais il n'a pas appris à se construire un tel réseau lui-même dans un domaine encore inexploité. Si, au contraire, nous réussissions à obtenir comme résultat de notre enseignement que les élèves soient capables de se construire un réseau relationnel déductif dans un domaine nouveau, nous aurions obtenu une formation mathématique optimale.

En général, le professeur et l'élève parlent un langage fort différent. Nous pouvons exprimer ceci en disant : ils pensent sur un niveau différent. L'analyse de la géométrie rend visibles à peu près cinq de ses niveaux.

Au *niveau de base* (niveau zéro) de la géométrie, les figures sont jugées d'après leur apparence. Un enfant reconnaît un rectangle à sa forme et un rectangle lui semble différent d'un carré. Quand on a montré à un enfant de six ans ce qu'est un losange, un rectangle, un carré, un parallélogramme, il est capable de reproduire ces figures sans erreur sur un géoplan de Gattégno, même dans des dispositions difficiles. Nous avons employé le géoplan de Gattégno dans nos recherches pour que l'enfant ne soit pas gêné par les difficultés résultant du dessin des figures. Au niveau de base, un enfant ne reconnaît pas un parallélogramme en un losange. A ce niveau le losange n'est pas un parallélogramme : le losange lui apparaît comme quelque chose de bien différent.

Au *premier niveau* de la géométrie, les figures sont porteuses de leurs propriétés. Qu'une figure est un rectangle, signifie qu'elle a quatre angles droits, que les diagonales sont égales et que les côtés opposés sont égaux. Les figures se reconnaissent à leurs propriétés. Si l'on nous dit que la figure tracée au tableau possède quatre angles droits, c'est un rectangle, même si la figure n'est pas tracée avec soin. Mais, à ce niveau, les propriétés ne sont pas encore ordonnées de sorte qu'un carré n'est pas nécessairement identifié comme étant un rectangle.

Au *deuxième niveau*, les propriétés s'ordonnent. Elles se déduisent les unes des autres : une propriété précède ou suit une autre propriété. A ce niveau, la signification intrinsèque de la déduction n'est pas comprise par les élèves. Le carré est reconnu comme étant un rectangle, parce qu'à ce niveau les définitions des figures entrent en jeu.

Au *troisième niveau*, la pensée s'occupe de la signification de la déduction, de la réciproque d'un théorème, d'un axiome, de la condition nécessaire et suffisante.

On peut probablement distinguer ainsi cinq niveaux de pensée en géométrie. Ce nombre est d'ailleurs de moindre importance pour la compréhension de ce qu'est un niveau de pensée.

Ces niveaux — nous l'avons dit — sont inhérents à l'élaboration de la pensée ; ils sont indépendants de la méthode d'enseignement suivie. Il se peut cependant que certaines méthodes d'enseignement ne permettent pas d'atteindre des niveaux supérieurs, de sorte que les façons de penser employées à ces niveaux restent inaccessibles aux élèves. Les points suivants peuvent contribuer à préciser les niveaux de pensée :

a) A chaque niveau apparaît de façon extrinsèque ce qui était intrinsèque au niveau précédent. Au niveau de base, les figures étaient en fait aussi déterminées par leurs propriétés, mais celui qui pense à ce niveau ne prend pas conscience de ces propriétés.

b) Chaque niveau a ses propres symboles linguistiques et son propre réseau de relations unissant ces signes. Une relation « exacte » à un niveau peut se révéler inexacte à un autre. Qu'on songe, par exemple, à la relation entre le rectangle et le carré. De nombreux symboles linguistiques apparaissent à deux niveaux successifs : ils établissent d'ailleurs la liaison entre les divers niveaux et assument la continuité de la pensée dans ce domaine discontinu. Mais leur signification est différente : elle se manifeste par d'autres relations entre ces symboles.

c) Deux personnes qui raisonnent à deux niveaux différents ne peuvent se comprendre. C'est ce qui arrive souvent pour le professeur et l'élève. Aucun d'eux ne parvient à saisir le cheminement de la pensée de l'autre et leur dialogue ne peut se poursuivre que parce que le professeur essaye de se faire une idée des pensées de l'élève et s'y conforme. Certains professeurs font un exposé à leur propre niveau tout en invitant les élèves à répondre à leurs questions. Il ne s'agit là, en fait, que d'un monologue, car le professeur est amené à considérer toutes les réponses qui n'appartiennent pas à son réseau de relations comme stupides ou déplacées. Le véritable dialogue doit s'établir au niveau des élèves. Dans ce cas, le professeur devra

souvent, après la classe, s'interroger sur les intentions de ses élèves et s'efforcer de les comprendre.

d) La maturation qui mène à un niveau supérieur se déroule d'une façon particulière. On peut y déceler plusieurs phases (cette maturation doit être considérée surtout comme un processus d'apprentissage et non comme un mûrissement d'ordre biologique). Il est donc possible et souhaitable que le professeur la favorise et l'accélère. C'est précisément le but de la didactique de poser la question de savoir comment ces phases sont parcourues et comment une aide effective peut être fournie à l'élève.

Examinons maintenant *les phases qui,* dans le processus d'apprentissage, *mènent à un niveau supérieur de pensée.*

La *première phase* est celle de l'*information :* l'élève apprend à connaître le champ d'investigation au moyen du matériel qui lui est présenté. Ce matériel lui fait découvrir une certaine structure. On pourrait dire que la base de la connaissance humaine consiste en ceci : l'homme paraît en mesure de déceler une structure dans tout matériel, aussi désordonné soit-il, et cette structure est ressentie de la même façon par plusieurs personnes, ce qui résulte de la conversation qu'elles peuvent engager à ce sujet.

Dans la *deuxième phase,* celle de l'*orientation dirigée,* l'élève explore le champ d'investigation au moyen du matériel. Il sait donc déjà dans quelle direction l'étude est dirigée, le matériel est choisi de telle sorte que les structures caractéristiques lui apparaissent au fur et à mesure.

Au cours de la *troisième phase* l'*explication* a lieu. Les expériences acquises sont liées aux symboles linguistiques exacts et les élèves apprennent à se prononcer sur les structures observées au cours d'échanges de vues qui ont lieu en classe. Le professeur veille à ce que ces derniers aient lieu en employant les termes habituels. C'est au cours de cette troisième phase que se forme partiellement le réseau de relations.

La *quatrième phase* est celle de l'*orientation libre.* Le champ d'investigation est en grande partie connu, mais l'élève doit encore y trouver rapidement son chemin. Cela se réalise en donnant des tâches qui peuvent être exécutées de différentes façons. Toutes sortes de signaux sont placés dans le champ d'investigation : ils montrent la voie à suivre vers les symboles.

La *cinquième phase* est celle de l'*intégration :* l'élève s'est orienté, mais il doit encore acquérir une vue d'ensemble des moyens qui sont à sa disposition. Il essaye donc de condenser en un tout le domaine que sa pensée a exploré. A ce moment, le professeur peut favoriser ce travail en fournissant des aperçus globaux. Il importe que ces aperçus n'apportent rien de nouveau à l'élève : ils doivent être uniquement un résumé de ce que l'élève sait déjà.

A l'issue de cette cinquième phase le nouveau niveau de pensée est atteint. L'élève dispose d'un réseau de relations qui se rapportent à la totalité du domaine exploré. Ce nouveau domaine de pensée, qui a acquis sa propre intuition, s'est substitué au domaine de pensée antérieur qui possédait une toute autre intuition.

L'objectivité des Mathématiques repose sur le fait que les nouveaux réseaux de relations se correspondent chez des personnes différentes. Les nouveaux symboles sont liés par les mêmes relations chez plusieurs personnes. Si l'on fixait comme but de l'éducation l'unicité du réseau relationnel, on pourrait se borner à faire apprendre celui-ci. Et l'élève alors semblerait comprendre parfaitement les raisonnements, car il aboutirait à des conclusions exactes en se basant sur son réseau relationnel. Mais cela ne voudrait pas dire qu'il y attache la même signification que son interlocuteur. Cette signification ne peut être dégagée uniquement du langage employé, elle dépend aussi des expériences qui ont conduit à la formation du réseau relationnel, c'est-à-dire qu'elle dépend de ce qui s'est déroulé au niveau de pensée inférieur.

Si l'on ne prend pas le contenu des symboles en considération, mais uniquement

leurs relations, on peut dire que, du point de vue mathématique, tout est parfait. L'élève est capable de manier le réseau relationnel de la déduction sans se tromper. Mais au point de vue pédagogique et didactique, au point de vue social, on a lésé l'élève ! On a commis une faute pédagogique, car on a enlevé à l'élève l'occasion de prendre conscience de son pouvoir créateur. Au point de vue didactique, on a négligé de laisser découvrir par l'élève comment s'explorent de nouveaux domaines de pensée. On a, enfin, lésé la société, parce qu'on a mis entre les mains de l'élève un outil qu'il ne peut manier que dans les cas qu'il a étudiés.

La théorie des niveaux de pensée conduit aux importantes conclusions suivantes :

1° On a pu voir que les niveaux de pensée sont inhérents à la pensée elle-même ; ils n'intéressent donc pas seulement les personnes qui s'occupent de didactique. Les niveaux de pensée ont, par exemple, une certaine importance pour les Mathématiques elles-mêmes. On ne pourra s'exprimer de façon claire en Mathématiques que lorsqu'on se sert de symboles appartenant au niveau auquel on se place. Si l'on manipule des fonctions, il importe peu que celles-ci soient définies par l'expression $f(x)$ ou par l'équation $y = f(x)$. On apprend à connaître la fonction en la maniant et de cette activité découle le contenu de la notion de fonction. Si l'on se pose, à un niveau supérieur, la question de savoir ce qu'est une fonction, *ce que l'on a réellement fait,* on aboutira à la conclusion qu'il s'agit d'un appariement d'éléments x et d'éléments $f(x)$. La fonction n'est définie, ni par $f(x)$, ni par $y = f(x)$, mais par le symbole d'appariement que l'on pourrait représenter — si on le désirait — par f. L'erreur résulte de ce que l'on a essayé de donner une définition à un niveau de pensée inférieur, d'exploiter une structure contenue implicitement dans une activité avant que celle-ci ne soit devenue suffisamment familière. Parce que cette tentative est vouée à l'échec, on se borne, ou bien à représenter le résultat de cette action — $f(x)$ — ou bien l'action elle-même — $y = f(x)$. La faute n'est pas seulement d'ordre didactique, mais aussi théorique. (Cet exemple est tiré d'une conversation avec M. le Professeur Freudenthal).

On commet une erreur analogue lorsqu'on essaye de construire un système d'axiomes au moyen de symboles appartenant à un niveau de pensée trop bas. Les systèmes d'axiomes sont du ressort du quatrième niveau où ne se pose plus en fait la question : que sont des points, des lignes, des surfaces, etc... A ce quatrième niveau les figures sont uniquement définies par des symboles liés par des relations. Pour trouver leur contenu propre, il faudra retourner aux niveaux inférieurs où le contenu de ces symboles peut être aperçu. Mais, avec ce contenu, ces symboles appartiennent à un réseau relationnel qui ne peut être axiomatisé parce qu'il ne peut avoir de liaisons directes avec la logique.

2° De même qu'un enfant n'apprend pas sa langue maternelle en appliquant des règles grammaticales (celles-ci sont déduites de l'usage courant), il n'apprend les Mathématiques qu'en appliquant des règles mathématiques. Ces règles ne prennent consistance, c'est-à-dire ne deviennent explicitement discursives, que lorsqu'on s'interroge sur les activités déployées au niveau inférieur. C'est ainsi que naissent toutes les règles mathématiques, jusqu'aux règles de la logique formelle. L'application des règles a son importance, mais le rôle de l'application réside avant tout dans l'exploration de domaines nouveaux, voisins de celui où les règles et les lois ont été développées.

3° Deux ou plusieurs personnes peuvent se comprendre dans un domaine de pensée déterminé quand elles disposent d'un langage dans lequel elles ressentent les mêmes relations entre les signes linguistiques. La certitude des Mathématiques repose sur la façon infaillible avec laquelle le langage mathématique peut être employé. Le « mathématicien à tout prix » peut s'en contenter : le LANGAGE est tout pour lui et il ne se soucie guère de ce qu'un symbole représente pour autrui.

(Qu'on songe à la dualité point-droite dans le plan projectif !). Il n'y a pas de problème du point de vue algorithmique. Mais si l'on se préoccupe aussi de savoir si la concordance aura encore lieu lorsque le champ d'investigation sera étendu, il est souhaitable d'examiner si les symboles employés par l'interlocuteur sont issus d'un même fond. Il ne suffira plus alors d'apprendre les signes linguistiques et leurs liaisons, mais il faudra partir du même matériel au niveau inférieur et examiner si l'on parviendra à partir de là, à développer les mêmes domaines de symboles supérieurs.

L'élaboration d'un cours de géométrie.

La première partie d'un cours de géométrie doit permettre d'atteindre le premier niveau de pensée, que nous intitulerons celui de l'*aspect de la géométrie*. Le but de l'enseignement est le suivant : les figures géométriques telles que le cube, le carré, le losange, le rectangle, le cercle, etc... doivent devenir des porteurs de leurs propriétés. Un losange n'est plus reconnu à son apparence, mais, par exemple, au fait que les côtés sont égaux ou que les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu, ou à ces deux propriétés réunies.

On emploie un ensemble de figures géométriques concrètes et des matériaux grâce auxquels les élèves réaliseront eux-mêmes ces figures. *Les manipulations que les élèves effectueront* avec ce matériel seront la base du nouveau réseau relationnel en voie de formation.

La deuxième partie du cours doit permettre d'atteindre le deuxième niveau de pensée, que nous intitulerons l'*essence de la géométrie* ou l'*aspect des Mathématiques*. Le but de l'enseignement est maintenant d'apprendre les relations qui lient les propriétés des figures. Par exemple : la somme des angles d'un triangle vaut 180° ; les angles alternes-internes, formés par deux droites parallèles et une sécante, sont égaux. De plus, on commence, durant cette période, à ordonner logiquement les propriétés des figures. La première propriété citée plus haut devient antécédente de la suivante : la somme des angles d'un quadrilatère convexe vaut 360°.

Le matériel peut être constitué d'une série de triangles ou de quadrilatères égaux au moyen desquels les élèves essayeront de construire un pavage. Ici encore, les élèves apprennent à déceler une structure en manipulant le matériel. Ils *voient* apparaître dans le pavage réalisé au moyen de triangles égaux des systèmes de droites parallèles, des parallélogrammes, des trapèzes, des hexagones ayant des centres de symétrie, etc... Ce matériel fournit plus tard, de façon naturelle, la droite de construction qui permet de démontrer au moyen d'angles alternes-internes que la somme des angles d'un triangle vaut 180°.

La troisième partie du cours doit permettre d'atteindre le troisième niveau, celui du *discernement en géométrie*, de *l'essence des Mathématiques*.

Le but de l'enseignement est maintenant de comprendre ce que signifie ordonner logiquement (qu'entendons-nous par : Telle propriété « précède » telle autre propriété ?).

Le matériel est constitué par les théorèmes de géométrie eux-mêmes. En ordonnant ces théorèmes apparaîtra le lien entre un théorème et ses réciproques, pourquoi des axiomes et des définitions sont indispensables, quand une condition est nécessaire et quand elle est suffisante. Les élèves pourront essayer maintenant d'ordonner logiquement de nouveaux domaines, par exemple, lorsqu'ils étudieront pour la première fois le cylindre. L'analyse de ce qu'ils perçoivent leur apprendra que la surface cylindrique contient des droites et des circonférences. Après avoir énoncé une définition, ils pourront essayer de démontrer l'existence de droites et de circonférences.

Si le cours pouvait être poursuivi plus avant (mais cela sera généralement impossible dans l'enseignement moyen), il atteindrait le quatrième niveau, celui du *discernement en Mathématiques*. Le but de l'enseignement serait, à ce niveau, d'analyser en quoi consiste l'activité du mathématicien et en quoi elle diffère de l'activité

déployée dans d'autres disciplines. Quelqu'un ne peut atteindre ce quatrième niveau que lorsqu'il est tellement familiarisé avec les démarches du mathématicien, qu'il exécute celles-ci automatiquement. Il s'est formé chez lui des valences telles qu'une démarche entraîne les autres. Et ce n'est qu'alors qu'une intégration de ces démarches est possible, permettant à l'homme d'embrasser la structure de l'activité en Mathématiques.

Mais une pareille intégration se produit déjà lors de la transition d'un niveau de pensée à un niveau supérieur. Au cours du passage du niveau de base au premier niveau, c'est la manipulation des figures qui fait naître une structure. Celle-ci alimente la pensée au premier niveau. Ainsi les figures deviennent de nouveaux symboles définis par leurs relations avec d'autres symboles.

Au premier niveau le contexte diffère de celui du niveau de base. L'action développée dans ce nouveau contexte fournit une intégration qui rend possible l'accès au deuxième niveau et ainsi de suite.

Le professeur qui, délibérément, s'efforce d'amener ses élèves d'un niveau à l'autre, les met en mesure de développer eux-mêmes un système déductif et de déceler des fautes dans un raisonnement déductif. En agissant ainsi, le professeur n'impose pas les domaines où la pensée s'exercera, mais aide ses élèves à les préciser eux-mêmes. Cela ne signifie pas, comme il a été signalé déjà plus haut, qu'il laissera à l'élève le soin de tout découvrir, mais qu'il exigera de lui une activité particulière qui, dans chacune des cinq phrases, est autrement dirigée. Une application des principes énoncés ici n'entraîne sûrement pas un allégement de la tâche du professeur. Mais il aura la satisfaction de savoir ce qu'il fait et de mieux comprendre les réactions des élèves.

L'enseignement d'un système déductif exige avant tout de la patience. Ce système n'existe qu'au troisième niveau de pensée, son essence n'est perçue qu'au quatrième niveau. Il peut paraître tentant d'édifier la géométrie à partir des transformations du plan, mais alors on se fixe à nouveau comme but de construire un système déductif. On ne peut confondre cette édification avec l'élaboration de la pensée géométrique. Si l'on prend les transformations comme point de départ, on suppose déjà l'existence d'un domaine de pensée préexistant. Quiconque est trop pressé, réduit son propre domaine de symboles, chez les enfants, à des symboles intuitifs qui se situent à un niveau bien inférieur et qui n'ont pas la signification qu'il leur confère. En l'occurrence, on forme des types algorithmiques, c'est-à-dire des esprits capables d'appliquer les algorithmes de façon satisfaisante sans que, pour autant, ils connaissent suffisamment leur contenu. On enseigne dans ce cas de la matière sans valeur formative suffisante.

Quand on dirige trop vite l'enseignement vers le réseau relationnel mathématique, parce qu'on dédaigne d'enseigner le réseau de relations géométriques, on risque de manquer les Mathématiques pour jamais. Ce qu'on atteint, c'est un réseau de relations verbales dans lequel de nouvelles opérations sont impossibles. On trouve l'exemple d'une telle erreur dans l'enseignement des fractions en Hollande. Par cet enseignement, on constitue un réseau relationnel verbal. Pour la plupart des élèves, les opérations avec les fractions sont tout à fait incompréhensibles. Que les professeurs réalisent profondément que dans l'enseignement le réseau relationnel des élèves vaut mieux que celui des professeurs !

L'essentiel de la notion de niveau de pensée réside dans la constatation que, dans chaque discipline scientifique, il est possible de penser et de raisonner à différents niveaux et que ce raisonnement fait appel à des langages différents. Ces langages usent parfois des mêmes signes linguistiques, mais ceux-ci n'ont pas alors la même signification et sont reliés de façon différente aux autres signes linguistiques. Cette circonstance constitue une entrave à l'échange de vues qui s'établit entre le professeur et l'élève à propos de la matière enseignée. Elle peut être considérée comme le problème fondamental de la didactique.

SUR LES PROBLÈMES

En guise de préambule.

« Un homme aimait l'horticulture. Il soignait ses boutures avec amour, plus d'amour peut-être que de compétence. Il voulait leur assurer les meilleures conditions de développement : terreau bien préparé, arrosage soigneusement dosé. Ses réussites l'encourageaient. L'une d'elles surtout : jamais personne n'avait obtenu en pot une plante aussi magnifique, au feuillage si feuillu. Pour ce spécimen, notre ami des plantes avait su créer « un paradis ». La plante n'étendait ses racines que pour le plaisir de se ramifier dans un terreau aussi douillettement nourrissant. Jamais il ne lui serait venu à l'esprit (car cette plante avait une petite tête) qu'une lutte pour l'existence — « struggle for life », comme disent les sequoias américains — pût être nécessaire et qu'elle se traduisît, à tous les niveaux de la matière vivante, par le souci primordial de la reproduction de l'espèce.

« Tant et si bien que cette belle plante, si forte, si vigoureuse, si prometteuse enfin, n'eût jamais la moindre fleur, la moindre promesse de fruit... »

⁂

On peut aussi se demander si les exercices et problèmes qui sont posés aux élèves, et que des élèves expérimentés traitent fort bien, sont justement ce qu'il faut offrir à l'esprit des écoliers et des étudiants pour que demain, ou après-demain, ces jeunes gens soient aptes à se poser comme il faut les vrais problèmes que la vie leur proposera, sous une forme évidemment moins élaborée que dans les cours de Mathématiques.

I. Sur les problèmes qui ne sont que des exercices plus ou moins bien posés.

On conçoit mal un enseignement des Mathématiques qui ne soit pas accompagné d'exercices. Cela ne se voit que dans les traités : « Les principes de géométrie analytique » de Darboux ne contiennent aucun exercice (le livre se termine cependant par l'énoncé d'un problème : Trouver toutes les transformations de l'espace cayleyen qui conservent les angles ; ce n'est pas un exercice, mais un vrai problème).

La présence d'exercices dans un livre n'est pas, cependant, une preuve qu'il sera plus facile à lire : pas d'exercices dans Darboux, des exercices dans Bourbaki. Mais si un ouvrage contient des exercices, cela signifie que l'auteur a le souci d'être compris et d'entraîner ses lecteurs à sa suite : les « Eléments d'algèbre moderne », de Lentin et Rivaud, sont riches de bons exercices ; l' « Introduction à l'algèbre et l'analyse moderne », de Zamansky, souffre de cette complète absence d'exercices en un domaine où le lecteur moyen a justement besoin de beaucoup s'exercer.

Au niveau élémentaire, on ne conçoit pas un enseignement des Mathématiques sans exercices d'application et d'entraînement. On va même parfois jusqu'à concevoir un enseignement qui n'est qu'un entraînement aux problèmes d'examens : faire des problèmes d'entrée en Sixième, faire des problèmes de B.E.P.C., faire des problèmes de baccalauréat. Combien d'entreprises, par cette caricature d'enseignement, ont perverti la jeunesse de cette façon qui plaît aux familles (on fait des problèmes pour être reçu aux concours, on passe des concours pour avoir une situation, il faut avoir une situation pour fonder une famille, il faut fonder une famille pour avoir des enfants, il faut que les enfants fassent des problèmes pour passer des examens et des concours, etc...).

La défense des droits de l'enfant et de l'avenir de la science nous impose de penser sérieusement à la réforme profonde des examens qui ont actuellement le pas

sur l'enseignement. Alors que les examens ne devraient pas avoir dans l'enseignement plus de place que celle du thermomètre médical dans l'ensemble de la science médicale.

Il est facile de critiquer les problèmes tels qu'ils sont généralement posés. La preuve : lorsque, dans l'A.P.M., on entreprend de critiquer des problèmes d'examen, il y a plus de contributions que pour n'importe quel autre travail, y compris celui de proposer des bons énoncés.

On hésite entre le « problème de recherche », qui doit développer l'intuition, le sens de la découverte, mais qui présente aussi de réelles difficultés, et le problème-type qui n'est que la vérification de l'acquisition de quelques bons trucs qui réussissent dans les cas favorables (ceux qui ne se réalisent jamais !).

Pour aplanir certaines difficultés de la recherche, on peut suggérer un procédé : A et A' étant sur Ox, B et B' sur Oy, Ox et Oy perpendiculaires, OA $<$ OA' et OB $>$ OB', on demande de démontrer AB $<$ A'B' ; on suggère de construire une longueur intermédiaire (mais c'est justement cette construction qui est le véritable sujet de ce problème des obliques).

De même, pour le problème du trajet AMB minimum, A et B étant d'un même côté de la droite D sur laquelle il faut placer M, on suggère de construire B' symétrique de B par rapport à D, ce qui est le véritable problème (1).

Les problèmes-types n'ont plus à être critiqués ; la relation $a\,(bc + d) = e$ fournit cinq problèmes : ayant quatre lettres, trouver la cinquième.

Citons quelques exemples précis, tirés d'un manuel de Sixième, qui n'est plus en usage depuis de longues années (mais qui n'en est pas moins représentatif d'un mode de présentation des problèmes encore très fréquent). Dans la préface, on peut lire :

« L'enseignement des Mathématiques doit contribuer à la culture de l'esprit des enfants en leur donnant le goût du travail bien fait, le sentiment de l'ordre et de l'harmonie, et en développant largement leur esprit critique sans lequel il n'est pas de vraie culture. »

On notera que ces intentions, aussi excellentes qu'elles soient, ne mentionnent pas le développement du goût de la recherche, non plus que le sens de la découverte. Voyons comment l'esprit critique des élèves est invité à s'exercer.

Exemple 1. — Un propriétaire a acheté une propriété de 123 752 f. Il a dû faire des réparations pour 28 741 f ; il a revendu ensuite avec un gain net de 42 507 f. Quel a été le prix de vente ?

Passons sur ce détail de rédaction : un propriétaire achetant une propriété qui semble vouloir illustrer certaine thèse sur l'accumulation du capital. Ou sur l'invraisemblance des données au franc près. Examinons le fond : il est invraisemblable que le bénéfice ait été connu avant que le prix de vente ait été fixé ; une expérience même réduite des tractations immobilières en assurera les élèves. Si la rédaction est différente, c'est que l'exercice figure à la fin d'un chapitre sur l'addition. Il s'agit donc d'un exemple caractérisé d'un faux concret, du pire concret, le concret abstrait.

Exemple 2. — Pour construire un mur, on a utilisé 968 briques dont le volume de chacun est 2 530 cm^3. Quel est le volume du mur, le volume du mortier étant 1/50 du volume total du mur ?

Passons, là encore, sur la rédaction ; « dont le volume de chacun » est une

---

(1) A ce propos, signalons une anecdote vécue : il y a quelque temps, un élève m'a apporté, de la part de son père (polytechnicien), le dit problème, en ajoutant qu'il était extrêmement difficile, car il s'agissait de trouver, dans la famille d'ellipses de foyers A et B, celle qui est tangente à D. C'est cette solution que G. Polya présente comme naturelle dans son ouvrage « Les Mathématiques et le raisonnement plausible » (p. 98), mais qu'il écarte comme exigeant la connaissance des propriétés de l'ellipse. (A. H.).

inadvertance. Il est d'ailleurs bien curieux que ces briques soient connues par leur volume et non leurs dimensions. Mais comment a-t-on pu savoir, avant de construire le mur, que le mortier occuperait 1/50 de son volume ?

Exemple 3. — Quel est le volume d'une sphère pleine en fonte de 1 m de diamètre et quelle est sa masse, la densité étant de 7,72 ?

L'élève n'est-il pas en droit de répondre : Qu'on me la montre cette sphère, je n'y crois pas. D'ailleurs, si cette sphère existait, qu'en ferait-on ? (là est le problème...).

Ces exemples suffisent à montrer qu'il est facile d'inventer des énoncés absurdes, même s'ils semblent bien adaptés à un programme. On a inventé des situations invraisemblables, on en a embrouillé l'exposé et on demande à l'élève de démêler l'écheveau. Mais pour cela, il y a Scotland Yard et Agatha Christie.

II. Des nombreuses catégories de problèmes.

Il est facile et plus ou moins amusant de critiquer. Quel est le professeur qui a toujours posé des problèmes intelligents et bien adaptés ? Qui, d'ailleurs, a appris à le faire, sinon par l'expérience de l'enseignement ? Dans mon cas personnel, je suis certain d'avoir proposé beaucoup plus de mauvais problèmes que de bons, et je continue, avec seulement l'avantage de savoir que ce que je fais est insuffisant et qu'il faut chercher à faire « autrement ». Je donne donc ici le compte rendu décevant de mes essais.

Je suis persuadé qu'il faut d'abord bien distinguer les diverses catégories de problèmes classés d'après les buts que se propose le professeur :

1) Exercices pour... s'exercer : selon l'adage : « C'est en forgeant qu'on devient forgeron ; c'est en calculant... » On apprend ainsi $(a + b)$ $(a - b)$; ces exercices ne sont pas suffisants, car ils ne suppléent pas à une compréhension véritable des relations algébriques ; mais ils sont indispensables à un entraînement au calcul qui rendra ultérieurement service (il est ridicule de voir des garçons de 17 ans qui butent sur des obstacles de ce genre).

D'ailleurs, il doit y avoir un moyen de trouver des exercices d'entraînement qui prolongent l'acquisition des éléments et font entrevoir de plus vastes perspectives ; alors les exercices d'entraînement conduisent l'élève à la mise au point de fiches où un ensemble de connaissances se trouve résumé par l'élève lui-même (parti pour s'entraîner, il finit par acquérir une compréhension plus profonde).

2. *Problèmes de recherche.* — Conçus pour développer les dons d'intuition, le sens de la découverte ; il est souvent nécessaire de doser l'effort d'invention afin de ne décourager personne ; l'idéal serait d'adapter l'énoncé à l'élève. On peut aussi organiser une recherche collective ou par groupe de quelques unités. L'idéal est d'atteindre le grand problème, celui qui est ordonné autour d'une ou de plusieurs idées et de le terminer par des questions très générales qui permettent à l'élève qui a vraiment bien compris de s'engager à sa façon dans une recherche personnelle.

J'ai essayé en classe de donner des énoncés sans question. Les résultats ont été très décevants, mais je ne les crois pas probants. Les élèves étaient trop surpris à l'idée que s'il n'y avait pas de question, il fallait se poser les questions (élèves déformés par les traditions, réflexes conditionnés).

Ces mêmes traditions sont encore un obstacle à la libre recherche ; on demande s'il faut résoudre par l'arithmétique ou par l'algèbre. Et des élèves ne comprennent pas qu'on leur réponde qu'il faut trouver la solution, que c'est l'essentiel. Il est vrai que jusqu'à 1958, il y a eu un problème de géométrie à l'agrégation où il fallait ne se servir que des connaissances d'un élève de Mathématiques Elémentaires, même si cet effort empêchait de trouver la solution du problème (il est vrai que cet exemple ne prouve rien, puisqu'il est tiré d'un concours et que la formule du concours tourne

le dos à la pédagogie). En tout cas, rares sont les élèves qui avoueront franchement le recours à un modèle pour trouver un problème (alors que le recours à un modèle est la règle de la découverte en physique théorique). Ces contraintes artificielles sont le résidu d'une conception malheureusement non disparue de l'éducation où la contrainte joue un rôle primordial.

Il faut donc habituer les élèves à choisir librement leurs moyens de recherche. Guider vers la liberté et non guider vers des habitudes.

Ce qui ne signifie pas qu'on omet le respect des grands principes. Au contraire on y pense, et les élèves finissent par penser eux-mêmes que cette découverte aventureuse ne suffit pas ; qu'il faut organiser la victoire, c'est-à-dire mettre au point la démonstration, puis rédiger, faire une belle figure ou plusieurs ; présenter un travail qu'on puisse lire et comprendre.

Ainsi le problème de recherche conduit à un travail très complet et très formateur. Il est long, difficile à corriger (corriger la première version, en faire faire une seconde et ne s'arrêter que si le résultat est bon) ; la notation d'un tel travail me paraît complètement inutile (c'est déjà un premier moyen de faire perdre l'habitude aux gens qu'il faut donner des notes ; comme si on pouvait noter des travaux intellectuels... Si vous mettez 20 à la géométrie de Descartes, combien mettrez-vous à Bourbaki ? Mais si vous ne mettez pas 20 à Descartes, combien mettrez-vous au premier de votre classe ?).

J'oubliais : la démonstration, la rédaction, ne suffisent pas, après la découverte ; il faut aussi vérifier la validité des résultats, si possible trouver des applications du résultat théorique obtenu.

3) *Exercices de vérification.* — Conçus pour que le professeur vérifie que ses élèves ont compris, ont appris, savent se sortir de situations de plus en plus complexes. Problèmes de composition et d'examen. Ils doivent être conçus pour donner une mesure facile et numérique des connaissances des élèves. Les épreuves de baccalauréat actuelles ne répondent absolument pas à cela : trop grande place laissée au hasard de la découverte et aux difficultés particulières de rédaction. Un drame récent (un $\frac{\pi}{2}$ drame) au baccalauréat deuxième partie montre, en toute évidence, que certains examinateurs ne conçoivent pas l'épreuve d'examen comme une épreuve de mesure. Pour eux, c'est un concours et il est souhaitable que les esprits brillants y donnent leur mesure. Dans un examen, il est au contraire indispensable de n'éliminer que les insuffisants : quant aux esprits brillants, il y aura d'autres occasions dans la vie pour qu'ils fassent valoir leurs dons (ceci dans la mesure où on l'estime utile).

III. Quels sont les bons problèmes ?

Reste à traiter la question essentielle : existe-t-il de bons problèmes ? (bons, c'est-à-dire pédagogiquement utiles et satisfaisants du point de vue de la formation des étudiants).

Réponse positive assurée, car il y a de bons problèmes scientifiques, ceux qui ont fait progresser la découverte.

Exemple « a contrario » : les ignorants posent souvent la question : Y a-t-il des habitants sur Mars et Vénus ? Problème mal posé, disent les astronomes avertis, car il y a bien d'autres questions à résoudre avant celle-ci (cf. « Life in other worlds », par Spencer Jones).

Exemple probant : les observations de Tycho Brahe, à une minute d'angle près, ont permis à Képler de découvrir le mouvement de Mars, alors qu'une plus grande précision des mesures l'aurait mis en présence des perturbations et lui aurait peut-être caché l'essentiel. Ayant les lois de Képler, on a pu trouver la loi de Newton, et c'est celle-ci qui fait prévoir les perturbations (travail de Clairaut sur le retour de la comète de Halley) ; on pourrait continuer...

Dans la classe, il est bon que le problème serve d'introduction à une théorie ; il faut qu'il soit bien choisi.

1° Reprenons l'exemple du problème du trajet minimum AMB, A et B situés d'un même côté de la droite D, M étant à placer sur D. En réalité, ce problème propose l'introduction de la symétrie. Autant partir de l'expérience même des deux bougies qui frappe les élèves. La loi de Descartes motive l'étude de la symétrie. Sans doute un élève aura-t-il l'idée d'étudier le système de deux miroirs et l'on fera des produits de symétries. Autre avantage : l'expérience est dans l'espace et nous apprenons à nous ramener au problème plan.

2° A un niveau plus élevé, on peut citer le problème de Molyneux formulé par Leibniz, comme introduction à l'esprit de l'axiomatique : « A cette occasion, je vous proposerai un problème que le savant M. Molyneux, qui emploie si utilement son beau génie à l'avancement des sciences, a communiqué à l'illustre M. Locke. Voici à peu près ses termes : Supposez un aveugle de naissance, qui soit présentement homme fait, auquel on ait appris à distinguer par l'attouchement un cube d'un globe de même métal et à peu près de la même grosseur. Supposez... que cet aveugle vienne à jouir de la vue. On demande si, en les voyant sans les toucher, il pourrait les discerner et dire quel est le cube et quel est le globe ? » (Leibniz, *Nouveaux essais*, II, 4).

Voici quelques exemples de problèmes essayés avec des élèves et ayant conduit à des développements intéressants :

1° (Classe de Quatrième, élèves de 13 ans) : Comment ranger le long du mur plusieurs cartons à dessin de tailles diverses ? Mettra-t-on le plus près de l'angle du mur le plus grand carton ? On finit par se poser le problème général de la variation du segment qui joint A sur Ox et B sur Oy, côtés de l'angle droit (et l'énoncé déjà cité n'a plus besoin du coup de pouce indiqué plus haut).

2° Présentation d'un film de Nicolet ; essai de compte rendu ; formuler le problème que l'on se pose sur ce film ; découvrir et démontrer ; faire un compte rendu complet, un « mémoire » sur la question.

Même plan à partir de la construction d'un modèle : élèves de 15 ans (Classe de Seconde) : Comment tracer le développement des pyramides carrées à construire pour obtenir avec six de ces pyramides le développement « en volume » d'un cube ; réaliser le modèle ; rédiger un mémoire sur tout ce qui a été fait.

Même plan pour la réalisation d'un cadran solaire par des élèves de Mathématiques Elémentaires ; discussion du projet ; réalisation ; compte rendu détaillé de la réalisation (ces deux derniers exemples sont en cours de réalisation, travail de vacances ; si je peux généraliser, la classe devrait s'enrichir d'archives où ces projets seront conservés).

3° Problèmes motivés par une situation réelle : exemple d'un problème de programmes linéaires proposé aux élèves de Seconde (énoncé qui m'a été directement inspiré par un travail de M. Huisman). Pour être tout à fait complet, il aurait fallu laisser les élèves rechercher les données (entre les données réelles et celles qui sont utilisables dans les calculs il y a une marge : travail d'élaboration des données).

Programme de fabrication. — Une usine fabrique deux types d'automobiles désignés par les lettres A et B. Fixer le programme de fabrication hebdomadaire de l'usine, c'est calculer le nombre x et y de chaque type de voiture à fabriquer durant la semaine. Le but recherché est de réaliser la production maximum, celle-ci étant évaluée en valeur marchande totale de la production (a et b étant les prix de vente unitaires des voitures A et B, la production totale en francs est donc $ax + by$).

Le prix de vente unitaire de chaque voiture est la somme de quatre éléments : valeur des matières premières (a' et b' resp.), valeur de la main-d'œuvre (a'' et b''), valeur des services de recherche et de vente (a''' et b''') et bénéfices éventuels.

La production de l'usine est assujettie aux conditions suivantes :

1° Les possibilités d'approvisionnement en matières premières limitent le total des dépenses hebdomadaires sur ce chapitre à la somme P ;

2° Les dépenses sur le chapitre main-d'œuvre, compte tenu des clauses de la convention collective de travail et du nombre d'ouvriers qualifiés disponibles, sont limitées hebdomadairement à la somme M ;

3° Les dépenses hebdomadaires sur le chapitre recherche et vente sont également limitées à la somme V.

Fixer effectivement le programme de fabrication hebdomadaire dans les quatre cas déterminés par les données numériques suivantes :

	1er cas	2e cas	3e cas	4e cas
a	850 000	725 000	850 000	700 000
b	700 000	825 000	700 000	700 000
a'	100 000			
b'	60 000			
a''	120 000			
b''	120 000			
a'''	70 000			
b'''	90 000			
P	6 000 000	6 000 000	7 500 000	6 000 000
M	9 000 000			
V	6 300 000			

Dans chaque cas on évaluera le bénéfice sur chaque type de voiture et le bénéfice hebdomadaire total.

N.-B. — 1° Usage recommandé du papier millimétrique.

2° Rechercher si possible des données numériques réelles pouvant donner lieu à des problèmes semblables dits « de programmes linéaires ».

EN GUISE DE CONCLUSION.

Sans doute possible, une place prédominante est attribuée à la solution des problèmes. Une activité essentielle est ainsi escamotée, aux dépens d'une compréhension profonde des problèmes. En cette occasion, comme à propos de toute la pédagogie des mathématiques on retrouve cette idée qu'il faut s'intéresser à toute l'activité de l'esprit et pas seulement à celle qui enchaîne déductivement les théorèmes.

Non pas contraindre l'élève, les élèves, à l'activité mathématisante, mais les mettre en présence de situations qui les conduiront presque nécessairement à cette activité. Sans que ceci doive nous conduire à une religion de l'activité, et j'aimerais assez donner à cette note, en conclusion discordante, cette réflexion d'André Gide :

« Vous voulez forcer les gens à agir parce que vous avez horreur du stagnant ; les forcer à agir sans considérer que plus vous intervenez, avant leurs actes, moins ces actes dépendent d'eux. Votre responsabilité s'en augmente ; la leur en est d'autant diminuée. Or la responsabilité seule des actes fait pour chacun leur importance, et leur apparence n'est rien. Vous n'apprendrez pas à vouloir : *velle non discitur ;* simplement vous influencez ; la belle avance alors si vous pouvez à la fin procréer quelques actions sans valeur ! » (*Paludes*, p. 103).

G. W.

EXEMPLE DE PROBLÈME A MOTIF TECHNIQUE

LE PONT SUSPENDU

Cours : algèbre de Seconde, troisième trimestre ; fonction $y = ax^2$ et problèmes graphiques.

Genre d'exercice : problème d'application traité par le professeur, avec participation de la classe (si possible en travaux pratiques). Durée : demi-heure.

Problème. — Le tablier d'un pont est schématisé par une droite horizontale $x'x$ (fig. 1). Sur celle-ci on prend des points uniformément espacés, où l'on élève les verticales. Ces dernières schématisent des fils se rattachant à un fil polygonal $A_1A_2A_3$... Déterminer ce contour de façon que le poids du tablier soit uniformément supporté par les fils verticaux.

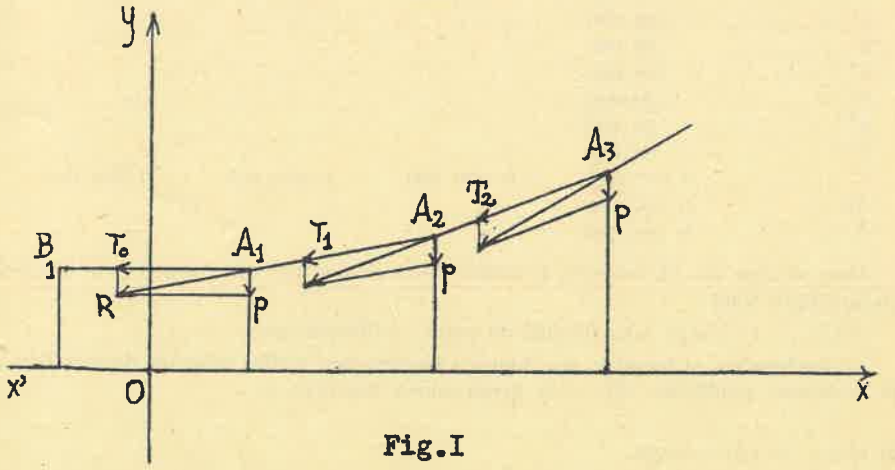


Fig.I

Solution. — 1) Etude statique. Partons de deux points consécutifs A_1 et B_1 à même hauteur. A_1 est soumis à une force T_0, ainsi qu'à une partie p du poids du tablier. Les deux forces se composent selon R. Le fil A_1A_2 doit avoir la direction R (il est donc déterminé). La force R se retrouve en A_2, où l'on peut l'appeler T_1. Le point A_2 est à son tour soumis à T_1 et à un poids p. En composant ces deux forces, on obtient la direction du fil A_2A_3, ainsi que la force T_2 agissant en A_3, etc... Notons que les directions successives peuvent s'obtenir sur une même construction (fig. 2).

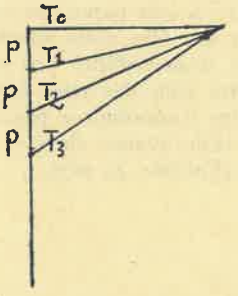


FIG. 2

2) Etude algébrique. Le contour polygonal est déterminé ; cherchons plus précisément les coordonnées des points A_1, A_2, A_3, etc... Prenons $x'x$ pour axe des abscisse, et la médiatrice de A_1B_1 pour axe des coordonnées $y'Oy$. Considérons alors un point quelconque A_n du contour.

1° Abscisse : Soit l la distance de deux verticales consécutives : on trouve immédiatement :

$$x_1 = l/2,$$
$$x_2 = l/2 + l,$$
$$x_3 = l/2 + 2l,$$
$$x_n = l/2 + (n-1)l,$$

ou encore : $$x_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)l.$$

2° Ordonnée : Par similitude :

$$\frac{y_2 - y_1}{l} = \frac{p}{T_0} \text{ d'où } y_2 - y_1 = \frac{p}{T_0}l.$$

De même :

$$y_3 - y_2 = \frac{2p}{T_0}l,\ y_4 - y_3 = \frac{3p}{T_0}l, \text{ etc... (fig. 2).}$$

Posons $\frac{p}{T_0} = k$; on peut écrire :

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= kl, \\ y_3 - y_2 &= 2kl, \\ y_4 - y_3 &= 3kl, \\ y_n - y_{n-1} &= (n-1)kl. \end{aligned}$$

Par addition membre à membre, il vient, après simplification :

$$y_n - y_1 = [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)]kl.$$

On connaît la somme $1 + 2 + 3 + \ldots + N = \frac{N(N+1)}{2}$; ici on a $N = n - 1$, d'où :

$$y_n = \frac{n(n-1)}{2}kl + y_1.$$

3° Courbe : Il est intéressant d'éliminer le paramètre n entre x_n et y_n (question classique) ; on trouvera une courbe contenant tous les points A.

On a aisément :

$$n = \frac{x_n}{l} + \frac{1}{2}$$

d'où en transportant dans y_n :

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_n}{l} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x_n}{l} - \frac{1}{2}\right)kl + y_1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_n^2}{l^2} - \frac{1}{4}\right)kl + y_1 \\ &= \frac{k}{2l}x_n^2 + y_1 - \frac{kl}{8} \end{aligned}$$

de la forme : $$y = ax^2 + b.$$

La courbe est donc une parabole.

Compléments pratiques. — Les ponts suspendus sont des ouvrages très répandus de par leur légèreté (relative). Les élèves peuvent donc vérifier « dans la nature » le résultat précédent (allure parabolique du contour).

En classe, on peut déjà montrer une vue.

Un exemple d'actualité : le pont de Tancarville, sur l'estuaire de la Seine, encore en construction. Ce sera l'un des plus grands d'Europe.

Signaler d'ailleurs que le pont suspendu est une invention française, du siècle dernier, répandue dans le monde entier.

C. DELAPIERRE,
Ecole militaire préparatoire, Les Andelys (Eure).

SUR L'UNICITÉ DE LA RÉDUCTION D'UN DÉPLACEMENT A UN DÉPLACEMENT HÉLICOIDAL

Un déplacement D est déterminé par trois points A, B, C, et par leurs homologues A', B', C' formant un triangle A'B'C' égal au triangle ABC.

On sait que si A et A' coïncident, D est une rotation autour d'un axe contenant A. Si A et A' sont distincts, on peut remplacer D par le produit de la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ et d'une rotation dont l'axe contient A'. Un tel produit est facilement réductible à une rotation ou à un déplacement hélicoïdal.

Tout déplacement D est donc l'une des transformations suivantes : translation, rotation, déplacement hélicoïdal.

Bien entendu, cette réduction peut aussi se faire à partir du point B ou de tout autre point M de l'espace. Pour cette raison, il convient de se demander si les divers procédés possibles conduisent à la même forme réduite.

⁂

Je conviens d'écrire $T = T'$ pour exprimer que les transformations ponctuelles univoques T et T' réalisent la même application de l'espace sur lui-même.

De telles relations entre éléments de l'ensemble des transformations ponctuelles sont évidemment des relations d'équivalence. En particulier, elles sont *transitives.*

Les déplacements forment un groupe relativement à leur produit. Chaque élément de cet ensemble est donc *régulier.* Par suite, d'une relation telle que

$$DD' = DD''$$

on déduira

$$D' = D''.$$

Cela est d'ailleurs valable pour toute transformation biunivoque D.

⁂

Dans la démonstration qui suit, j'assimile la translation de vecteur $\vec{V}$ au déplacement hélicoïdal $H(\vec{\Delta}, O, \vec{V})$, $(\vec{\Delta})$ désignant le support de $\vec{V}$. J'assimile également la rotation d'axe $(\vec{\Delta})$ et d'angle θ au déplacement hélicoïdal $H(\vec{\Delta}, \theta, O)$.

Considérons une relation telle que

$$H(\vec{\Delta}, \theta, \vec{V}) = H(\vec{\Delta}', \theta', \vec{V}')$$

portant sur deux formes réduites d'un même déplacement D.

Soit (X) une droite perpendiculaire aux deux droites (Δ) et (Δ'). Les déplacements hélicoïdaux $H\left(\vec{\Delta}, \frac{\theta}{2}, \frac{\vec{V}}{2}\right)$ et $H\left(\vec{\Delta}', \frac{\theta'}{2}, \frac{\vec{V}'}{2}\right)$ transforment (X) respectivement en (Y) et (Y'). Je représente par X, Y, Y' les symétries relatives aux droites (X), (Y), (Y').

On sait que

$$XY = H(\vec{\Delta}, \theta, \vec{V}),$$
$$XY' = H(\vec{\Delta}', \theta', \vec{V}'),$$

ce qui entraîne, puisque la relation d'équivalence est transitive,

$$XY = XY'.$$

Or, X est un élément régulier de l'ensemble des déplacements. Il est donc permis d'écrire $Y = Y'$.

Cette relation impose la coïncidence des droites (Y) et (Y'). Elle rend ainsi évidente l'identité des deux déplacements hélicoïdaux $H(\vec{\Delta}, \theta, \vec{V})$, $H(\vec{\Delta}', \theta', \vec{V}')$.

Ainsi : *tout déplacement admet une forme réduite et une seule.*

E. Anglade (*Lycée Lakanal*).

LE PREMIER CAS D'ÉGALITÉ MÉCONNU

On désigne souvent par le n° 1 le cas d'égalité de deux triangles ABC, A'B'C', satisfaisant aux conditions suivantes :

côté B'C' = côté BC angle B' = angle B angle C' = angle C

(les angles égaux sont adjacents au côté égal).

La coutume est de passer sous silence le cas où les données seraient :

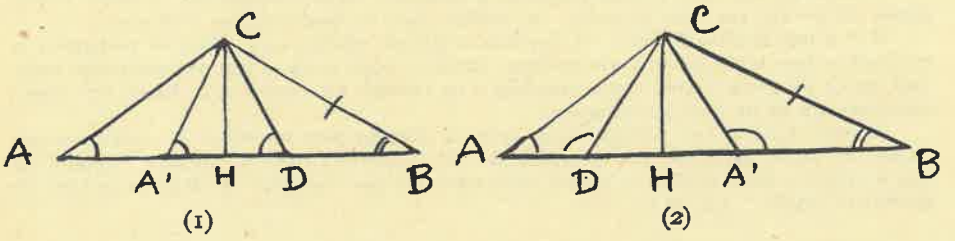
côté B'C' = côté BC angle A' = angle A angle B' = angle B

(un des angles est opposé au côté égal).

On attend de connaître, ou d'admettre A + B + C = 2 droits, pour ramener au cas n° 1.

Pourtant, il est possible de démontrer le cas méconnu, sans utiliser le postulat d'Euclide.

Voici une démontration :



Le triangle A'B'C' est placé de façon que B'C' soit sur BC, les angles B et B' étant superposés. Le point A' est donc un point de la demi-droite BA. Menons la hauteur CH. Soit D le symétrique de A' par rapport à CH. Les fig. 1 et 2 sont à rectifier au cours du raisonnement.

— Dans le cas de la fig. 1, les points A et A' sont d'un même côté de H, A et D seront de part et d'autre de H.

Le triangle CA'D est isocèle par construction. Donc angle A' = angle D.

Le triangle CAD est isocèle parce que ses angles à la base A et D sont égaux.

Les triangles CA'D et CAD possèdent en commun la hauteur *axe* de symétrie CH.

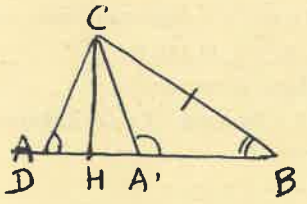
On en déduit que HA' = HA (= HD), donc les points A et A' sont confondus.

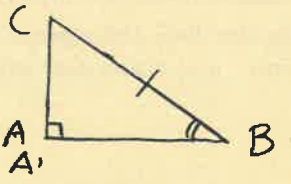
— Dans le cas de la fig. 2, les points A et A' sont de part et d'autre de H ; D est donc du même côté que A.

Le triangle CA'D est isocèle par construction, donc ses angles à la base A' et D sont égaux.

Le triangle CAD est isocèle parce que ses angles à la base A et D, intérieurs ou extérieurs, selon le cas de figure, sont égaux.

Les triangles CA'D et CAD possèdent en commun la hauteur-axe de symétrie CH. Par suite HD = HA (= HA').





Le point D est confondu avec A. Mais alors les angles en A', supplémentaires, et égaux à A sont droits et cela impose que A, D et A' soient confondus avec H. Autrement dit, on trouve ici le cas des triangles rectangles, égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.

⁂

En récapitulant les résultats dans un énoncé traditionnel, mais contenant le cas méconnu :

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal et deux angles respectivement égaux, pareillement placés.

H. Mas (*Janson*).

Je remercie mon collègue et ami Mas d'avoir rédigé cette note sur l'enseignement élémentaire de la géométrie. Il est intéressant de savoir qu'un théorème qui vient ordinairement après la théorie des parallèles est en réalité indépendant du postulat d'Euclide.

Il sera bon que Mas précise comment il démontre qu'un triangle qui a deux angles égaux est isocèle, car cette propriété est utilisée dans la démonstration ci-dessus.

Il y a une dizaine d'années, la question analogue, relative aux triangles rectangles, a été étudiée dans le *Bulletin*. Notre collègue Hémery avait proposé une démonstration reposant sur ce théorème : Tout angle extérieur à un triangle est supérieur à chacun des angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.

A cette occasion, un collègue avait écrit au Bureau pour exprimer sa conviction que c'était une honte nationale que de traiter de telles questions dans le *Bulletin*. Aujourd'hui que le *Bulletin* passe pour trop savant, nous espérons que l'initiative de Mas va susciter de nombreux émules... (A. H.).

QUELQUES REMARQUES SUR LA MÉTHODE DE SUBTITUTION APPLIQUÉE A UN SYSTÈME DE M ÉQUATIONS A N INCONNUES

D'après une conférence faite, le 13 novembre 1958, au Séminaire des Professeurs de Mathématiques de Lille, par G. POITOU, *professeur à la Faculté des Sciences de Lille.*

Le but de ces remarques est de montrer que la méthode de substitution ne permet pas seulement de calculer la solution unique du système quand il a une solution unique, mais qu'elle est aussi adaptée à la démonstration des théorèmes concernant l'existence de la solution unique.

Dans le cas d'*une* équation à *une* inconnue, $ax = b$ a une solution unique si, et seulement si a n'est pas nul ; cette condition ne dépend que de a, pas du second membre. Il s'agit de généraliser cette remarque au cas d'un système quelconque.

Soit donc un système de m équations à n inconnues :

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

qui s'écrit en abrégé :

$$(S)\quad \begin{cases} L_1 = b_1 \\ \ldots\ldots \\ L_m = b_m. \end{cases}$$

A condition que l'un au moins des coefficients des inconnues soit différent de o (au besoin après un changement de notations, on supposera que c'est a_{11}) l'application de la méthode de substitution remplace (S) par le système :

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ (S')\quad \begin{cases} L_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}L_1 = b_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_m - \dfrac{a_{m1}}{a_{11}}L_1 = b_m - \dfrac{a_{m1}}{a_{11}}b_1 \end{cases} \end{cases}$$

Toute solution de (S) est solution du second système où la première équation ne diffère que par l'écriture de l'équation $L_1 = b_1$, et toute solution de ce second système fournit en négligeant la valeur de x_1 une solution de (S'). Réciproquement, toute solution de (S'), portée dans la première équation du second système, fournit la valeur de x_1 qu'il suffit d'adjoindre à cette solution pour en avoir une du second système, donc de (S). En résumé : *aux solutions de* (S) *correspondent biunivoquement les solutions de* (S') *en « oubliant » x_1 ; en particulier, c'est ensemble que* (S) *et* (S') *ont une solution unique (l'hypothèse que tous les a_{ij} ne sont pas nuls étant alors évidemment réalisée).*

Supposons alors que (S) ait une solution unique pour un choix déterminé des a_{ij} et *quels que soient les seconds membres.* Les seconds membres étant arbitraires, on pourra en particulier faire b_1 égal à o et laisser les autres arbitraires. Les seconds

---

(1) Les a_{ij} et les b_j peuvent être des nombres réels ou, au gré du lecteur, pris dans un corps commutatif ; l'hypothèse de commutativité pouvant être levée facilement.

membres de (S') sont alors réduits à ces b_j arbitraires, et (S') a comme (S) une solution unique quels que soient ses seconds membres. Le raisonnement peut recommencer à partir de (S'), et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne, ou bien à *une équation* à p inconnues : $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_p x_p = \beta_p$ ou bien un système de q équations à *une inconnue :*

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 x = \beta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_q x = \beta_q \end{array}\right.$$

ayant, comme (S), une solution unique. Il est facile de s'assurer que, dans les deux cas, l'existence d'une solution unique pour tout choix des β, nécessite, soit $p = 1$, soit $q = 1$, ce qui implique $m = n$. En résumé : *un système d'équations linéaires ne peut avoir une solution unique, quels que soient les seconds membres, que si c'est un système carré.*

Remarque : Substantiellement, ce théorème est équivalent au théorème de la dimension pour les espaces vectoriels. En effet, on peut considérer les formules (S) comme définissant une transformation linéaire qui fait passer d'un vecteur

$$(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$$

de R^n à un vecteur bien déterminé $(b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots\ldots b_m)$ de R^m. L'existence de la solution pour des b_j arbitraires signifie que tout R^m est obtenu ; l'unicité de la solution signifie que tout vecteur $(b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots b_m)$ de R^m est le transformé d'un vecteur unique de R^n autrement dit, que la transformation est biunivoque. Le théorème exprime alors qu'il ne peut y avoir de transformations linéaires *biunivoques* d'un espage R^n *sur* un espace R^m que si les deux espaces sont de même dimension. On peut alors dire qu'un espace vectoriel réel est de dimension n s'il admet une transformation linéaire biunivoque sur R^n.

Montrons maintenant que pour tout système carré, l'existence de la solution unique est indépendante des seconds membres.

Soit un système (S) *qui pour un certain choix des* b_j a une solution unique. Le procédé décrit plus haut amène à l'équation $ax = b$ qui a, comme (S) une solution unique, donc a n'est pas nul. Mais un autre choix des seconds membres de (S) ne modifie pas a qui ne dépend que des a_{ij}, donc, a demeurant différent de 0 ; l'équation $ax = b$ a encore une solution unique et (S) aussi. Si le choix des b_j fait dans l'hypothèse est (0, 0, ... 0) le résultat s'exprime sous la forme classique : *pour qu'un système linéaire carré ait une solution unique, il faut et il suffit que le système homogène associé ait une solution unique.*

Remarque : Le coefficient a, d'où dépend l'unicité de la solution du système, n'est autre, naturellement, que le déterminant du système divisé par certains coefficients. On pourrait, à partir de cette remarque, édifier la théorie des déterminants.

Mlle VERVAECKE (*Lille*).

Nous remercions Mlle VERVAECKE d'avoir bien voulu rédiger ce résumé d'un exposé fait à Lille, dans le cadre des activités de la Régionale, la plus active avec celle de Nancy. M. R. DESCOMBES nous écrivait, il y a quelque temps :

« Je suis tout à fait convaincu de la nécessité d'une liaison étroite entre tous les ordres d'enseignement. J'espère que le Séminaire organisé à Lille depuis deux ans ne décevra pas cette année les collègues de l'Enseignement Secondaire qui nous fait l'honneur d'y venir assidûment ; ces contacts sont en tout cas très précieux aux professeurs de la Faculté. »

Ajoutons que le plus vif désir du Bureau est que de tels liens s'établissent dans toutes les Académies, pour le plus grand profit de tous.

LE BACCALAURÉAT SCIENCES EXPÉRIMENTALES

Voici quelques remarques envoyées par des collègues pour l'épreuve de Mathématiques à l'écrit de Sciences Expérimentales.

A. — *Critique des textes proposés.*

1° Le n° 3 (page 68, *Bulletin* 194) : résoudre l'équation : $\sin x + \sqrt{2}\cos x = 1$ paraît hors du programme ; il faudrait donc au moins mettre les élèves sur la voie.

2° Les textes de la page 70 semblent en général un peu difficiles, et les notations modernes inspirent quelque effroi.

3° Il est suggéré par certains collègues de réserver pour l'oral (mais ceci suppose qu'il existe !) les questions de cosmographie et d'arithmétique.

B. — *Nature de l'épreuve.*

Les avis sont partagés. Plusieurs questions indépendantes semblent unanimement souhaitées. Mais on fait remarquer que si le choix entre plusieurs questions est laissé, quatre sur six, par exemple :

1) toute une partie du programme risquerait d'être délibérément sacrifiée par certains candidats ;

2) les élèves ne possédant pas, avant de traiter ces questions, les éléments du choix, celui-ci reviendrait en fait pour eux à un tirage au sort.

La formule suggérée par plusieurs collègues serait : deux questions obligatoires, deux facultatives choisies parmi quatre.

Les collègues demandent des précisions sur les points suivants :

— quelles sont les tables numériques permises ; les candidats doivent-ils se servir de la table de logarithmes, des lignes trigonométriques, avec les quantités S et P, par exemple ;

— le papier fourni aux candidats sera-t-il quadrillé ou millimétré ;

— l'usage de la règle à calcul est-il au programme ?

3) un collègue fait remarquer les inconvénients de la suppression de l'oral pour des matières comme la cosmographie, qui risque d'être encore plus défavorisée qu'elle ne l'est déjà.

TEXTE PROPOSÉ PAR M. DÉQUATRE (LYCÉE DU PARC, LYON)

Le texte comporte cinq questions ; deux sont obligatoires, deux facultatives à choisir parmi trois autres.

1. (obligatoire). — Construire la courbe $y = x^4 + 8x^2 - 9$; calculer l'aire délimitée par cette courbe et les tangentes aux points où elle coupe Ox.

2. (obligatoire). — On pose $x = \cos\alpha$. Démontrer que $\cos^2\alpha = \dfrac{\cos 2\alpha + 1}{2}$ et que : $y = x^4 + 8x^2 - 9 = A\cos 4\alpha + B\cos 2\alpha + c$ en déterminant A, B, C constante.

Calculer y pour $\alpha = 23°$ (table des valeurs naturelles).

Questions facultatives :

3) Montrer que : $\dfrac{(x+2)^5 - (x-2)^5 - 244}{20} = x^4 + 8x^2 - 9.$

4) Pour quelle valeur positive de x les trois nombres x^4, $8x^2$ et -9 forment-ils une progression arithmétique ? Calculer cette valeur en utilisant la table de logarithme à 5 décimales.

5) Calculer la longueur du cône d'ombre portée par la lune L, éclairée par le soleil S. On donne : distance lune-soleil : 23 400 R ; rayon de la lune : 0,27 R ; rayon du soleil : 109 R, R rayon terrestre. Conclusion relative aux éclipses de soleil (distance TL = 60 R).

Rapport de Mlle MASSON (*Marie-Curie*).

Nous ajoutons ci-dessous un texte d'examen allemand que nous devons à l'obligeance de notre collègue J, VAUTARD, professeur au Lycée français de Sarrebrück (Sarre).

SUJET DONNÉ A L' « ABITUR », EN SARRE (janvier 1959)

I. — Un vase est engendré par la rotation autour de l'axe des x de la courbe $y = 2 + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, comprise entre les limites $x = -\frac{\pi}{3}$ et $x = \frac{5\pi}{3}$.

a) Tracer la méridienne et calculer son aire.

b) Evaluer par le calcul la plus grande et la plus petite section du vase.

c) Calculer le volume du vase.

II. — Soit la famille de paraboles $ty^2 + x - t - 1 = 0$ $(t > 0)$.

a) Déterminer leurs sommets et leurs paramètres $2p$ (dessin $t = 1/2$).

b) Calculer le volume engendré par la rotation autour de Ox de la partie $x > 0$.

c) Déterminer t de manière que ce volume soit minimum.

III. — On donne le cercle $x^2 + y^2 - y = 0$. Une droite issue de l'origine recoupe le cercle en A. La droite $y = 1$ coupe la droite OA en B. La parallèle à Ox menée par A coupe la parallèle à Oy menée par B en P.

a) Prouver que P décrit la courbe $(1 + x^2)y - 1 = 0$ quand OA pivote autour de O. Tracer le lieu.

b) Déterminer l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x, et les droites $x = -1$ et $x = +1$.

c) Calculer le volume engendré par la rotation de cette surface autour de l'axe des y.

Remarques : 1) Ce sujet a été donné à tous les candidats des établissements de Sarre ; il est considéré comme étant « assez facile ».

2) La correction est faite par les professeurs mêmes des candidats.

3) La proportion normale des reçus à l'examen est de 99 %...

IV. DOCUMENTATION

L'I.P.E.S. DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES

Le très grand nombre d'étudiants se présentant à Mathématiques Générales à Rennes, environ un millier à la session de juin, fait que le nombre de postes I.P.E.S. de Mathématiques est élevé, et nous n'arrivons pas à les pourvoir tous. Toutefois, le recrutement est important et posera le problème de la réorganisation des C.P.R. dans un avenir immédiat, la structure actuelle des C.P.R. ne permettant pas d'absorber les licenciés que nous espérons former.

En 1958, alors que l'I.P.E.S. ne fonctionnait que depuis un an, nous avons en effet fourni vingt élèves-professeurs licenciés de Mathématiques.

L'obligation faite aux élèves-professeurs licenciés en juin de se présenter aux épreuves orales théoriques du C.A.P.E.S., dès le mois de juillet, a eu des effets désastreux, et nous espérons bien que les élèves-professeurs obtiendront une année complète pour préparer, à la fois, un diplôme et les épreuves orales théoriques du C.A.P.E.S. C'est d'ailleurs le vœu unanime de la Commission permanente de perfectionnement des I.P.E.S. et C.P.R.

Pendant leur scolarité à l'I.P.E.S., nos élèves-professeurs suivent, en plus des cours normaux de licence, des séances de travail par groupes de 30 à 40, et à raison d'une heure par semaine. Ces séances sont assurées par des chefs de travaux et des assistants, et sont destinées, d'une part, à préparer la formation du futur professeur, d'autre part, à parfaire les connaissances des élèves-professeurs en vue des certificats de licence qu'ils préparent. Ces séances ne donnent lieu à aucun travail supplémentaire.

Si nous en avions les moyens financiers, nous envisagerions volontiers d'ajouter à ces séances de travail quelques séances d'interrogations, comme cela a pu se faire à Rennes pour les élèves-professeurs préparant la licence de chimie, eu égard à leur petit nombre.

Enfin, nous aimerions que nos élèves-professeurs disposent d'une part d'un foyer, d'autre part de salles de travail ; mais l'exiguïté actuelle de nos bâtiments ne nous a pas permis encore de trouver une solution à ces problèmes...

Grâce à un effort soutenu, nous avons réussi à recruter, depuis le 1er avril 1957, et pour l'ensemble des disciplines, un total de 410 élèves-professeurs, y compris le concours de janvier 1959.

Enfin, nous avons pu constituer dans chaque département (mathématiques, physique, chimie, sciences biologiques, sciences de la Terre) une bibliothèque comportant des livres du niveau du 2e et du 3e cycle que les élèves-professeurs peuvent consulter et emporter.

(*Renseignements aimablement communiqués par* M. Y. Martin, *directeur de l'I.P.E.S. de la Faculté des Sciences de Rennes et dont nous le remercions*).

Statistiques concernant l'I.P.E.S. Sciences de Rennes

Section : Mathématiques

DATES DES CONCOURS	NOMBRE DE POSTES OFFERTS	NOMBRE DE CANDIDATS	Nbre DE PLACES DÉFINITIVEMENT POURVUES
Avril 1957	45	47	34
Juin 1957	128	90	34
Janvier 1958	100	35	33
Avril 1958	49	50	49
Juin 1958	175	92	31
Janvier 1959	?	35	?

V. LA VIE DE L'ASSOCIATION

RAPPORT GÉNÉRAL SUR L'ACTIVITÉ DE L'A.P.M.

Développement de l'A.P.M. — Au moment où ce rapport est écrit (5 février), 2 412 membres ont payé leur cotisation ; 500 autres anciens ont négligé de le faire. Mais comme ils continuent à recevoir et accepter le *Bulletin*, nous croyons fermement que ce n'est qu'un oubli de leur part et, à contre-cœur, nous nous résignons à leur envoyer une lettre où, délicatement, nous essayons de les rappeler à une prosaïque réalité.

Si ces collègues réparent leur oubli, l'Association compte donc actuellement plus de 2 900 membres, ce qui constitue un pas vers les 3 000 que se fixait mon prédécesseur et ami WALUSINSKI, pour les deux prochains exercices.

L'Enseignement Technique et les Cours Complémentaires sont toujours, numériquement, mal représentés dans nos rangs, et cela ne pourra guère changer sans un sérieux effort de prospection, et surtout une plus grande diversité dans la composition du *Bulletin*. Et ce dernier progrès sera assurément le plus difficile à atteindre...

Par contre, nous avons eu la satisfaction de recueillir l'adhésion de trente membres de l'Enseignement Supérieur ; eu égard aux effectifs de cet ordre d'enseignement, ce résultat est honorable, mais nous espérons bien l'améliorer encore, et réaliser cette liaison étroite entre tous les ordres d'enseignement dont notre collègue DESCOMBES, de la Faculté des Sciences de Lille, signale ailleurs la nécessité.

Avec les I.P.E.S., nous avons maintenant une pépinière de nouveaux membres. Nous avons fait, dans celles de Rennes, Poitiers, Lille et Nancy, un essai de propagande qui ne manquera pas d'être fructueux.

Les Conférences de la Société Mathématique de France. — La liaison entre l'Enseignement Supérieur et l'Association s'est traduite, comme les années précédentes, par l'organisation des Conférences de la Société Mathématique de France. Délaissant l'algèbre et la topologie (dont nous ne méconnaissons certes pas la beauté ni l'importance), nous pénétrons cette fois dans le domaine moins familier encore des probabilités et de la statistique qui, avec leurs applications à la théorie des jeux, à la recherche opérationnelle et aux machines à calculer, nous donneront des « études » fort précieuses pour le *Bulletin*.

Ici, nous devons rendre hommage à nos vice-présidents MAGNIER et REVUZ : c'est à eux, à leur activité, que nous devons l'organisation des conférences, et les démarches qu'elle implique ; c'est à eux qu'en revient tout le mérite.

Le baccalauréat Sciences Expérimentales. — La Commission chargée, dès juin 1958 par le Bureau de présenter un projet pour l'épreuve écrite de Mathématiques, a recueilli l'opinion des collègues (ceux du moins qui ont bien voulu la manifester). En général, la préférence est pour une épreuve formée de questions indépendantes, les avis différant quant au nombre de ces questions et à leur caractère partiellement facultatif. Nous avons dès lors donné dans le *Bulletin* des exemples de telles questions, dus pour une part à des collègues, pour une autre à des examens étrangers similaires. Dans ce dernier cas, il s'agissait d'une simple documentation, telle qu'elle a été souvent souhaitée, sur ce qui se passe ailleurs à un niveau comparable.

Certains se sont émus, oubliant que l'A.P.M ne joue, en tant que telle, aucun rôle dans le choix des sujets effectivement proposés, pas plus qu'elle ne décide de la forme définitive que prendra l'épreuve nouvelle. Nous nous excusons d'avoir négligé ce principe élémentaire que ce qui va sans dire, va encore mieux en le disant, et préci-

sons par exemple que les sujets sarrois reproduits dans ce *Bulletin* ne sont nullement des modèles que nous proposons aux rédacteurs de sujets de baccalauréat.

En définitive, seule l'Assemblée générale est qualifiée pour émettre un vœu autorisé en ce qui concerne l'épreuve écrite de Mathématiques de Sciences Expérimentales.

Quant à la question de cours, certains plaident pour son maintien. Faisons-leur remarquer que sa suppression (en Sciences Expérimentales) est décidée depuis longtemps, exactement depuis la réunion du Conseil d'Enseignement du 9 janvier 1958. D'autres, au contraire, se réjouissent de cette disparition, et souhaitent qu'elle s'étende à d'autres séries de la première partie. La question mérite examen (1).

La réforme du baccalauréat. — Ceci nous amène à l'irritante question du baccalauréat, qui a toujours tenu tant de place dans nos préoccupations (place abusive diront certains). Le voici, malgré nous, ramené au premier plan de l'actualité.

En dehors du fait que la réforme récente peut avoir une incidence fâcheuse sur la durée de nos vacances, évaluée à tort à trois mois par l'opinion publique, on peut estimer malheureuse la suppression de l'oral et bâclé tout le décret du 6 janvier. Ce n'est pas une raison pour que nous improvisions, et le Comité, le 29 janvier, a désigné une Commission chargée d'élaborer un projet de réforme du baccalauréat. Elle se réunira pour la première fois le 19 février, et n'aura évidemment pas terminé ses travaux le 22 mars. Peut-être aura-t-elle néanmoins quelques éléments de discussion à présenter.

Il est en tout cas certain que l'accroissement prévu des effectifs des candidats oblige à reconsidérer le problème de l'examen dans son ensemble. Sinon, nous nous verrons un jour imposer une autre réforme aussi improvisée que la dernière, voire celle qu'écarte (momentanément ?) l'exposé des motifs du décret, et qui consisterait à supprimer purement et simplement le baccalauréat (2).

Horaires et programmes. — Après nous avoir accordé une minime augmentation d'horaire dans les classes du premier cycle, en 1957, l'administration a cru devoir prendre une mesure compensatrice en conseillant (circulaire du 16 mai 1958) d'écarter les mathématiciens de la répartition des heures de travail dirigé instituées en Sixième et Cinquième.

A vrai dire, il arrive que ces heures ne soient guère disputées. Elles ne sont pas intégrées dans l'emploi du temps régulier de la classe, et il est parfois difficile de concilier les occupations des élèves et des professeurs pour leur trouver une place.

Aussi proposerons-nous de reprendre un vœu déjà formulé : porter l'horaire hebdomadaire du premier cycle à quatre heures, l'heure nouvelle étant consacrée au travail dirigé, avec dédoublement des effectifs.

Cette mesure devrait être étendue aux classes du second cycle, même aux sections littéraires, auxquelles il nous faut accorder un soin particulier ; ce qui entraîne à

---

(1) Dans une note qu'on lira plus loin, notre collègue VAUTARD avance que nous sommes à peu près seuls au monde à conserver la question de cours. Il y a là de quoi faire réfléchir, en dépit de Descartes (« La pluralité des voix n'est pas une preuve qui vaille rien pour les vérités un peu malaisées à découvrir, à cause qu'il est plus vraisemblable qu'un homme seul les ait rencontrées que tout un peuple »).

(2) « Pour de nombreuses raisons, il ne nous a paru, ni possible, ni désirable de supprimer, comme on l'a souvent suggéré, le baccalauréat et de couronner les études secondaires par un simple certificat de fin d'études, dont la valeur et la signification eussent été trop inégales, trop contestables, et nombreux les dangers. »

demander, pour ce second cycle, en entier, la même augmentation d'une heure hebdomadaire.

Ceci nous amène à la question des programmes. Ceux des sections scientifiques ont été présentés par la Commission dirigée par notre collègue SIROS (voir *Bulletin* 180). Aucun projet n'a été rédigé pour les sections littéraires. Nous avons demandé au groupe de travail de Sèvres, dirigé par Mlle DIONOT, de s'en occuper. Ce qu'il a fait, avec la participation active de M. SIROS.

Il s'agit de fixer un programme qui ne soit pas un mauvais démarquage de celui des sections scientifiques, qui soit adapté au caractère des classes de lettres, et qui tienne compte des activités futures des élèves, lesquels, quelle que soit la carrière qu'ils choisiront, auront besoin, de plus en plus, d'un bagage scientifique certain.

Enfin, il est une autre raison pour donner à ces programmes une physionomie originale : se garder d'offrir des prétextes à ceux qui, de temps à autre, proposent de revenir à l'égalité scientifique de triste mémoire.

Sans doute, toutes ces conditions définissent un problème assez délicat. Nous avons jugé qu'il serait bon d'introduire, dès la Seconde, des notions de statistique, et aussi de laisser au professeur, même pour le fonds, une certaine liberté dans son enseignement (3).

L'Assemblée générale aura à se prononcer sur cette importante question. Nous donnons en annexe le projet de Sèvres pour la Seconde (qui n'a d'autre prétention que d'être une base de départ), ainsi que le programme de Sciences Expérimentales déjà publié précédemment (*Bulletin* 185).

Les Journées de Pentecôte. — Les journées d'études de Pentecôte 1959, dont le principe a été adopté par le Comité à la suite du dépouillement des bulletins de vote de l'Assemblée générale 1958, auront un programme assez difficile à définir brièvement.

On parle beaucoup des sciences depuis quelque temps, et beaucoup des Mathématiques en particulier. On insiste sur l'urgence (incontestable) qu'il y a à former le plus grand nombre possible de scientifiques. Le Comité a pensé qu'il serait utile de demander à des techniciens comment ils conçoivent l'enseignement des Mathématiques. Cela s'est déjà fait en 1958, sur l'initiative de la direction de l'Aéronautique, mais au niveau des Spéciales seulement. Notre désir serait que cet examen se fasse à tous les niveaux d'enseignement.

Bien entendu, il ne s'agit nullement de nous transformer en instructeurs « bassement utilitaires », ni de faire de nos élèves des techniciens prématurés. Les légitimes défenseurs de la culture, dont nous sommes tous, n'ont aucune raison de s'alarmer. Mais, enfin, la culture est une notion assez vague, assez pour ne pas s'opposer à la vie, et rappelons-nous qu'autrefois des Grecs s'étaient vus accuser d'utilitarisme sordide pour avoir étudié des courbes qui ont connu depuis une belle carrière dans notre enseignement.

Il est banal de remarquer que certains esprits sont rebelles à l'abstraction, au moins provisoirement, et qu'il serait bon d'avoir à leur proposer des problèmes concrets propres à les séduire et à les délivrer de leurs complexes. Parlant de Fatou, Alain disait : « Selon mon opinion, il est mort de l'ennui mathématicien. »

Grâce aux dieux, nos élèves n'en sont pas là. Mais ceux des classes de lettres ont, plus que d'autres sans doute, besoin d'un bain de réalisme. Beaucoup d'entre eux seront plus tard contraints d'utiliser des documents (statistiques, études de marché, recher-

(3) Voir le questionnaire joint au bulletin de vote.

che opérationnelle) pour la compréhension desquels il ne serait pas bon qu'ils doivent s'en remettre aveuglément à des spécialistes.

D'une confrontation avec les techniciens, nous espérons qu'il pourra sortir des thèmes nouveaux que nous pourrions utiliser, prudemment cela va sans dire.

Dès à présent, nous pouvons compter sur le concours de M. SCHWARTZ, directeur de l'Ecole des Mines de Nancy ; de membres qualifiés de l'enseignement commercial, et, en principe, sur celui de M. KUNTZMANN, professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Pour en terminer sur ce sujet, disons que nous avions songé un moment à choisir Nancy comme siège des Journées. Des difficultés administratives nous ayant fait perdre du temps, nous avons dû finalement renoncer à ce projet. Sans doute estimera-t-on que cet essai de décentralisation devra être repris une autre année.

Conclusion. — Voilà, dira-t-on, beaucoup de sujets d'étude, sans compter les sujets de mécontentement. Encore en avons-nous négligé, ne serait-ce que les thèmes d'études proposés par les prochaines années par la Commission Internationale de l'Enseignement mathématique :

1° quelles sont les questions de Mathématiques modernes et quelles sont les applications des Mathématiques modernes qui peuvent trouver place dans les programmes de l'Enseignement Secondaire ;

2° étude comparée des méthodes d'enseignement employées pour le passage de l'arithmétique à l'algèbre.

Que de difficultés en perspective ! Mais tout ce qui est beau, disait Spinoza, est difficile autant que rare. Et ne sommes-nous pas certains que les Mathématiques sont belles ?

A. H.

ANNEXE I

PROJET DE PROGRAMME DE SECONDE (LETTRES).

Algèbre. — Révision simultanée du calcul arithmétique et du calcul algébrique sous forme d'exercices.

Résolution de l'équation du second degré à coefficients numériques.

Fonctions $y = x$, $y = ax$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{a}{x}$. Représentations graphiques.

Trigonométrie. — Définition des fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ pour un angle aigu. Extension aux angles compris entre 0 et 2π.

Relations entre les fonctions trigonométriques d'un même angle.

Usage des tables de $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.

Géométrie. — Révision des programmes antérieurs, notamment :

Théorème de Thalès ; similitude ; rapport de configuration et rapport de similitude. Triangles semblables ; illustration des propriétés des rapports et des proportions.

Relations métriques dans le triangle rectangle.

Géométrie dans l'espace : repérage d'une direction (azimut et hauteur, longitude et latitude). Notions simples sur la sphère.

Notions de statistique. — En liaison avec le programme de géographie, notamment de géographie humaine.

Série statistique de valeurs observées d'un caractère ; notion de fréquence, construction de tables de fréquence relatives à une série statistique.

Diverses formes de graphiques utilisées dans la présentation des faits économiques ou démographiques.

Etablissement et interprétation sommaire de ces graphiques.

REMARQUES.

Il pourra être fait usage des notions d'ensemble, de réunion et d'intersection d'ensembles, dont des exemples se présenteront fréquemment dans le programme et les applications.

Tout le programme doit donner lieu à des applications et des problèmes numériques empruntés au programme de physique de la classe, ou à des applications concrètes telles que des problèmes simples de programme linéaire.

Une certaine liberté doit être laissée au professeur dans le choix de ses thèmes d'étude. Notamment, il y aurait intérêt à étudier le développement historique des idées fondamentales. Des exemples devraient être donnés, pour aider ceux qui ont scrupule à sortir apparemment du programme.

ANNEXE II

PROGRAMME POUR LA CLASSE DE SCIENCES EXPÉRIMENTALES.

Commentaire

L'ordre des questions inscrites au programme n'est pas impératif.

Ces questions, surtout en ce qui concerne les paragraphes III et IV, seront établies en vue des applications, ainsi qu'il est explicitement dit au paragraphe IV.

Leur étude ne devra donc pas comporter les développements théoriques qui, malgré leur beauté et leur rigueur, pourraient rebuter des élèves dont certains peuvent venir des sections non scientifiques. Il est conseillé alors, plutôt que de donner des démonstrations approximatives, de préciser clairement les résultats admis sans démonstration.

Les Mathématiques enseignées dans cette classe doivent être considérées comme outil (une réserve étant faite cependant pour l'arithmétique).

Le libellé du paragraphe V est volontairement imprécis ; le professeur, tenant compte du niveau de la classe, décidera de l'ampleur et du nombre des exercices qu'il peut faire étudier.

Arithmétique

I. — Notion du nombre naturel (ou entier) liée au dénombrement des collections. Numération décimale. Autres systèmes de numération, changement de base. Définition et propriétés des sommes, différence, produit, puissance, quotient entier des nombres naturels. Théorie des opérations permettant de les trouver.

Divisibilité. Recherche des caractères de divisibilité usuels : 2, 4, 5, 25, 3, 9, 11.

Preuve des opérations.

Diviseurs communs de deux ou plusieurs nombres, P.G.C.D. Nombres premiers entre eux. Nouveaux caractères de divisibilité. Multiples communs à deux ou plusieurs nombres. P.P.C.M.

Nombres premiers. Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers. Application aux diviseurs et multiples.

II. — Notion de fraction, liée à la notion de fraction de grandeur. Egalité et

inégalité des fractions. Simplification. Fractions irréductibles. Réduction au même dénominateur.

Définition et propriétés des somme, différence, produit, puissance et quotient exact des fractions.

Fractions décimales et fractions convertibles en fractions décimales. Notion de nombre décimal. Opérations sur ces nombres.

Valeurs approchées d'un nombre à moins de $\frac{1}{10}$ près par défaut et par excès. Application à la détermination d'un quotient à une approximation donnée. Erreur absolue, erreur relative.

III. — Notion de rapport (ou quotient exact) de deux nombres naturels, fractionnaires ou décimaux. Extension aux rapports des propriétés des fractions.

IV. — Définition des arrangements, permutations, combinaisons, en vue des exercices de dénombrement.

Probabilités simples. Notions très élémentaires de calcul statistique.

Binôme de Newton.

Trigonométrie

Rappel, contrôle et mise en ordre des questions fondamentales des programmes de Seconde et Première CM.

Variation et représentation graphique des fonctions du type :

$$x = a \cos(\omega t + \varphi) + x_0.$$

Formules de transformation en produit de la somme et de la différence de deux cosinus, ou de deux sinus ou de deux tg.

Dérivées de $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.

Usage des tables de valeurs naturelles, des tables de logarithmes à cinq décimales et des règles à calcul.

Variation de fonctions trigonométriques.

Calcul vectoriel

Révision du cours de Seconde ; vecteur libre, somme vectorielle ; produit d'un vecteur par un scalaire, rapport de deux vecteurs de même direction. Définition du produit scalaire et du produit vectoriel.

Composantes d'un vecteur.

Barycentre.

Fonctions vectorielles d'une variable. Dérivation vectorielle.

Algèbre

Fonction d'une variable, fonction monotone, fonction inverse.

Fonction dérivée (révision du cours de Première). Dérivée seconde.

Dérivées d'une somme, d'un produit, d'une puissance, d'un quotient, d'une racine carrée. Dérivée logarithmique.

Dérivée d'une fonction de fonction ; de la fonction inverse.

Variation et représentation graphique de fonctions polynômes, rationnelles et irrationnelles simples.

Notion de différentielle. interprétation graphique, différentielle logarithmique.

Application aux calculs d'erreurs.

Primitives ; interprétation graphique.

Fonction $y = \text{Log } x$; formule $\text{Log } ab = \text{Log } a + \text{Log } b$.
Logarithme décimal.
Suites arithmétique et géométrique. Questions de limites relatives à ces suites.
Fonction exponentielle $y = \exp x$. Formule $\exp (a + b) = \exp a \times \exp b$.
Fonction $y = e^x$. Dérivée.
Fonction $y = a^x$. Dérivée.
Usage d'exposants fractionnaires et négatifs. Dérivée de $y = x^n = e^{n \text{Log} x}$.
Usage du papier millimétrique et des graphiques.

Notions de géométrie analytique

Définition des coordonnées d'un point dans le plan et dans l'espace.

Application à l'étude de quelques courbes dont la connaissance sera utile dans des questions d'astronomie, de physique, de chimie et de sciences naturelles.

ANNEXE III

A PROPOS DE LA « RÉFORME DU BACCALAURÉAT ».

La presse et la radio nous ont appris que le Ministre et le Conseil des Ministres avaient, par ordonnances, « réformé » notre vieux baccalauréat. Que, dans ce domaine, tout fut pour le mieux, nul ne le soutiendra. Que certaines modifications de détail aient vu le jour, cela me semble normal. Qu'une modification de la structure de cet examen intervienne, comme s'il s'agissait d'une opération chirurgicale, voilà qui me semble plus douteux, sinon peu justifiable. Enfin, les faits sont là, la « Réforme » est ordonnée, il ne nous reste plus qu'à « veiller au grain »...

Première inquiétude, les coefficients des diverses épreuves de Mathématiques, seront-ils, comme l'avaient recommandé les Conseils d'Enseignement, la somme des coefficients anciens, écrit plus oral ? Ne risque-t-il pas plutôt d'y avoir un « aménagement » des coefficients, noyant les épreuves scientifiques dans un ensemble « littéraire » ? Et ceci, après avoir obtenu la création d'une série 1re CM, à tendance scientifique renforcée.

Deuxième sujet d'inquiétudes, le « rachat » possible entre 7 et 10 sur 20. Suffira-t-il désormais au candidat bachoteur d'apprendre quelques questions de cours « fréquentes » pour se voir conférer la première partie ?

En cas d'immersion de l'épreuve de Mathématiques dans l'ensemble des autres épreuves non scientifiques (je ne parle évidemment pas des sciences physiques), les professeurs de Mathématiques pourraient proposer l'une des « réformes » suivantes (c'est à l'ordre du jour...) et ceci, dans le but de conserver une valeur scientifique à la première partie du baccalauréat dans les séries A' C M :

1) Suppression pure et simple de la question de cours, le problème débutant obligatoirement par une question d'application directe du cours (résolution d'une équation, construction d'un graphique, calcul d'une aire, d'un volume, énoncé d'un théorème de géométrie et son application directe à la figure du problème, etc...).

2) Remplacement de l'épreuve sous sa forme actuelle par une épreuve « à la Suédoise ».

3) Addition obligatoire à chaque question de cours, comptant toujours pour la moitié de l'épreuve, d'une application.

4) La question de cours ne compte plus pour la moitié de l'épreuve, mais pour un quart, ou un tiers.

Sans vouloir méconnaître la valeur mathématique (et même littéraire) de la question de cours, son existence (unique, ou presque, au monde dans les épreuves de

Mathématiques) me paraît être un des facteurs d'incertitude et d'injustice du baccalauréat actuel :

Que de cancres reçus avec une note de question de cours variant entre 7 et 10 ! (et évidemment 0 au problème), et combien y en aura-t-il en plus dans le baccalauréat « nouveau style » ?...

Et, à l'opposé, et ceci me semble plus grave, combien de 18 et de 19 en puissance chez des candidats excellents, transformés en 13 ou 14 sur des négligences de détail du candidat pressé de chercher son problème ! (le cancre a trois heures pour traiter sa question de cours...).

Je propose donc, et il me semble que ceci pourrait être fait rapidement, que l'A.P.M. prenne position sur le problème de la « réforme » de l'épreuve de Mathématiques à la première partie, compte tenu de « l'élément nouveau » que constitue la « Réforme du baccalauréat ». Il va sans dire que le problème se pose aussi pour les épreuves de la deuxième partie, et que les remèdes seront également à étudier.

J. VAUTARD, *Lycée français de Sarrebrück.*

Compte-rendu financier
du 12 mars 1958 au 4 février 1959

RECETTES

En caisse le 12 mars 1958	1 972 663
Cotisations et compléments	2 395 150
Bulletins	100 576
Recettes brutes de publicité	394 000
Versement du Laboratoire d'Astronomie de Lille	11.700
Total	4 874 089

DÉPENSES

Frais d'impression des *Bulletins* n^{os} 189 à 195	1 997 440
Frais de secrétariat et de gestion	87 390
Abonnement à la Société Mathématique	500
Total	2 085 330
Actif au 4 février 1959	2 788 759

L'actif comprend un fonds de réserve de 5 930 F concernant 33 rachats de cotisations.

Le Trésorier remercie son prédécesseur, M. LEGRAND, de lui avoir laissé une succession facile à assurer malgré le surcroît de travail causé par le contrôle des entrées de nombreuses cotisations au montant insuffisant. Il remercie, en outre, les collègues qui ont bien voulu se charger de collecter les cotisations dans leurs établissements respectifs et qui lui ont ainsi facilité la tâche.

Le Trésorier souhaite que tous les adhérents nous aident dans la réorganisation de nos fichiers. Pour cela, il leur suffira de compléter très consciencieusement les fiches qui seront encartées dans un prochain *Bulletin*. Il souhaite aussi que le versement des cotisations se fasse en tenant compte des indications qui seront rappelées en temps opportun.

Le Trésorier : NICOLAS.

RAPPORT SUR LES CONCOURS DES GRANDES ÉCOLES

Notre Président ayant insisté pour renouer une tradition de notre Association, j'ai donc accepté de présenter à l'Assemblée générale un rapport sur les concours d'admission aux Grandes Ecoles. Un vœu, émis jadis, souhaitait que cette tradition disparaisse par absence de toute critique. Si, ces années passées, il n'y a pas eu de rapport, ne croyez pas cependant qu'il n'y a pas eu matière à critique. La raison en est, tout simplement, que, n'ayant reçu aucune remarque de mes collègues, je n'avais pas cru utile de faire connaître une opinion strictement personnelle. Je dois avouer que, malgré un appel paru au *Bulletin* n° 196, je n'ai reçu qu'une seule communication. C'est dire que si ce rapport devait être proportionné au nombre des textes reçus, il serait très bref. Cependant, voici quelques remarques, résultats en général de conversations avec des collègues.

Remarquons d'abord que l'année 1958 était la deuxième année scolaire d'application des nouveaux programmes. En 1957, les énoncés portant sur les parties nouvelles du programme avaient été rares : le premier problème du concours de l'Ecole Normale Supérieure proposait l'étude des déplacements de l'espace à l'aide des matrices ; le problème du concours commun des Mines comportait une question sur le mouvement d'un point gêné.

On pouvait donc penser qu'en 1958 les tentatives seraient plus nombreuses. Effectivement, en ouvrant en mai 1958 la série des concours, le concours commun des Mines proposait, dans sa première épreuve, deux sujets inspirés par les nouveaux programmes. Le premier problème exigeait des notions sur le calcul des intégrales triples et dans la première question il fallait montrer que si, a, b, c sont trois nombres réels non négatifs, le polynôme $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, n'est pas négatif. Si on connaissait l'identité

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{a+b+c}{2}\left[(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2\right]$$

la solution était immédiate ; sinon elle demandait un certain temps ; il eût donc été équitable, dans une première question, de guider les candidats.

Le deuxième problème (rotation sur une sphère), tel qu'il était posé, exigeait quelques notions de calcul matriciel.

Le premier problème du concours de l'Ecole Normale Supérieure (garçons et filles) proposait l'étude des quaternions à l'aide des matrices. Les trois premières parties ne prêtent à aucune critique, l'auteur de l'énoncé ayant pris la précaution de définir les opérations à effectuer et ne figurant pas au programme (addition de deux matrices). Par contre, la dernière partie semble beaucoup moins heureuse dans sa rédaction. Il est question d'un espace vectoriel complexe à deux dimensions, muni d'une multiplication interne non commutative, mais distributive, la nature des éléments n'étant pas fixée. Il s'identifie, en définitive, à l'espace vectoriel complexe défini à partir de la base $(1, j)$ où j est tel que $j^2 = -1$, $ij + ji = 0$. Cette identification était difficile et les candidats sont peu habitués à ce genre d'identification.

Il aurait donc fallu guider davantage les élèves en faisant préciser au fur et à mesure de l'étude les résultats relatifs aux différentes opérations, permettant les identifications qui conduisaient au résultat final.

Le problème d'analyse du concours de l'Ecole Centrale fait également appel au calcul matriciel. A partir d'une équation différentielle du second ordre, à coefficients constants, on construit une matrice carrée d'ordre deux, $M(u)$, dont les élémnets sont des solutions de l'équation donnée, et telle que $M(u).M(u) = M(u \times u)$. La deuxième partie du problème est l'étude de la réciproque.

L'épreuve d'algèbre et d'analyse du concours aux Ecoles d'Ingénieurs de Grenoble et Poitiers, proposait le calcul des intégrales doubles de certaines fonctions dans un domaine déterminé.

Le sujet de la deuxième composition du concours de l'Ecole Polytechnique comportait deux parties. La première partie faisait intervenir une partie nouvelle du programme de cinématique en faisant étudier le mouvement d'un certain solide. La deuxième partie, classique, étudiait analytiquement certaines propriétés généralisant les résultats de la première partie.

Signalons enfin plusieurs études de mouvement de point gêné (Ponts et Chaussées, Air, Ecole Supérieure d'Electricité) et nous aurons épuisé les sujets faisant appel aux nouveautés du programme.

Abordons maintenant les critiques.

Le premier problème soumis aux candidats à l'Ecole Polytechnique était l'étude élémentaire d'un type de fonction de Bessel. Si, comme le note le correcteur, « il n'exigeait aucune érudition et restait à la portée de tout élève moyen de Spéciales pourvu de qualités d'ordre et de soin dans les calculs », il n'en reste pas moins que cette composition était difficile, et, ce qui est plus grave, comportait une faute de texte. La formule

$$F_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{x}\frac{u\cos du}{\sqrt{x^2-u^2}}$$

n'est valable que si x est positif. L'énoncé n'ayant pas mentionné cette hypothèse, les candidats se sont demandé s'ils n'avaient pas commis une erreur et ont ainsi perdu un temps précieux.

Etait-ce bien utile pour faire étudier, au concours commun des Mines, le mouvement d'un point sur une ellipse, de placer cette ellipse dans l'espace sous prétexte que sa projection sur xoy était un cercle ?

Mais tout ceci n'est que peu de chose. En vérité, il n'y a eu de véritables difficultés que pour deux problèmes.

Le premier est le problème de mécanique du concours de l'Ecole des Ponts et Chaussées ; il comportait l'étude du mouvement d'un point sur une surface. Or, le texte du programme est très net : « mouvement d'un point sur une courbe fixe sans frottement ». Il est toujours regrettable que de pareils faits se produisent, car c'est toujours au détriment des candidats.

Le deuxième est le problème de mécanique du concours de l'Ecole Supérieure d'Electricité, à propos duquel M. Lefebvre m'a envoyé ses remarques, ce dont je le remercie vivement.

Le problème était un problème commun aux trois options, A, B et ancien régime. Visiblement construit à partir du programme A, l'adaptation au programme de l'ancien régime n'a pas été réussie.

Au début du problème intervenait une composition d'accélérations avec un mouvement d'entraînement de rotation, question qui ne figurait pas dans l'ancien programme ; sans doute le texte rappelait le théorème à utiliser ; mais il eût mieux valu rester dans les limites du programme.

A la fin du problème figurait une question de mécanique du point gêné, question encore hors programme. D'ailleurs, l'énoncé ne donnait aucune indication sur les actions de contact.

Enfin, une imprécision dans le texte : un point est assujetti à rester dans un plan mobile, sur quelle courbe doit-il se trouver pour être en équilibre indifférent ? S'agit-il d'une courbe géométrique ou d'une courbe matérielle ? L'énoncé est muet. Or, l'hypothèse « courbe géométrique » conduisait à une contradiction avec l'énoncé.

Les candidats ont cru avoir commis une faute et ont perdu du temps à rechercher leur erreur.

En terminant, je me bornerai à rappeler un vœu déjà émis :

« L'Association des Professeurs de Mathématiques demande que toutes les Ecoles fassent revoir les textes proposés par des mathématiciens au courant des programmes en vigueur dans les classes de Mathématiques Spéciales. »

Je fais appel également à la bonne volonté de tous pour me faire parvenir des critiques ou remarques qu'il y aurait intérêt, d'ailleurs, à publier dès la fin de la période des concours.

CHAZAL (*Lycée Charlemagne*).

RAPPORT SUR LES DÉFINITIONS DE MOTS ET NOTATIONS MATHÉMATIQUES

La révision des termes et symboles mathématiques est une tâche permanente de notre Association. Non seulement de nouvelles décisions peuvent être sollicitées, mais encore il n'est pas toujours inutile de rappeler d'anciennes discussions, même si un vote est intervenu. L'opinion peut s'être modifiée après l'expérience et les jeunes collègues ne sont pas toujours avertis.

Un mot, un symbole, doit être proposé à deux conditions ; nous satisfaire, et être bien accueilli des élèves. Après un essai assez long, l'Assemblée générale décide si la modification est heureuse, utile, donc recommandable. Même si l'emploi du nouveau terme reste facultatif, il doit alors être toléré dans les examens. Ajoutons qu'un accord avec l'Enseignement Supérieur et les conventions internationales est vivement souhaitable s'il est possible.

Il est inutile de revenir sur les termes, même un peu anciens, dont la fortune a été particulièrement heureuse ; ainsi, le mot « médiatrice ». Je me souviens d'avoir été violemment prise à partie vers 1925 par le père d'une élève qui me disait avoir très bien pu faire de la géométrie sans ce mot ridicule et inutile !

I. — TERMES DÉJA CONSEILLÉS, DONT L'USAGE N'EST PAS ADOPTÉ PAR TOUS.

1° *Factoriser*, opération inverse de développer :

$$E_1 = a(b + c), \qquad E_2 = ab + ac.$$

Passer de E_1 à E_2, c'est développer. Passer de E_2 à E_1, c'est factoriser, c'est-à-dire mettre sous forme d'un produit de facteurs.

2° *Radicande*, expression qui subit l'opération indiquée par un radical :

$$E = \sqrt{\Delta}, \text{ le radicande est } \Delta.$$

Remarquons que, pour une puissance A^k, A est la *base* et k l'exposant. L'introduction des exposants fractionnaires conduit, pour $\sqrt{A}$ ou $\sqrt[n]{A}$, à nommer A la base, 2 ou n étant l'*indice* $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{n}$ étant l'exposant.

3° *Rapport de configuration* ou *rapport interne* dans une figure qui doit subir une similitude ou une homothétie. Ce rapport est invariant dans la transformation. A distinguer du rapport de similitude ou rapport d'homothétie.

4° *Rapport de section.* — Ce terme, en usage en Belgique, remplace notre « rapport suivant lequel un point divise un segment ». On dira donc. « A, B étant donnés, et M sur la droite AB, le rapport de section de M est $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ ». Quelle convention précise est la meilleure ? $\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}}$ ou $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$? Peut-être la première, car A est la véritable origine, point remarquable, tandis que B, nommé le second, est supposé donné par comparaison à A, par la distance à A par exemple.

5° *Nombres relatifs.* — Un nombre n est algébrique s'il existe un polynôme $P(x)$ à coefficients entiers, tels que $P(n) = 0$.

On propose d'appeler nombres *relatifs* les nombres obtenus par symétrisation de nombres absolus:

Les *entiers naturels* donnent ainsi naissance aux entiers relatifs, ensemble réunion de l'ensemble des entiers positifs, de l'ensemble des entiers négatifs et de zéro.

Les *nombres rationnels absolus* donnent naissance aux rationnels relatifs.

L'ensemble réunion de tous les ensembles de nombres relatifs constitue l'ensemble des *nombres réels*, par opposition à l'ensemble des nombres imaginaires, c'est-à-dire *complexes* à deux termes $ai + b$, ou hypercomplexes comme les quaternions.

Dans les applications, les nombres relatifs définissent ou sont définis par la distinction d'un sens positif et d'un sens négatif.

6° *Terminologie concernant les transformations ponctuelles.*

a) $F \overset{\mathcal{C}}{\frown} F'$. On peut écrire $F' = \mathcal{C}(F)$, $M' = \mathcal{C}(M)$, la figure F' est l'*image* de F. Le point M' est le *conséquent* de M, lequel est l'*antécédent* de M'.

b) Dans un espace orienté, dont le nombre de dimensions est donné, les *isométries* sont les transformations qui conservent les distances ; elles se classent en *déplacements* (conservation du sens des angles) et *antidéplacements* (changement de sens des angles). Une figure et son image par un déplacement sont égales ; une figure et son image par un antidéplacement sont dites *antiégales*.

Question posée : Ne faudrait-il pas remplacer le mot « égales » au sens actuel qui indique la possibilité de passer d'une figure à l'autre *dans l'espace considéré* par une famille continue d'isométries, par le mot « congruentes » ? Le mot, pris dans ce sens, est qualifié de vieilli par Littré ; il est utilisé en anglais et éviterait bien des confusions dans le langage des jeunes élèves. Par l'antidéplacement, formerons-nous l'adjectif *anticongruentes ?*

c) *Symétrie.* — Le mot, employé absolument, signifie, pour les Belges et les Anglais, suivant le sens étymologique et l'usage courant, toute répartition des éléments suivant une loi simple. En un sens non précisé, les diverses parties se présentent de façon analogue. Les symétries d'un cube ou d'un cristal comprennent les rotations autour d'axes de répétition d'angle $\frac{M}{3}$ par exemple.

Si l'on adopte ceci, le mot *symétrique* n'évoque plus l'idée de réciprocité de la transformation.

Rien n'empêche toutefois d'extraire de cet ensemble très imprécis les cas les plus importants : symétrie *centrale* (par rapport à un point), *axiale* (orthogonale ou non, par rapport à une droite et un plan directeur), *planaire* (orthogonale ou non, par rapport à un plan et une direction directrice. Rappelons le tableau :

Espace :	SYMÉTRIE CENTRALE	SYMÉTRIE ORTHOGONALE AXIALE	SYMÉTRIE ORTHOGONALE PLANAIRE
1 dimension	Antidéplacement (1)	Transformation identique	
2 dimensions	Déplacement (2)	Antidéplacement (4)	Transformation identique
3 dimensions	Antidéplacement (3)	Déplacement (5)	Antidéplacement (6)

Y a-t-il lieu d'attribuer un nom spécial à ces six transformations ? Le mot *renversement* ou *demi-tour* convient bien à (5). Le mot retournement fait penser à un changement de sens (retourner un gant). Est-il conseillé pour (3), (4) et (6) ?

Aucune difficulté pour *similitude* ou *antisimilitude*.

d) Exiger pôle d'inversion éviterait des erreurs aux débutants ; un pôle est un point singulier ; un centre est plutôt un point invariant.

II. — QUELQUES TERMES ET SYMBOLES DE PLUS EN PLUS EMPLOYÉS.

Logique :

$\Longrightarrow$ « *entraîne* » ; déduction logique.

$\Longleftrightarrow$ « équivaut à » ; équivalence logique.

$\forall$ « quel que soit » ou « pour tout » ; quantificateur universel.

$\exists$ « il existe au moins un... tel que » ; quantificateur existentiel.

Théorie des ensembles.

$\in$ « appartient à », « est un élément de » ; relation d'appartenance d'un élément à un ensemble.

$\notin$ « *n'appartient pas à* »,

$\subseteq$ « *est inclus dans* » ; relation d'inclusion d'un ensemble dans un autre.

$\subset$ « *est strictement inclus dans* ».

$\cup$ « *union* » ; opération de réunion de deux sous-ensembles.

$\cap$ « *intersection* », opération d'intersection de deux sous-ensembles.

$\complement A$ « complémentaire de A » : opération de complémentarité d'un sous-ensemble par rapport au référentiel.

Référentiel : l'ensemble des éléments considérés que l'on classera en sous-ensembles.

$\emptyset$: « *ensemble vide* » : sous-ensemble ne contenant aucun élément.

Naturellement, tous ces signes, de même que les signes habituels : $+$, $\times$, $-$, $=$, $\leqslant$, $<$, etc.... ne sont admis que dans les formules séparées du texte, les résumés,

en particulier ceux que l'on écrit au tableau. Ils ne peuvent dispenser de la rédaction. Ce sont des symboles dont l'emploi est strictement réglementé, et non des abréviations.

Nous prions les collègues de bien vouloir signaler toute autre question concernant langage et symbole, et répondre aux questions soulevées dans ce qui précède.

D'après les opinions que les membres de l'Association voudront bien exprimer, un questionnaire précis pourra être préparé pour l'Assemblée générale de 1960.

Le Rapporteur : L. FÉLIX,
Lycée La Fontaine, Paris.

QUERELLE DE MOTS?

(*Suite à l'enquête sur le vocabulaire et le symbolisme*)

A la suite des remarques de nos collègues SCHAEFFER et DUPIN (*Bulletin* 196, p. 160), je soumets à leur appréciation et à celle des Collègues les réflexions suivantes.

S'il s'agit d'une querelle de mots, comme tout le monde sait qu'un *cheval* n'est pas un *dada*, l'accord sera facile. Si l'accord est difficile, c'est qu'il y a, au-delà des mots, une divergence plus importante.

Je commence par la critique (c'est le plus facile !) des propositions de SCHAEFFER. Il a bien raison de dénoncer l'incohérence qui consisterait à maintenir *mesure algébrique* après avoir introduit *nombre relatif*. DUPIN a raison, également, et il doit s'agir d'un lapsus.

Nombres *qualifiés*, c'est inacceptable tout nombre doit l'être, sans quoi on ne saura pas de quel ensemble de base il est extrait ; exemple : entier *naturel* (vous avez le droit de vous moquer de ce « naturel », comme celui des enfants, ou des valeurs des fonctions circulaires...).

Nombres *indiens*, c'est amusant ; mais je pense à Buffalo Bill avant de penser au Indes ; puis il y a le précédent fâcheux des chiffres arabes, qui ne le sont pas ; surtout la Mathématique est universelle, elle n'a pas de patrie.

Nombres *orientés*, cela vaut certainement mieux ; compréhensible, c'est vrai, mais peut-être trop étroitement associée à l'introduction de ces nombres par le repérage d'un point sur un axe. Or, il est tout de même permis de les introduire comme ensemble de base ou référentiel dans lequel toute soustraction est possible. Surtout, SCHAEFFER note l'inconvénient de laisser ce nom, nombres orientés, subsister à côté du synonyme, nombres réels.

Là est la solution, à mon sens : j'y reviendrai.

Terminons la critique. Notre Collègue DUPIN, après SCHAEFFER, dénonce justement les usages multiples du mot *relatif*. Et il n'a pas voulu aller jusqu'aux extrêmes, l'imbécile « *tout est relatif !* » et le savant « La théorie de la Relativité générale ». DUPIN et SCHAEFFER ont raison de signaler les confusions possibles avec « erreur relative » et avec l'heureuse formule « relative à » d'emploi si courant.



Pour ma part, je crois résoudre ces difficultés en fixant terminologie et notations de la façon suivante (valable pour toutes les classes, dans la mesure où elles ont à connaître ces généralisations successives de la notion de nombre) :

1° Zéro (noté 0) appartient à tous les ensembles suivants :

N désigne l'ensemble des *entiers naturels.*

Z désigne l'ensemble des *entiers relatifs.*

Q désigne l'ensemble des *rationnels* ($\mathbf{Q}_+$ l'ensemble des rationnels positifs ou nuls).

2° **R** désigne l'ensemble des nombres *réels* ($\mathbf{R}_+$ les réels positifs ou nuls).

3° **C** désigne l'ensemble des nombres *complexes.*

Enfin, on sait $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

En pratique, on ne précise pas la définition des réels *avant* la classe de Troisième (et en Troisième...) ; cela interdit-il d'employer le mot ? Est-il possible de n'employer que des mots complètement définis ? Dans une théorie parfaitement axiomatisée, oui ; dans un enseignement d'initiation, non.

L'expression nombre *réel* est claire, brève ; elle est conforme à la terminologie mathématique générale ; on la trouve dans Goursat *et* dans Bourbaki. Il n'y a plus que dans les classes de Mathématiques qu'on ne l'emploie pas !

⁂

La question des *mesures* se pose-t-elle ?

Pour un segment, il ne peut être question que de mesure de sa longueur, nombre appartenant à $\mathbf{R}+$. Pour un vecteur, il ne peut s'agir que d'un nombre réel. Dans les deux cas, je proposerais de dire seulement mesure du segment (par abus de langage, pour mesure de la longueur du segment) et mesure du vecteur ; on précisera, en cas de besoin l'unité choisie.

Cela peut conduire aux notations suivantes :

droite AB ou (AB) ou AB,

segment fermé AB ou [AB],

segment ouvert AB ou]AB[,

longueur du segment AB ou |AB|,

mesure en mètres de la longueur du segment AB ou $\text{mes}_m\,|AB|$,

vecteur AB ou $\overrightarrow{AB}$ ou (A, B) ou **AB**,

mesure du vecteur AB relativement au vecteur i $\text{mes}_i\,\overrightarrow{AB}$ ou $\overline{AB}$.

Vous direz que c'est affreusement lourd. C'est vrai. Mais on ne donne toutes les précisions que lorsqu'elles sont utiles.

⁂

Emporté par l'élan, je profite de l'occasion pour dire un mot du symbolisme. Son usage est controversé. Il est vrai qu'en aucun cas le symbolisme ne doit exclure l'expression complète et correcte en français (oralement ou par écrit). Le symbolisme codifié et bien choisi a cependant ses avantages pendant la recherche ou pour résumer celle-ci. Ses avantages seront accrus par la codification.

A l'expérience, il me semble pratique d'utiliser :

$\forall$ quantificateur universel (en français « pour tout... »),

$\exists$ quantificateur existentiel (en français « il existe ») et sa variante ? $\exists$ (« existe-t-il »),

$\in$ appartient à et sa négation $\notin$,

$\Longrightarrow$ « implique »,

$\Longleftrightarrow$ implication réciproque.

L'exercice de traduction, de « Existe-t-il un entier naturel x tel que son triple soit égal à 4 ? », en « ? $\exists\ x \in \mathrm{R}$ tel que $3x = 4$ » et l'exercice inverse sont instructifs. Le symbolisme ne gêne pas l'expression en français, il l'aide.

Les symboles d'intersection $\cap$, de réunion $\cup$ des ensembles, et de l'ensemble vide $\emptyset$ sont très pratiques.

Enfin l'axe $x'x$ est l'image de $\mathbf{R}$; le plan euclidien est $\mathbf{R}^2$; l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$.

En géométrie plane ($\mathbf{R}^2$) le parallélisme strict et le parallélisme au sens large de deux droites D et E se distinguent facilement :

parallélisme strict $\quad \mathrm{D} \cap \mathrm{E} = \emptyset$,

parallélisme au sens large $\quad \mathrm{D} /\!/ \mathrm{E}$.

Dernier symbole préconisé : $\equiv$ dans le sens « congruent à » (suivant le module...).

M'étant permis de répliquer à nos Collègues Schaeffer et Dupin, je souhaite qu'ils me répliquent à leur tour et qu'ils ne soient pas les seuls.

G. Walusinski.

POUR UN PROGRAMME D'ACTION DE L'A.P.M.

La tradition veut que les candidatures pour le renouvellement du Comité de l'A.P.M. ne soient accompagnées d'aucune déclaration. La remarque a été faite plusieurs fois que les adhérents sont donc invités à voter dans l'ignorance presque complète des intentions des candidats. On sait bien d'ailleurs que jamais aucune candidature n'a été écartée et que, le plus souvent, la vraie difficulté a été de trouver des Collègues qui accepteraient éventuellement de consacrer une partie de leurs loisirs au travail administratif et pédagogique de l'Association.

Par la présente note, je fais acte de candidature pour l'élection du Comité et j'essaye de préciser dans quelles intentions je pose cette candidature. Je souhaite que d'autres Collègues imitent ce procédé et que, s'il y a des tendances diverses, les adhérents sauront choisir au mieux des intérêts de l'enseignement des Mathématiques.

Les titres I à V qui suivent constituent un plan d'action qui pourrait être présenté au Comité de l'A.P.M.

Je tiens à bien préciser que la présentation de ce plan ne constitue en aucune façon une critique pour l'action du Bureau pendant l'année 1958-59, action que j'approuve intégralement.

***

I. Principes.

Le développement de l'A.P.M. et de son activité sont indispensables : il faut faire face au besoin évident de développer l'enseignement scientifique. Cela veut dire : trouver les moyens de former et de recruter des maîtres pour *tous* les niveaux de l'enseignement, accroître l'importance des sciences dans les horaires et les programmes, améliorer et rénover les méthodes de l'enseignement des Mathématiques.

Si les aspects purement administratifs de ces problèmes sont étudiés par les organisations syndicales et, au moins en partie, par les administrations responsables, il est indispensable que les pédagogues eux-mêmes les étudient. L'A.P.M. offre l'avantage de pouvoir réunir en une coopérative pédagogique *tous ceux qui enseignent les Mathématiques*, quel que soit le niveau de cet enseignement.

La rénovation des méthodes voit l'opposition de diverses tendances. Toutes doivent pouvoir librement s'exprimer dans nos assemblées et dans nos publications. Des synthèses sont toujours possibles et en tout cas acceptables grâce au libéralisme traditionnel qui laisse à chaque professeur le choix de sa pédagogie (libéralisme sans lequel il n'y aurait pas de pédagogie).

Personnellement, je ne vois pas d'opposition entre, d'une part, la tendance à rendre plus intuitif l'enseignement d'initiation (jusqu'à quinze ans), aucune limite stricte n'étant alors imposée à cette sorte « d'exploration » des Mathématiques, et, d'autre part, la recherche d'un exposé mieux axiomatisé dans l'enseignement suivant. De multiples nuances devraient d'ailleurs corriger ce schéma ; il faut à tous les niveaux faire une place aux Mathématiques appliquées ; il est évident qu'il n'y a pas d'axiomatisation parfaite, mais des échelons d'axiomatisation, etc... je n'insiste pas ; je n'ai cité cet exemple que pour ne pas encourir le reproche d'avoir caché mes opinions ; brutalement, j'aurais pu dire « partir du jeu de cubes et, si possible, dépasser Bourbaki » (mais vous pensez bien que je n'irai jamais si loin !).

II. Administration de l'A.P.M.

Des principes, passons aux réalisations. L'outil d'abord, c'est-à-dire l'A.P.M. Bien qu'une association ce soit en premier lieu ses adhérents, je trouve commode d'adopter l'ordre suivant :

1° Bureau. — Aucun ancien président ou trésorier ne me démentira quand je dirai que les tâches administratives doivent être mieux réparties au sein du Bureau. Souvent les membres en sont choisis afin que tous les ordres d'enseignement soient représentés ; c'est indispensable.

Il faut aussi que les fonctions, à l'intérieur du Bureau, soient définies et bien remplies.

La tradition du renouvellement périodique de la Présidence m'a paru bonne ; elle devrait permettre à des représentants de tous les ordres d'enseignement d'y goûter...

Mais, autour du Président, je verrais, non seulement quelques vice-présidents pour le suppléer, mais en plus un *secrétaire général*, assumant la tâche essentielle du *Bulletin* et des rapports à présenter aux assemblées ; il pourrait accompagner le Président dans les démarches et celui-ci ne serait pas trop souvent seul, comme cela a été parfois le cas. Deux ou trois secrétaires seraient chargés de la correspondance administrative, de l'expédition du *Bulletin*, des comptes rendus des réunions.

Le Trésorier devrait avoir droit à un adjoint avec qui il pourrait s'entendre pour diminuer sa tâche ingrate ; l'un d'eux enregistrant les cotisations, l'autre n'ayant plus que la correspondance sur ce sujet.

J'insiste : le poste de secrétaire général pourrait avoir une relative permanence ; rien ne s'y oppose, statutairement ; mais relative seulement. Il pourrait être convenu que président et secrétaire général ne sont pas renouvelés la même année.

2° Comité. — Son effectif statutaire a été accru. Reste à rendre son travail plus efficace. Je vois deux moyens :

— envoi, huit jours avant la réunion, de rapports préparatoires succincts, mis au point par le Bureau (par les soins du secrétariat) ; en arrivant en séance, les membres du Comité auraient une idée plus précise des décisions à prendre ;

— augmenter la durée des « sessions » (trois sont traditionnelles : en octobre, janvier et avril ou mai) ; elles pourraient avoir lieu un dimanche de 9 h. à 18 heures.

3° Délégués locaux. — Une tâche permanente du Bureau est de dresser un fichier de délégués, à raison d'un délégué par établissement ou, à défaut, d'un délégué par localité. La liste de ces délégués devrait être publiée par le *Bulletin* et révisée périodiquement. Par accord entre les intéressés, il deviendrait aisé de désigner un délégué académique qui assurerait en particulier la liaison avec le Rectorat. La tâche des délégués, sans être accablante, serait d'une grande efficacité : pour le recrutement de nouveaux adhérents, pour le développement des activités mathématiques dans l'établissement, pour la préparation de l'Assemblée générale de l'A.P.M.

III. Recrutement et propagande.

Aussi satisfaisante qu'ait pu paraître la progression des effectifs de l'A.P.M. durant les dernières années, il faut considérer que le nombre total des professeurs a augmenté et qu'en de nombreux secteurs, l'A.P.M. est encore ignorée. Le principe de la propagande devrait être : il y a place dans l'A.P.M., qui est une coopérative pédagogique, pour tous ceux qui enseignent les Mathématiques : Cours complémentaires, Centres d'apprentissage, Second Degré classique, moderne et technique, Grandes Ecoles scientifiques, Facultés.

La bonne et honnête propagande c'est de se faire connaître sans déguisement. Comment ? Par des conférences-discussions (sur le plan local), par des publications spéciales et par le *Bulletin* (quelques services exceptionnels), par l'organisation de journées pédagogiques (voir IV).

IV. Travail pédagogique.

Celui-ci peut se manifester par trois moyens :

1° Le « Bulletin » : Ayant jadis pris la responsabilité d'en modifier un peu la présentation et le volume, je sais que de grands progrès restent à accomplir pour qu'il soit la revue vivante de la recherche pédagogique en Mathématiques. On a critiqué l'importance relative des conférences savantes ; la publication de ces textes est utile. Il faut aussi alimenter la chronique plus ardue, — même si cela ne le semble pas en apparence —, des recherches sur l'enseignement plus élémentaire. Pourquoi ne pas proposer à la critique générale des sujets d'examen ? Des informations sur l'enseignement dans les autres pays nous font défaut. La bibliographie ne devrait laisser échapper aucun ouvrage, français ou non.

A côté de ces rubriques presque traditionnelles, il pourrait être ouvert une chronique nouvelle : présentation, en des articles simples (et par conséquent aussi courts que possible), des idées principales des Mathématiques modernes ou des nouvelles applications des Mathématiques. Ces articles, tirés à part, pourraient former des brochures de propagande et en même temps les premiers moyens de travail des maîtres soucieux d'accroître leur culture personnelle ou leur formation pédagogique. L'entreprise est réalisable, ainsi que le montrent les publications de la « Commission on Mathematics of the College Entrance Examination Board » aux U.S.A.

Il faut aussi que chaque adhérent de l'A.P.M. sache bien qu'il dépend de lui que le *Bulletin* soit plus vivant : que les articles soient critiqués, que chacun prenne la plume et dise ce qu'il pense, ce qu'il fait.

2° Les conférences, organisées en commun avec la Société Mathématique de France, sont devenues une tradition. Il faut s'efforcer qu'elles soient bien ce que nous souhaitons : non des exposés super-condensés des cours de 3e cycle des Facultés, mais des invitations à comprendre et étudier les nouvelles méthodes des Mathématiques qui se font ou qui s'utilisent.

A côté de ces conférences savantes, où la parole doit être donnée à des spécialistes, il y a place pour des *séminaires de travail :* pourquoi certains adhérents ne prendraient-ils pas l'initiative d'organiser de petits groupes qui consacreraient un horaire régulier à une étude collective d'un sujet choisi par le groupe. Personnellement, je serais très désireux de m'insérer dans un groupe qui se consacrerait à l'étude élémentaire des probabilités et du calcul statistique.

Enfin, les *groupes de recherche pédagogique*, comme celui qu'anime Mlle Dienot à Sèvres, peuvent aider tous les professeurs, anciens ou débutants, partout où il se trouvera un Collègue dévoué pour en prendre l'initiative.

3° Des journées pédagogiques, sur un ou plusieurs thèmes bien choisis, devraient être organisées *par l'A.P.M.* (qu'il y ait ou non aide matérielle de la part de l'Administration). Ces réunions, — comme on le sait par expérience —, n'ont pas pour but d'aboutir à des conclusions définitives. Elles facilitent les relations entre Collègues opérant à divers niveaux, ou dans diverses villes. Elles stimulent la recherche pédagogique et le goût de la culture permanente, condition d'un enseignement vivant. A l'occasion de ces journées, l'A.P.M. pourrait inviter les Collègues d'Associations voisines, Union des Physiciens ou des Naturalistes, Professeurs de Mathématiques de Belgique, d'Italie, etc... A condition d'en bien choisir la date, le programme attractif (thèmes des discussions et visites), de telles journées peuvent faire beaucoup pour la propagande de l'A.P.M. et le renforcement de son action.

Dès maintenant, je propose que de telles journées soient organisées pendant les trois premiers jours des vacances de Pâques 1960, à Marseille. Un des thèmes serait l'enseignement de l'astronomie ; une des visites, celle de l'Observatoire de St-Michel (Haute-Provence).

V. Action générale.

Tout ce qui précède concerne l'action de l'A.P.M. pour elle-même et pour ses adhérents ; c'est-à-dire l'action des professeurs de Mathématiques eux-mêmes en faveur de cet enseignement. Je ne néglige pas l'importance d'une action, si j'ose dire, plus extérieure, ou plus générale.

1° Plan de réforme : C'est à l'A.P.M. d'élaborer un plan de réforme réelle des horaires et des programmes de Mathématiques. Il est impossible de considérer les modifications récentes des programmes comme significatifs d'une réforme véritable. Sans doute n'est-il pas facile de proposer des réformes profondes sans une vaste étude de toutes leurs influences sur les domaines voisins. Raison de plus pour reprendre (on l'a déjà fait) ces études et les étendre.

2° Liaison avec l'Administration : Un des rôles de l'A.P.M. est d'assurer une liaison entre les professeurs de Mathématiques et leurs administrations responsables (sur le plan pédagogique). Cette liaison peut être conçue de bien des façons. Il est évidemment souhaitable que l'A.P.M. puisse examiner les projets dont l'Administration prend l'initiative. Mais, inversement, c'est à l'A.P.M. de revenir souvent, périodiquement, à la charge, pour obtenir, ou la réalisation des vœux mis au point par le Comité, ou l'amendement, dans le même sens, des propositions administratives.

L'A.P.M. ayant des adhérents dans tous les ordres d'enseignement devrait avoir un membre de son Bureau spécialement chargé de la liaison avec chacune des directions d'enseignement.

3° Liaisons : L'A.P.M. doit multiplier ses liaisons avec les associations semblables, Union des Physiciens, Union des Naturalistes, ainsi que tous groupements intéressés par l'enseignement des sciences, que ces groupements soient français ou non. La liste serait difficile à établir exactement et c'est à l'appréciation du Bureau qu'il faut s'en remettre des contacts utiles.

Remarque, en guise de conclusion : Ce programme n'a pas la prétention d'être complet. On peut imaginer que le Comité organise des commissions spécialisées ; par exemple pour le matériel d'enseignement, ou pour le film mathématique, ou pour l'action publique (articles dans les journaux, etc...). Ce que je souhaite avoir montré, c'est qu'il y a beaucoup de travail à faire et qu'il faudra une active coopération de tous pour en réaliser... une partie.

G. Walusinski.

RÉUNION DU BUREAU

(18 décembre 1958)

Présents : Mlles MARCHAND, MASSON ; MM. CLUZEL, MAGNIER, MONJALLON, NICOLAS, SIROS, WALUSINSKI.

M. HUISMAN, empêché au dernier moment, a demandé à M. WALUSINSKI de le remplacer. La séance se déroule sous la présidence de M. MAGNIER.

1. Questions administratives. — Le trésorier, M. NICOLAS, envisage une réorganisation du fichier, qui sera étudiée par une commission restreinte.

2. Les contractuels. — M. MAGNIER lit une lettre de M. MOUGENOT (Nancy) souhaitant l'affectation d'un conseiller pédagogique pour chaque contractuel ; l'organisation, pour ces contractuels, de conférences le jeudi, exprimant le vœu qu'on emploie, outre les contractuels, les étudiants du 3e cycle, avec emploi du temps limité.

Le Bureau n'estime pas souhaitables des mesures générales concernant les contractuels ; pour les étudiants du 3e cycle, la question sera reprise en Comité.

3. Le baccalauréat Lettres modernes. — Lors d'une précédente réunion, a été admis le principe d'une épreuve à option (Mathématiques ou Lettres) à l'écrit, et d'une épreuve de physique à l'oral. Il faudra tout d'abord préciser le programme de la classe, qui devra être tel que les insuffisances du passé ne gênent pas les élèves. M. MAGNIER invite Mlle MASSON et M. WALUSINSKI, dont les avis diffèrent au sujet de ces programmes, à élaborer, chacun de leur côté, un programme qu'ils soumettront à la prochaine réunion.

4. Journées d'études de Pentecôte. — Le concours de l'Administration n'ayant pas été accordé, ces journées seront organisées par l'A.P.M. En raison des retards dus à l'hésitation administrative, l'idée de décentraliser, en tenant les Journées à Nancy, ne peut être retenue cette année. Le Bureau remercie M. MOUGENOT de son active collaboration, qu'il se propose d'utiliser ultérieurement.

Les journées se dérouleront donc à Paris (trois matinées de travail, deux après-midi de visites, une soirée de discussion, avec projection de films si possible).

5. Conférences. — M. MAGNIER informe le Bureau qu'après Pâques, MM. GENUYS et VILA feront, en principe, des conférences sur le calcul et les machines puissantes.

RÉUNION DU COMITÉ

(29 janvier 1959)

Présents : Mlle BIARD, Mme DOMANGE, Mlles FÉLIX, MASSON, ROULET, VERVAECKE ; MM. BAY, CASSÉ, CLUZEL, FAVRELLE, HUISMAN, KLEIN, LE MÉNAGER, MAGNIER, MONJALLON, NICOLAS, REVUZ, SÉNÉCAT, SIROS, WALUSINSKI.

Excusés : Mlle MARCHAND ; MM. CROZES, MOUGENOT, SCHAEFFER, THOVERT.

Réorganisation du secrétariat. — Le système de fiches actuel ne donne pas tous les renseignements désirables sur les membres de l'A.P.M. (notamment la catégorie : lycée, technique, etc...). Bien qu'un certain scepticisme se soit manifesté, il est décidé d'essayer un genre de fiches analogue à celui qui est en usage dans la Société des Agrégés.

Journées de Pentecôte. — Nous avons des réponses favorables de MM. SCHWARTZ (Ecole des Mines de Nancy), et KUNTZMANN (Faculté des Sciences de Grenoble). Il est décidé de faire appel à MM. BASS (Ecole des Mines de Paris), et VILLEY (Faculté de Droit de Paris), et de chercher également du côté des Ecoles de Commerce, pour ceux qui utilisent des Mathématiques sans avoir beaucoup appris.

Pour le lieu des réunions, on suggère le local d'Astrophysique du boulevard Arago, ou, à défaut, un lycée parisien. En ce qui concerne l'organisation matérielle, les collègues auront toute liberté. Cependant, on pourra prévoir la possibilité de prendre des repas dans un Lycée. Enfin, il faudra prévoir une visite intéressante (en autocar éventuellement).

Agrégation féminine. — L'accord est complet pour souhaiter l'alignement sur l'agrégation masculine, tant en ce qui concerne les programmes qu'en ce qui concerne les épreuves. La différence actuelle entre les deux agrégations résulterait d'ailleurs, selon certains, d'une erreur administrative.

M. LE MÉNAGER déplore qu'il n'y ait pas, à l'Education Nationale, des concours intérieurs comme il en existe dans d'autres administrations. Ce concours n'est-il pas, dans une certaine mesure, celui de l'agrégation, et M. BAY se demande si le nouveau régime ne va pas défavoriser les candidats qui occupent déjà un poste. On peut contester d'ailleurs (M. WALUSINSKI) que l'agrégation soit encore un concours de recrutement pour le Second Degré, rôle plutôt détenu maintenant par le C.A.P.E.S.

Une fois de plus, on émet le vœu que les rapports d'agrégation soient publiés par les soins, et aux frais de l'Administration, ou qu'à tout le moins une subvention nous soit accordée pour cette publication. Ceci d'autant plus que les rapports, par suite de l'augmentation du nombre des admissibles (donc des leçons) prennent des proportions inconnues jusqu'ici. Jusqu'à présent, une telle subvention n'a jamais pu être obtenue.

Le baccalauréat. — La réforme récente du baccalauréat (décret du 6 janvier 1959) soulève partout de nombreuses critiques (notamment pour la suppression de l'oral). La question est importante, car, remarque M. BAY, elle risque, avec l'accroissement massif du nombre des candidats, d'avoir des conséquences fâcheuses sur la durée des vacances du personnel. Une commission est désignée pour préparer un projet de réforme ; elle est formée de : Mlle MASSON ; MM. BAY, CLUZEL, LE MÉNAGER, HUISMAN, MINOIS, WALUSINSKI.

Les contractuels. — Il semble que le recrutement des contractuels ne soulève plus autant de critiques, en grande partie parce que les déficients notoires ont été éliminés spontanément par l'Administration, ou sur intervention des collègues (à

Nancy en particulier). On signale des cas de contractuels qui rendent de réels services. Au total, le nombre des contractuels est minime.

Une discussion s'engage à propos du recours aux étudiants de troisième cycle, avec emploi du temps limité (9 heures hebdomadaires) et conseiller pédagogique. Après intervention de M. Revuz, il est cependant estimé préférable de laisser à leurs études normales ces étudiants.

Assemblée générale. — Elle aura lieu, comme d'ordinaire, à l'Institut Pédagogique National. Outre les rubriques traditionnelles (rapport d'activité, compte rendu financier, rapport sur les concours, rapport sur les définitions et notations), seront inscrites à l'ordre du jour les questions suivantes :

Baccalauréat Sciences Expérimentales ;

Programmes dans les classes du second cycle.

Pour les candidatures au Comité, on décide de solliciter les candidatures de :

Mlle Affre (Fénelon) ; Mme Dubois-Violette (Fénelon) ; Mlle Ozon (Victor-Hugo) ; Mlle Minois (Le Havre) ; MM. Biguenet, Chazal, Chauvin, Edde, Girard, Legrand, Walusinski, et Poitou (de la Faculté des Sciences de Lille). Et, en outre, celles des candidats non élus l'an dernier : Mme Betsch, M. Deviosse.

M. Walusinski, pour créer un précédent et peut-être une tradition, décide de rédiger une profession de foi à l'appui de sa candidature, exemple que tous souhaitent voir imiter dorénavant par les candidats au Comité.

Le bloc-notes de l'A.P.M.

→ Nous remercions notre collègue P. Marchand (Laval) de nous avoir si vite envoyé les numéros manquants 187 et 190. Le *Bulletin* 194 est également épuisé depuis peu, et nous ne pouvons le fournir aux nouveaux membres. Si des collègues, prêts à tous les sacrifices pour le service de l'A.P.M., consentaient à s'en priver, qu'ils l'envoient à M. Tournade, Institut Pédagogique National, 29, rue d'Ulm, Paris, 5e. Merci !

→ Après avoir envoyé à l'imprimeur l'article de M. Buquet, nous recevons de M. Samuel (Faculté de Clermont-Ferrand) les indications suivantes (théorème de Bachet) :

« Je pourrais donner une bonne dizaine de références à des ouvrages en anglais ou en allemand, mais il n'existe pour ainsi dire pas d'ouvrages français sur la théorie des nombres (à part le vieux Cahen). Je signale :

1) le mémoire original de Lagrange, datant de 1770. Il se trouve dans le tome III de ses œuvres, p. 191-201 (Paris, Gauthier-Villars, 1869) ;

2) Gauss, « Recherches arithmétiques », traduction Pouillet-Delisle (Paris, 1807), p. 353, n° 293.

Cette situation est très regrettable. Elle devrait inciter, soit à écrire un traité (ou une Introduction) sur la théorie des Nombres, soit à traduire en français l'excellent : Hardy-Wright, *An Introduction to the theory of numbers* ».

Nous ne pouvons que nous associer au vœu de notre collègue.

→ En vue de procéder à une enquête sur les classes de reconversion, les collègues qui sont chargés de telles classes sont instamment priés de se mettre en rapport avec : M. P. **Rocher,** professeur au Lycée de Talence (Gironde).

→ **Erratum :** *Bulletin* 196, page 105, article de M. REVUZ :

2e ligne de la remarque 2 : lire, « les fonctions continues » au lieu de « les fonctions entières ».

→ **Journées d'études.** — Elles auront lieu les 7, 8, 9 mai 1959 à Paris, à l'Institut d'Astrophysique, boulevard Arago.

Sujets étudiés :

— Les Mathématiques utiles aux ingénieurs ;
— L'initiation aux Mathématiques.

Les collègues qui désirent participer à ces journées sont priés d'en aviser :
A.P.M., Institut pédagogique national, 29, rue d'Ulm, Paris, 5e.

RAPHOPLEX

21, rue de Montsouris
Paris, XIVe
Tél. : Por. 38-10

REGLES A CALCULS

Longueurs : 12,5 - 25 - 50 cm.

Systèmes : Rietz, Electric Log-Log (Darmstadt améliorée), Rolinéa, Géomètre, Géopolytechnique, Electro.

INSTRUMENTS DE DESSIN

Règles divisées, Echelles de réductions, Equerres, Rapporteurs, Pistolets.

RAPPORTEUR-RECTIFICATEUR permettant la division des angles, le développement du cône, du cylindre, la construction des courbes cycloïdes, épicycloïdes, etc...

Notices et catalogue sur demande

Printed in France — *Le Gérant :* G. WALUSINSKI.

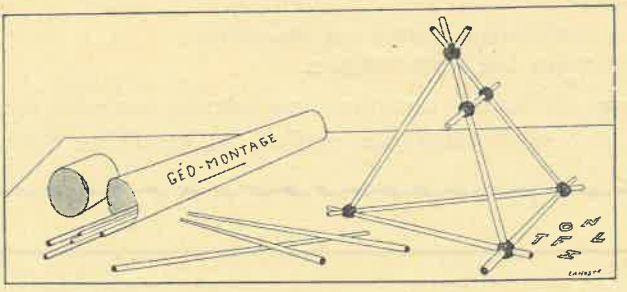
Cahors, Imp. A. Coueslant. — 93.817. — Dépôt légal : I-1959

POUR LES CLASSES DE 3e

débutant l'étude de la géométrie dans l'espace

GEO-MONTAGE

49, Bd Diderot - Paris XIIe



Construction rapide d'une figure à 3 dimensions

procédé recommandé par le Ministère de l'Education Nationale
sous le n° M 57.543

PRENEZ LA COMMANDE DE VOS ÉLÈVES

en nous indiquant :

NOM Professeur ou élève (1)

ADRESSE

Nombre de GEO-MONTAGES désirés

Prix unitaire :

- *Soit 650 F à la commande.*
- *Soit 750 F contre remboursement.*

(Réduction de 10 % pour classe entière : 15 unités minimum)

Mode de règlement choisi (1) :

- Virement postal au C.C.P. n° 14868.23.
- Chèque bancaire à GEO-MONTAGE.
- Contre remboursement.

(1) Rayer les mentions inutiles.

A. COLIN A. COLIN A. COLIN A. COLIN A. COLIN

Une révolution dans l'enseignement des mathématiques

MATÉRIEL COLLECTIF
d'enseignement des Mathématiques

TRAVAUX PRATIQUES

par

J. MARVILLET, Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure.

R. GIRARD, Agrégé de Mathématiques, Professeur au Lycée Janson-de-Sailly.

A. ADAM, Inspecteur de l'Enseignement Primaire de la Seine.

Un matériel en matière plastique de grandes dimensions pour l'enseignement collectif de la géométrie au Cours Moyen, à la C.F.E.P. et en classe de Sixième des C.C.
Des modèles préfabriqués. Des tableaux de démonstration. Des sphères noires et transparentes. Des plans mobiles. Des appareils de mesure simples.
Les angles. Les surfaces planes. Le cercle et les arcs de cercle. Les solides usuels et leurs développements. La sphère. La longitude et la latitude. Les masses spécifiques.

EN VENTE, par série complète,
par chapitre,
par article.

Envoi sur demande de la notice pédagogique (21 × 27), avec 90 photographies. Modèles déposés.

en co-édition avec M. PIERRON, Sarreguemines.

Recommandé par l'Institut Pédagogique National.

Rappel :

COURS DE MATHEMATIQUES **J. MARVILLET**

Initiation aux Mathématiques - 6e **R. GIRARD - P.-M. FOURNIER**

A. COLIN A. COLIN A. COLIN **A. COLIN**

NOUVEAUTÉ : **Sous presse :**

EXERCICES D'ANALYSE

★

TOME II

★

par

J. RIVAUD

Agrégé des Sciences mathématiques
Docteur ès Sciences
Professeur de Mathématiques supérieures
au lycée Janson-de-Sailly

★

Ce volume, à l'usage des élèves des classes préparatoires aux concours d'entrée aux grandes Ecoles et des étudiants des Facultés, complète le tome I. En voici le sommaire :

Fonctions de plusieurs variables. — Intégrales multiples. Intégrales curvilignes. — Volumes. Aires gauches. — Centre de gravité. Moment d'inertie. Centre de pression. Attraction newtonienne. — Equations différentielles à variables séparables. — Equations linéaires. Systèmes. — Champs scalaires et champs vectoriels. — Séries numériques. Fonctions complexes de variable réelle.

★

Volume 16 × 24 cm, de 260 pages ..... **2.200 F**

VUIBERT **63, Bd SAINT-GERMAIN, 63, PARIS V^e^**

BORDAS

27 bis, rue du Moulin-Vert - PARIS

EN PREPARATION :

COLLECTION P. THÉRON ET E. COSSART

MATHÉMATIQUES 6e

352 pages - très nombreux exercices pratiques
40 planches en noir et couleurs - cartes, etc.

par

L. KRUGER

Professeur agrégé au Lycée Chaptal

Dès parution, avril 1959, l'ouvrage intégral sera envoyé en spécimen à tous les professeurs de Mathématiques

DELAGRAVE

COURS BRACHET-DUMARQUÉ-ROSTOLLAND

MATHÉMATIQUES

classe de Sciences Expérimentales

Un vol. 14,5 × 20 Br..... 990 F Cart..... 1100 F

COSMOGRAPHIE

classe de Sciences Expérimentales

avec la collaboration de **P. COUDERC**

Un vol. 14,5 × 20 Br..... 250 F

A. CHEVALIER - R. CLUZEL

Nouveauté :

N^m

Valeurs numériques des puissances des nombres 1 à 100 000

Un vol. 16 × 25 Br..... 750 F Cart..... 900 F

GAUTHIER-VILLARS

55, Quai des Gds-Augustins

PARIS VI^e^ — DANton 05-10

CAZIN (M.)

Professeur à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures

et **DEQUOY (Mlle N.)**

Agrégée de l'Université, Docteur ès-sciences

COURS DE MECANIQUE

pour les Classes de Préparation aux Grandes Ecoles (Nouveau Programme). (Collection Traité de Physique théorique et de Physique mathématique, volume IX). In-8° (16-25), XI-200 pages, 45 figures, 1958. Broché ..... 1 700 F

Cartonné ..... 2 000 F

DEQUOY (Mlle N.)

Agrégée de l'Université, Docteur ès-sciences

MECANIQUE A L'USAGE DES CLASSES DE MATHEMATIQUES ELEMENTAIRES

(Collection Traité de Physique théorique et de Physique mathématique, volume IV). In-8° (16-25), XIV-200 pages, 1954 ..... 950 F

FLAVIEN (L.)

Professeur honoraire de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand

NOUVELLES TABLES NUMERIQUES POUR LES FONCTIONS USUELLES DE L'ANALYSE

rédigées conformément aux programmes du 27 juin 1956 pour les classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques

In-8° (13-20,5), 63 pages, 1958 ..... Relié toile 400 F

SOUS PRESSE :

CAZIN (M.)

Professeur à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures

EXERCICES DE MECANIQUE

pour les Classes de Préparation aux Grandes Ecoles (Collection Traité de Physique théorique et de Physique mathématique, volume X).

Chez les

Éditions WESMAEL-CHARLIER

S. A. R. L.

30, rue de Gramont

PARIS - 2e

Téléph. : Richelieu **54-45**

Vient de paraître :

LE FIL D'ARIANE

ou

VARIATIONS SUR DEUX THEMES :

La fonction linéaire — La fonction exponentielle

par

A. HUISMAN

Professeur au Lycée Montaigne

Vol. relié de 226 pp. - format 23 × 15 cm.
7 ill. hors-texte - 115 figures

Prix de Mathématiques
CONCOURS ANDRE VERA

Prix : **1 950 F**

EN VENTE :

Pour les libraires de Paris et de la Région Parisienne
chez
« LES HEURES CLAIRES »
SOCIETE ANONYME
25, rue Leverrier, PARIS (6e)

C.C.P. Paris 5318-28 Banque B.N.C.I. Tél. Odéon 56-51

Magasins ouverts tous les jours de 10 h. à 19 h.

dernière nouveauté

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR R. MAILLARD, INSPECTEUR GÉNÉRAL DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

UN COURS NOUVEAU, CONFORME AUX DERNIERS PROGRAMMES, ET QUI SE PROPOSE DE RENOUVELER LA MATIÈRE TRADITIONNELLEMENT OFFERTE.

CHAQUE OUVRAGE SE RECOMMANDE PAR DES SUJETS DE TRAVAUX PRATIQUES, DES PROBLÈMES INTÉRESSANT LES ÉLÈVES PAR L'ACTUALITÉ DES SUJETS, UNE BELLE TYPOGRAPHIE.

Déjà paru :

Classe de 6e, PAR R. CAHEN, PROFESSEUR AU LYCÉE CHAPTAL.

Pour paraître en 1959 :

Classe de 5e, PAR R. CAHEN.

Classe de 4e, PAR R. MAILLARD ET E. CARALP, PROFESSEUR AU LYCÉE MONTAIGNE.

UN FASCICULE DE **géométrie dans l'espace** CONFORME AU PROGRAMME NOUVEAU DE LA CLASSE DE 3e SERA ADRESSÉ AUX PROFESSEURS A LA RENTRÉE DE PAQUES 1959.

Classiques HACHETTE 79 BD SAINT-GERMAIN PARIS 6

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD

GRENOBLE (Isère)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU

Professeurs au Lycée de Grenoble

PROGRAMMES DU 18 AVRIL 1947

TARIF JANVIER 1959

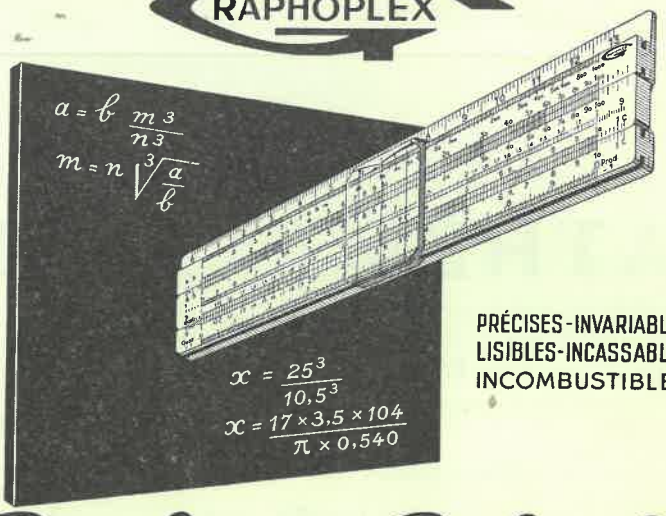
Taxe locale comprise

ARITHMÉTIQUE 6e	**336 »**
DESSIN GÉOMÉTRIQUE 6e et 5e	**188 »**
GEOMÉTRIE 5e et 4e avec fascicule de mise à jour 1958	**621 »**
Fascicule de mise à jour 1958 pour la Géométrie 4e	**76 »**
ARITHMÉTIQUE 5e	**458 »**
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 4e avec fascicule de mise à jour 1958	**412 »**
Fascicule de mise à jour 1958 pour l'Algèbre de 4e	**76 »**
Compléments de mise à jour 1958 pour l'Algèbre et la Géométrie de 4e	**152 »**
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 3e	**510 »**
GEOMÉTRIE 3e. — Nouvelle édition. Programme 1958	**650 »**
GEOMÉTRIE 5e, 4e, 3e, cartonnée	**895 »**
COMPLÉMENTS d'ALGÈBRE et de GÉOMÉTRIE 3e MODERNE COURT.	**102 »**
ALGÈBRE 2e A.B.C.M.	**560 »**
GÉOMÉTRIE 2e A.B.C.M.	**550 »**
ALGÈBRE 1re A.B.	**295 »**
ALGÈBRE et TRIGONOMÉTRIE 1re C.M.	**662 »**
GÉOMÉTRIE 1re A.B.C.M.	**509 »**

POUR LES EXAMENS :

QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT, 1re partie, A.B.C.M.	**427 »**
LES MATHÉMATIQUES AU B.E.P.C., 156 PAGES, NOMBREUX CLICHÉS	**458 »**

RAPHOPLEX



PRÉCISES - INVARIABLES
LISIBLES - INCASSABLES
INCOMBUSTIBLES

Règles à Calculs

INSTRUMENTS DE DESSIN

Pochettes de compas. Qualité supérieure

Equerres et Règles en plexiglas transparent

☆ ☆ ☆

Tarifs spéciaux pour commandes groupées

Catalogue sur demande

SEREB

148, rue de Noisy-le-Sec, Bagnolet
AVRon 11-83 - 18-65