BULLETIN de l'ASSOCIATION des PROFESSEURS de MATHÉMATIQUES de l'Enseignement Public

SOMMAIRE

I. ETUDES.

P. DUBREIL : Aperçu historique sur le développement de l'algèbre 85
A. REVUZ : Théorie de l'intégration (1) 95

II. PAGES A RELIRE.

J. ITARD : Un cours de Faculté sous Louis-Philippe 107

III. ESSAI.

A. CHAUVIN : Cours dicté et Leçons par cœur 112

IV. PROBLEMES PEDAGOGIQUES.

P. SAMUEL : Sur l'introduction des nombres complexes 118
C. ALMÉRAS : Quelques problèmes inusités 119
A. CHAUVIN : Sur les définitions 123
STORER : Symbolisme et règles opératoires dans les mathématiques scolaires 126
F. CLAUS : Calcul algébrique ; erreurs et difficultés 129

V. DOCUMENTS OFFICIELS.

Rapport sur la composition de mathématiques (classe de Mathématiques) au Concours général de 1958 138
Rapport sur les compositions de mathématiques au Concours de Fontenay (options mathématiques et sciences naturelles) 150

VI. BIBLIOGRAPHIE.

A travers les Revues 154
J. MALENGREAU : Etude des écritures binaires au moyen de la machine à calculer dénommée le Factorisant 155

VII. VIE DE L'ASSOCIATION.

Comité du 16 octobre 1958 158
Le Baccalauréat Sciences Expérimentales 159
Enquête permanente sur le vocabulaire et le symbolisme ... 160
Bloc-notes de l'A.P.M. 162

38e année — N° 196 Publication trimestrielle **Janvier 1959**

Le numéro 195 est un recueil de problèmes B.E.P.C.

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
29, rue d'Ulm, Paris (5e)
Paris, Cc. 5.708-21

Les membres de l'Association (cotisation : 1 000 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés.*

Cotisation pour les élèves des E.N.S. et les stagiaires des C.P.R. ..... 400 F
Prix de l'abonnement au *Bulletin* ..... 1 000 F
Prix du numéro ..... 200 F

Présidents d'Honneur

Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

Président : M. HUISMAN, 3, rue Charles-V, Paris, 4e.

Vice-Présidents :

Mlle FÉLIX, 2, rue Octave-Feuillet, Paris, 16e.
Mlle MASSON, 12, boulevard Desgranges, Sceaux (Seine)
M. CLUZEL, 96, avenue de Villiers, Paris, 17e.
M. MAGNIER, 22, rue Henri-Barbusse, Paris, 5e.
M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Germain, Paris, 5e.
M. NICOLAS, Ecole Normale d'instituteurs, Auteuil.
M. REVUZ, 16, rue de Rome, Les Essarts-le-Roi (S.-et-O.).

Secrétaires :

Mlle MARCHAND, Lycée de Sèvres (S.-et-O.).
M. CROZES, 10, rue du Buisson-St-Louis, Paris, 10e.
M. MOUGENOT, Lycée Poincaré, Nancy.
M. SIROS, 13, avenue Jean-Racine, Sceaux.

Trésorier : M. NICOLAS, 57, rue Bucourt, St-Cloud (S.-et-O.).

Comité de rédaction du « Bulletin » : Mlle FÉLIX, Mlle MARCHAND ; MM. ITARD, MAGNIER, SIROS.

Secrétariat : HUISMAN et WALUSINSKI.

Comité :

Membres élus

Sortants en 1959 : Mlle FÉLIX (*La Fontaine*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; M. FOUCHÉ (*Janson-de-Sailly*) ; M. GUITTON (*St-Louis*) ; M. MINOIS (*St-Louis*).

Sortants en 1960 : MM. HUISMAN (*Montaigne*) ; MONJALLON (*St-Louis*) ; SIROS (*Louis-le-Grand*) ; GUILLORÉ (*C.C.* Paris).

Sortants en 1961 : M. BAY (*Condorcet*) ; Mlle BIARD (*E.N.S.* Fontenay) ; M. CASSE (Savigny-sur-Orge) ; M. CROZES (*Henri-IV*) ; M. LE MÉNAGER (Angers) ; Mlle MARCHAND (Lycée de Sèvres) ; M. MOUGENOT (*Poincaré,* Nancy) ; Mlle VERVAECKE (*Fénelon,* Lille).

Sortants en 1962 : M. CLUZEL (*E.N.A.* Paris) ; M. DEMENGEL (*E.N. Radiotechnique*) ; M FAVRELLE (*Faidherbe,* Lille) ; M. KLEIN (*Charlemagne*) ; M. MAGNIER (*Louis-le-Grand*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; M. NICOLAS (*E.N.,* Auteuil) ; M. REVUZ (*Fac. Sc.,* Poitiers) ; M. SCHAEFFER (Clermont-Ferrand) ; M. THOVERT (*Ampère,* Lyon).

Membres de droit

M. BAY (*Condorcet*) ; M. CANONGE (Montpellier) ; M. GIRAULT (*J.-B.-Say*) ; M. MARVILLET (Strasbourg, *Kléber*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; Mme NICOUD (Lyon, *Marie-Vidalenc*) ; M. POUX (*Saint-Cloud*) ; Mme SCHUCK (*Victor-Duruy*).

Rapporteurs

Enseignement technique : M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. EDDE ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, Mlle PROTIN (Sciences Expérimentales) ; *Définitions de mots et notations mathématiques :* M. BERTRAND ; *Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales : M. EDDE. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — *Concours général :* M. MONJALLON ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (Besançon) ; *Dijon :* M. SAUSER ; Lille : M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (Lyon, *Ampère*) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (Nancy, *Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAULT (Rennes) ; *Strasbourg :* M. EHRHART (Strasbourg. *Kléber*) ; *Tunisie :* M. SAUVAN (Tunis, *Carnot*).

38e Année — N° 196 Janvier 1959

BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

I. ÉTUDES

APERÇU HISTORIQUE SUR LE DÉVELOPPEMENT DE L'ALGÈBRE *

par M. Paul DUBREIL
Professeur à la Sorbonne

L'extraordinaire épanouissement de l'Algèbre depuis un quart de siècle a, entre autres raisons, des raisons historiques. Il apparaît presque fatal lorsqu'on étudie certains courants d'idées qui se manifestent au long du XIXe siècle.

L'un de ces courants d'idées, issu de la résolution des équations algébriques, fait surgir les notions de groupe et de corps, il aboutit à ce qu'on appelle la théorie de Galois : c'est celui qui retiendra notre attention aujourd'hui. Il représente probablement un des chapitres les plus connus de l'histoire de l'Algèbre et même de l'histoire des Mathématiques. J'espère cependant que, même chez ceux pour lesquels il n'aurait rien de nouveau, son évocation éveillera quelque intérêt et même quelque émotion.

Si vous le voulez bien, nous nous limiterons par deux dates extrêmes : 1770-1910. 1770-71, c'est le moment où LAGRANGE publie, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, un travail d'environ deux cents pages intitulé « Réflexions sur la résolution algébrique des équations ». En 1910, le tome 137 du *Journal de Crelle* fait connaître un mémoire de E. STEINITZ intitulé « Algébraische Théorie des Körper ». STEINITZ pose là les bases de la théorie des corps dans l'esprit même de l'Algèbre moderne et sous une forme qu'on peut, à quelques détails près, qualifier de définitive.

*
**

Quand il écrit ses « Réflexions sur la résolution algébrique des équations », LAGRANGE, âgé de 34 ans, est un des mathématiciens les plus célèbres de l'Europe. Quatre ans plus tôt, il a quitté Turin, sa ville

* Conférence prononcée le 22 mai 1958, à l'Institut Henri-Poincaré, et organisée par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

natale, pour Berlin, où le grand Frédéric l'a appelé pour prendre à la présidence de l'Académie la succession d'EULER, retourné à St-Pétersbourg. Cela moyennant une pension annuelle de 1.500 écus de Prusse (ce qui équivaut, paraît-il, à 6.000 francs français... de 1867 !). Le père de Lagrange, de souche française, comme sa mère née Marie-Thérèse Gros, s'était ruiné. Lagrange disait : « Si j'avais été riche, je n'aurais probablement pas fait mon état des Mathématiques. » Son séjour à Berlin se prolongera jusqu'en 1787, date à laquelle M. de Breteuil, ministre de Louis XVI, l'appellera à Paris, à la demande de l'Abbé Marie. A Paris, Lagrange sera membre de l'Académie des Sciences, professeur à l'Ecole Normale Supérieure et à Polytechnique, où il enseignera l'Analyse. C'est à Paris qu'il mourra, en 1815.

« Je me propose, écrit-il au début de son mémoire, d'examiner les différentes méthodes que l'on a trouvées jusqu'à présent pour la résolution algébrique des équations, de les réduire à des principes généraux et de faire voir *a priori* pourquoi ces méthodes réussissent pour le 3e et le 4e degré et sont en défaut pour les degrés ultérieurs. Cet examen aura un double avantage : d'un côté, il servira à répandre une plus grande lumière sur les résolutions connues du troisième et du quatrième degré ; de l'autre, il sera utile à ceux qui voudront s'occuper de la résolution des degrés supérieurs en leur fournissant différentes vues pour cet objet et en leur épargnant surtout un grand nombre de pas et de tentations inutiles. »

Lagrange, on le voit, présente lui-même son travail comme un bilan et insiste volontairement sur l'aspect négatif de ce bilan. « On n'est guère plus avancé que du temps de Cardan. » Il faut reconnaître qu'au XVIe siècle, en Italie, Scipion del Ferro, Tartaglia, Cardan, Bombelli, Ferrari ont fait faire à l'Algèbre un progrès énorme par la résolution des équations des troisième et quatrième degré (1) et surtout par l'invention des imaginaires. Sans doute, au siècle suivant, Descartes et Tschirnhaus, ami de Leibniz, perfectionnent notablement la théorie des équations algébriques. Puis, les mathématiciens du XVIIIe siècle étudient l'équation binôme $x^n = 1$ (Moivre), précisent les relations entre les coefficients et les racines d'une équation quelconque (Girard) et le calcul des fonctions symétriques des racines (Newton, Waring), énoncent et entreprennent de démontrer le « théorème fondamental » : une équation algébrique de degré n a toujours n racines (d'Alembert, Euler, de Foncenex). Notons que ce théorème ne sera vraiment démontré que par Lagrange lui-même (« Sur la forme des racines imaginaires des équations », *Œuvres*, t. 3, p. 479-516) et par Gauss (« Démonstratio nova théoremetis omnem fonctionem algébricam rationalem intégram unius

---

(1) La formule de Cardan donnant les solutions de l'équation $x^3 + px + q = 0$ s'écrit :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

où les déterminations des radicaux doivent être convenablement associées.

variabilis in factores reales primi nel secundi gradues revolvi posse », thèse, 1799).

Et, cependant, le problème de la résolution des équations de degré supérieur au quatrième est resté entier ; les efforts dépensés en vain amènent à penser qu'à partir du cinquième degré, seules les équations de type particulier sont résolubles par radicaux. Il n'a pas été possible à Lagrange de trancher la question : « Le problème de la résolution des équations des degrés supérieurs au quatrième est un de ceux dont on n'a pas encore pu venir à bout, quoique d'ailleurs rien n'en démontre l'impossibilité... Il est très douteux que les méthodes dont nous venons de parler puissent donner la résolution complète des équations du cinquième degré. »

A défaut de résultats tout à fait décisifs, les travaux de Lagrange apportent des idées fort importantes. L'art de résoudre les équations, dit-il à peu près, consiste essentiellement à trouver *des fonctions des racines* de l'équation proposée telles :

1° que l'équation ou les équations par lesquelles elles seront données soient d'un degré moindre que celui de la proposée ou soient au moins décomposables en d'autres équations d'un degré moindre que celui-là ;

2° que l'on puisse en déduire aisément les valeurs des racines cherchées.

Pour l'équation du deuxième degré, une telle fonction sera la différence $\theta = x' - x''$ des racines qui vérifie l'équation *décomposée* $\theta^2 = \Delta$. Pour une équation de degré n, Lagrange utilise les *résolvantes* qui portent son nom :

$$y_k = x' + \alpha_k x'' + \alpha_k^2 x''' + \ldots + \alpha_k^{n-1} x^{n)},$$

où les α_k sont les racines n^{es} de l'unité. La seconde condition est bien remplie. En ce qui concerne la première, Lagrange étudie le degré de l'équation vérifiée par les y_k : si n est premier, on est conduit à une équation de degré $n - 1$ dont les coefficients dépendent rationnellement d'une racine d'une équation de degré $(n - 2)$! ayant elle-même des coefficients qui s'expriment rationnellement en fonction de ceux de l'équation donnée.

Mais Lagrange s'élève aussi à un plus haut degré de généralité en considérant des fonctions rationnelles quelconques des racines. Il étudie le nombre ν des valeurs distinctes que peut prendre une telle fonction pour toutes les permutations des racines : ν *est un diviseur de* n *!* Lagrange appelle *semblables* deux fonctions qui « varient en même temps ou demeurent les mêmes lorsqu'on y fait les mêmes permutations des variables », disons, qui restent invariantes par les mêmes permutations. Alors, *chacune s'exprime rationnellement au moyen de l'autre et des coefficients de l'équation.*

Ce dernier résultat est un cas particulier d'un des théorèmes fondamentaux de Galois ; le précédent, pour nous, se rattache immédiatement au fait que l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe (l'ordre du groupe symétrique S_n, c'est-à-dire le nombre de toutes les

substitutions portant sur les n racines, est précisément n !). Lagrange a réellement frôlé la notion de groupe de substitutions. Il a écrit lui-même : « Tout se réduit, comme on voit, à *une espèce de calcul des combinaisons,* par lequel on trouve *a priori* les résultats auxquels on doit s'attendre. Il serait à-propos d'en faire l'application aux équations du cinquième degré et des degrés supérieurs... mais cette application demande un trop grand nombre de recherches et de combinaisons, dont le succès est encore d'ailleurs fort douteux, pour que nous puissions quant à présent nous livrer à ce travail ; nous espérons pourtant pouvoir y revenir dans un autre temps et nous nous contenterons ici d'avoir posé les fondements d'une théorie qui nous paraît nouvelle et générale... »

Peut-être un peu déçu par l'aridité du problème, accaparé certainement par ses travaux d'Analyse et de Mécanique, Lagrange n'est jamais revenu à l'Algèbre.

A la même époque que lui, et indépendamment, Vandermonde a publié à Paris un mémoire sur la résolution des équations. Lui aussi cherche des fonctions des racines prenant le plus petit nombre de valeurs distinctes quand on permute les racines. En outre, il se livre à une étude approfondie des équations binômes et il obtient des résultats qui seront plus tard confirmés et largement développés par Gauss.

*
**

Dans la ligne des travaux de Lagrange et de Vandermonde, un Italien, Ruffini, et un Norvégien, Abel, vont maintenant reconnaître et établir l'impossibilité de résoudre par radicaux l'équation *générale* du cinquième degré. Par équation générale, ils entendent (très clairement chez Abel) une équation dont les coefficients $a_0, a_1, ..., a_n$ sont regardés comme des indéterminés, ou, si l'on préfère, des paramètres variables. Résoudre par radicaux une telle équation, ce sera exprimer ses racines en fonction des coefficients en utilisant les seules opérations rationnelles ($\pm$, $\times$, :) et des extractions de racines (on peut se ramener au cas où chaque radical est d'indice premier). Les démonstrations de Ruffini, longues et confuses, n'ont jamais été satisfaisantes. A ce sujet, Abel écrit en 1826 : « Le premier et, si je ne me trompe, le seul qui avant moi ait cherché à démontrer l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales est le géomètre Ruffini ; mais son mémoire est tellement compliqué qu'il est très difficile de juger de la justesse de son raisonnement. Il me paraît que son raisonnement n'est pas toujours satisfaisant... » Cependant, Ruffini eut le grand mérite de définir et d'utiliser, avant Cauchy, le produit de deux substitutions (un type important de *loi de composition* apparaît ici en Algèbre). Ruffini constitue ainsi les premiers éléments de la théorie des groupes. Il établit ce point, fondamental aussi dans la démonstration d'Abel qui, à ce sujet, renvoie à Cauchy : il n'existe pas de fonction des cinq racines de l'équation qui prenne trois ou quatre valeurs distinctes pour toutes les permutations des racines.

La démonstration d'Abel a le double mérite d'être correcte et de s'appuyer sur une analyse très lucide des diverses opérations et des types correspondants de fonctions. Abel précise avec soin ce qu'il entend par polynôme, par fonction rationnelle ; en considérant, comme le fera aussi Galois, les éléments qui se déduisent des données par des *opérations rationnelles,* il introduit implicitement le *corps* formé par ces éléments, le « corps fondamental » ou le « corps de base » de Steinitz. Le langage n'a pas la commodité actuelle, mais il a la même sûreté et Abel définit correctement un polynôme ou une équation *irréductible sur un corps donné.* Ces considérations nouvelles et fondamentales constituent le début de son mémoire « Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré » (*Journal de Crelle,* t. 1, 1826).

Auparavant, à l'âge de 19 ans (en 1821), Abel avait cru résoudre l'équation générale du cinquième degré. Son travail fut envoyé par son maître Hansteen à Degen, professeur à Copenhague. Degen y reconnut l'œuvre d'un esprit exceptionnel, mais demanda une démonstration plus complète. Entre-temps, Abel, de lui-même, avait découvert son erreur et avait repris la question.

Sa vie d'étudiant était difficile malgré l'affectueux dévouement de ses maîtres Holmboe et Hansteen, parfaitement conscients de son génie. Mais, à l'âge de 18 ans, Abel avait perdu son père. Deux ans plus tard, il écrit au Collège Académique : « Comme j'ai un frère qui se destine à l'étude, mais que les subsides qu'il peut obtenir ne lui permettent pas de vivre ici à Christiania (Oslo), je me permets de demander au Collège la permission de prendre avec moi mon frère dans ma chambre à la Fondation universitaire. Mon compagnon de chambre donne son accord comme l'atteste sa signature de sa propre main. » L'autorisation fut accordée.

Les efforts d'Abel aboutissent : il établit l'impossibilité de la résolution par radicaux de l'équation générale du cinquième degré et publie chez Grondhal, à Christiania, à ses frais et sous forme abrégée, son « Mémoire sur les équations algébriques où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré ». Par l'intermédiaire d'un mathématicien allemand, Schumacher, cette brochure, malheureusement trop concise par raison d'économie, parvint entre les mains de Gauss. D'après Hansteen, Gauss se serait écrié en la recevant : « Encore une de ces monstruosités ! » Le fait n'a rien de certain ; il paraît probable que Gauss rangea le mémoire d'Abel sans le lire. Toujours est-il qu'Abel n'enregistra aucune réaction du « Prince des Mathématiciens ». Ce fut pour lui une grande désillusion.

Abel, qui se sentait isolé à Christiania, faisait démarches sur démarches pour obtenir une bourse qui lui permît d'aller travailler en Allemagne et en France. En août 1825, la bourse tant désirée lui est accordée. En septembre, il gagne Copenhague, puis Altona, près d'Hambourg, où il est accueilli par Schumacher. Il lui fait l'impression d'un mathématicien exceptionnel et d'un homme fort sympathique.

Renonçant à son projet primitif qui était de se rendre à Göttingen, près de Gauss, Abel va à Berlin où il se présente à Crelle. Crelle était

un ingénieur éminent et sa situation en Prusse était importante ; il dirigea la construction du premier chemin de fer allemand. Très actif, il s'intéressait « en amateur éclairé » aux Mathématiques. Lui aussi sut reconnaître les dons magnifiques d'Abel ; malgré les différences d'âge et de situation, les deux hommes se lièrent d'amitié.

Dans une conversation avec Crelle, Abel s'étonne un jour que l'Allemagne ne possède pas de périodique mathématique comme il en existe en France. « Je songe depuis longtemps à en créer un », lui répond Crelle. La réalisation vint très vite et c'est, comme nous l'avons vu, dans le premier tome du *Journal de Crelle*, que paraît, sous sa forme définitive, le mémoire sur l'équation du cinquième degré. Abel en écrivit plusieurs autres pour ce journal, toujours en français, car il maniait mieux notre langue que l'allemand. Crelle les traduisait en allemand. Le séjour à Berlin représente pour Abel une intense et fructueuse période de travail, mais traversée plus d'une fois par le spleen et les préoccupations d'avenir.

Ne pouvant se résoudre à se rendre à Göttingen, Abel quitte Berlin au printemps de 1826, en compagnie de camarades norvégiens, pour un voyage de trois mois qui le conduit à Dresde, Vienne, Trieste, Venise, pour aboutir en Suisse d'où, après quelques courses en montagne, il gagne seul Paris.

Il devait y poursuivre la série de ses découvertes : équations algébriques, séries, fonctions elliptiques, intégrales abéliennes. Sur ce dernier sujet, il écrit un mémoire qui contient son célèbre théorème : il le soumet à l'Académie, mais une nouvelle déception l'attend. Peut-être dérouté par l'extrême nouveauté du sujet, surchargé sans doute de tâches multiples, Cauchy retarde son jugement et finit par perdre de vue ce mémoire. Celui-ci sera retrouvé en 1830 et l'Académie non seulement le publiera, mais décernera à Abel le Grand Prix de Mathématiques ; malheureusement, ce sera à titre posthume.

Au point de vue scientifique, le séjour d'Abel à Paris lui a été cruel. Il y a trouvé plus d'une fois un accueil courtois, mais jamais un appui véritable. Excédé, il finit par écrire à Holmboe : « Bien que je sois dans la ville la plus bruyante du continent, je suis comme dans un désert, je ne connais presque personne. » « Il est difficile d'attirer l'attention, surtout pour un débutant... » A Paris, comme partout, sa meilleure distraction fut le théâtre : « Je ne connais pas de plus grand plaisir que voir une pièce de Molière dans laquelle joue Mlle Mars ; elle a quarante ans, mais elle joue des rôles très jeunes... »

Revenons à l'Algèbre. Le nouveau problème qu'Abel s'est posé est celui de trouver les équations résolubles par radicaux. Il n'en obtient pas la solution complète, mais, suivant son expression, « donne des moyens sûrs pour y parvenir ». La théorie des fonctions elliptiques lui fournit précisément d'intéressants exemples d'équations résolubles par radicaux. Il les étudie par une méthode inspirée de celle que Gauss avait appliquée aux équations de la division du cercle. Gauss, en effet, après avoir établi l'irréductibilité du polynôme $\Phi_n(x) = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ quand n est un nombre premier impair, avait étudié complètement la résolution de

l'équation $\Phi_n(x) = 0$ et obtenu par cette voie son célèbre théorème : les polygones à m côtés, où m est un nombre premier de la forme $2^{2^k} + 1$, peuvent être construits par la règle et le compas.

Mais Abel, poussant plus loin sa généralisation, considère une autre classe d'équations résolubles par radicaux auxquelles Kronecker devait donner le nom d'équations abéliennes (2).

En 1829, la mort, due à une tuberculose à évolution rapide, empêche Abel de poursuivre ses recherches. Certaines de ses lettres témoignent qu'il avait obtenu des résultats proches de ceux de Galois sur la caractérisation des équations résolubles par radicaux.

*
**

Evariste Galois naquit à Bourg-la-Reine le 25 octobre 1811. Il devait mourir à l'hôpital Cochin d'une blessure au ventre reçue en duel, le 31 mai 1832, âgé de moins de 21 ans. Sa vie, plus courte encore que celle d'Abel, fut aussi plus douloureuse, plus tragique.

Il fait de bonnes études au lycée Louis-le-Grand où il a Richard comme professeur de Mathématiques. Il échoue une première fois à Polytechnique, mais, à 17 ans, il fait ses premières découvertes sur la théorie des équations. Cauchy devait présenter à l'Académie une note résumant ces premiers résultats, mais il l'oublia et le texte ne put être retrouvé au Secrétariat de l'Académie. « Le peu d'attention donné par l'Institut au premier travail soumis à son jugement par Galois, écrit Paul Dupuy dans sa biographie (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 3e série, tome 13, 1896), commença pour lui des douleurs qui, jusqu'à sa mort, devaient se succéder de plus en plus vives. »

Après un deuxième échec à Polytechnique, suivi de la mort tragique de son père, Galois se résigne à entrer à l'Ecole Préparatoire (c'était à l'époque le nom de l'Ecole Normale Supérieure). Il y poursuit ses recherches et présente à l'Académie, en janvier 1830, un mémoire pour concourir au Grand Prix de Mathématiques. Le manuscrit fut remis à Fourier, Secrétaire perpétuel ; mais Fourier mourut avant de l'avoir examiné et ce travail, lui aussi, ne fut jamais retrouvé.

Mis à la porte de l'Ecole Normale (par suite de l'incident de la « Gazette des Ecoles »), Galois ouvre chez Caillot, libraire, 5, rue de la Sorbonne, un cours public d'Algèbre supérieure « destiné aux jeunes gens qui, sentant combien est incomplète l'étude de l'Algèbre dans les collèges, désirent approfondir cette science. Le cours se composera de théories dont quelques-unes sont neuves et dont aucune n'a jamais été exposée dans les cours publics. Nous nous contenterons de citer une théorie nouvelle des imaginaires, la théorie des équations qui sont solubles par radicaux, la théorie des nombres et les fonctions elliptiques

(2) Ce sont celles dont le groupe est « formé par les puissances d'une seule substitution circulaire ». Jordan étendra plus tard (*Traité des Substitutions*, p. 287) cette dénomination aux « équations dont le groupe ne contient que des substitutions échangeables entre elles » (groupe commutatif abélien).

traitées par l'Algèbre pure ». Mais Galois manque d'élèves. Finalement, il s'engage dans l'artillerie de la Garde nationale.

Cependant, Poisson s'intéresse à lui et l'invite à récrire le manuscrit remis à Fourier. Il présente ce manuscrit à l'Académie des Sciences. Malheureusement, quatre mois plus tard, il le rend à Galois : le mémoire, intitulé « Questions de la résolution générale des équations », a été jugé incompréhensible. Il sera publié et commenté élogieusement par Liouville... en 1846.

Alors, suivant l'expression même de Galois, « son cœur se révolte contre sa tête ». Il se donne tout entier à la politique, il atteint les limites de l'exaltation : « S'il fallait un cadavre pour ameuter le peuple, je donnerais le mien », dit-il. Le 9 mai 1831, au banquet « Vendanges de Bourgogne », il porte un toast régicide ; on l'arrête chez sa mère, il est mis en prison préventive à Ste-Pélagie, puis relâché après acquittement.

Moins d'un mois après, il est arrêté une deuxième fois, sur le Pont-Neuf, pour port illégal d'uniforme et d'armes chargées (son corps d'artillerie a été dissous). On le tient pour « radical dangereux ». Il doit faire cette fois six mois de prison à Ste-Pélagie. Le 16 mars 1832, on le transfère à l'hôpital, rue de Lourcine.

D'obscures provocations l'amènent à se battre en duel le 30 mai 1832. Dans la nuit qui précède, il écrit la *Lettre à tous les républicains*, une lettre à deux amis et la célèbre *Lettre à Auguste Chevalier*, dans laquelle il résume à grands traits sa théorie des équations algébriques, ainsi que des résultats sur les intégrales abéliennes, leur classification et leurs périodes, résultats que Riemann devait établir vingt-cinq ans plus tard.

Dans la préface des œuvres de Galois, Picard rend ce jugement : « La théorie des équations doit à Lagrange, Gauss et Abel des progrès considérables, mais aucun d'eux n'arriva à mettre en évidence l'élément fondamental dont dépendent toutes les propriétés de l'équation ; cette gloire était réservée à Galois qui montra qu'à chaque équation algébrique correspond un groupe de substitutions dans lequel se reflètent les caractères essentiels de l'équation... ».

Enonçons les principaux résultats de Galois. Etant donnée une équation $f(x) = 0$, sans racines multiples, dont les coefficients appartiennent à un certain corps K (contenu dans le corps des nombres complexes), on peut construire une fonction rationnelle V des racines x_i telle qu'aucune des valeurs que prend V quand on y permute les racines ne soit égale à une autre. Toutes les racines de l'équation proposée s'expriment rationnellement en fonction de V, disons, d'une façon un peu plus précise, appartiennent au corps K(V). On a donc :

$$K(x_1, x_2, ..., x_n) = K(V).$$

Si $\Phi(V) = 0$ est l'équation irréductible sur K satisfaite par V, si V', ... sont ses autres racines et si $x = \psi(V)$ est une racine de l'équation proposée, $\psi(V')$ en est une également.

Le *groupe* G de l'équation proposée — nous disons maintenant le groupe de Galois — est l'ensemble des permutations des racines $x = x_1, x_2, ...$ que l'on obtient en remplaçant, dans les expressions

$x_i = \psi_i(V)$, V par les racines V, V', ... de l'équation *irréductible* $\Phi(V) = 0$. Les fonctions des racines dont la valeur appartient au corps K sont celles qui restent invariantes par toutes les substitutions du groupe G.

Si le corps $K' = K(V) = K(x_1, x_2, ..., x_n)$ contient le corps des racines $L = K(y_1, ..., y_r)$ d'une autre équation (dont les coefficients appartiennent à K), le groupe de K' sur L est un sous-groupe *invariant* du groupe G (on dit aussi sous-groupe distingué ou sous-groupe normal et on entend par là un sous-groupe G' permutable avec tout élément du groupe :

$$xG' = G'x, \forall x \in G).$$

Le principe de la résolution par radicaux se présente de la façon suivante : on suppose que le corps K contient les racines de l'unité. Si l'équation est résoluble par radicaux, il doit exister entre K et K' une suite de corps intermédiaires :

$$K = K_0 \subset K_1 \subset ... \subset K_l = K',$$

tels que K_i s'obtienne en adjoignant à K_{i-1} les racines d'une équation binôme $t^{n_i} - a_i = 0$ avec $a_i \in K_{i-1}$.

Il existe donc une suite :

$$G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_l = (e), \qquad [(e) \text{ substitution unité}],$$

de sous-groupes de G dont chacun est invariant dans le précédent et chacun des groupes-quotients (3) G_{i-1}/G_i est un groupe cyclique.

Un groupe de substitutions G ayant ces propriétés est dit *résoluble*. Ainsi, pour qu'une équation algébrique soit résoluble par radicaux, il faut que son groupe soit résoluble ; cette condition est aussi suffisante, comme Galois lui-même le reconnaît.

Signalons encore qu'en introduisant des éléments qu'on a appelés « imaginaires de Galois », Galois crée la théorie des *corps finis* ou *champs de Galois*.

Dans son monumental *Traité des substitutions et des équations algébriques* (1870), Jordan s'est proposé « de développer les méthodes de Galois et de les constituer en corps de doctrine, en montrant avec quelle facilité elles permettent de résoudre tous les principaux problèmes de la théorie des équations ». Pour lui, « le problème de la résolution n'apparaît plus que comme le premier anneau d'une longue chaîne de questions relatives aux transformations des irrationnelles et à leur classification... ». Les travaux de Jordan n'apportent pas seulement une mise en forme, une systématisation. Jordan fait faire des progrès remarquables à la théorie des groupes ; en particulier, il montre que dans une suite de sous-groupes d'un groupe fini G :

$$G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_{i-1} \supset G \supset ... \supset G_l = (e)$$

où, quel que soit i, G_i est sous-groupe invariant *maximal* de G_{i-1}, la « longueur » l de la suite est toujours la même. Hölder complète ce

---

(3) Rappelons que l'invariance d'un sous-groupe G' d'un groupe G permet de définir une décomposition en classes, unique, de G par rapport à G' et une multiplication de classes, qui fait, de l'ensemble de ces classes, un groupe appelé groupe-quotient et désigné par G/G'.

résultat en établissant qu'en outre les groupes-quotients sont déterminés à l'ordre près et à des isomorphismes près.

*
**

Les derniers progrès que nous avons encore à étudier, ceux que Steinitz (4) a réalisés, ont eu deux raisons d'être. La première est le développement même de la théorie de corps : étude approfondie des corps de nombres et de fonctions par Dedekind et Weber, apparition des idées de Kronecker sur la construction des corps de nombres algébriques, découverte de corps p-adiques par Hensel. A travers la diversité des types, les notions et les propriétés communes appellent une théorie générale, nécessairement plus abstraite.

La seconde raison est la modification introduite dans la pensée mathématique par l'œuvre de Cantor. Beaucoup de questions se multiplient et s'éclairent si l'on s'intéresse à des ensembles au lieu de ne considérer que leurs éléments. Ainsi, en Algèbre, on travaillera sur un groupe et ses sous-groupes, sur un corps et ses sous-corps sans s'occuper des éléments qui les constituent, si ce n'est pas vraiment indispensable de le faire.

C'est une théorie abstraite et générale des corps que Steinitz apporte en 1910. Comme il arrive généralement en pareil cas, elle dépasse ce qui pouvait sembler être son but. Non seulement elle coordonne les connaissances acquises dans des cas particuliers, mais elle apporte par surcroît des résultats essentiellement nouveaux : citons, parmi les plus importants, la discussion complète de la multiplicité des racines d'une équation algébrique supposée irréductible, discussion qui conduit aux notions d'extensions séparables ou inséparables (Steinitz dit de première espèce ou de deuxième espèce) et de corps parfait ; et l'existence des extensions algébriquement fermées d'un corps K quelconque, c'est-à-dire de sur-corps Ω tel que tout polynôme en x à coefficients dans Ω se décompose en facteurs tous linéaires à coefficients dans Ω.

*
**

Le progrès en Mathématiques dépend de la valeur des hommes, mais aussi de la façon de penser d'une époque. Des savants d'un génie extraordinaire, comme Abel et Galois, tellement en avance sur leur temps, sont méconnus et il faut un délai pour que leur œuvre se fonde dans le courant général. Mais cela finit par se faire et leur gloire est accrue par les souffrances qu'ils ont endurées.

Quant aux connaissances, leur évolution semble bien avoir quelque chose de fatal. Il y a, dans la découverte, des « points de passage obligé » : tel problème particulier ne peut être résolu que si l'on dispose de telle notion générale. La forme actuelle de l'Algèbre n'est le produit ni du hasard, ni de la fantaisie des hommes, elle résulte de ses nécessités internes.

---

(4) Ernst Steinitz (1871-1928) fit ses études à l'Université de Breslau ; il fut professeur à l'Université de Kiel.

THÉORIE DE L'INTÉGRATION

par A. Revuz

Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers (*)

La théorie de l'intégration est une des plus vieilles théories mathématiques : on peut la faire remonter à Archimède (calcul de l'aire du segment de parabole), et elle plonge ses racines dans la théorie de la mesure des aires qui est encore plus vieille. Ses progrès ont toujours été des progrès décisifs pour l'Analyse tout entière et ils se sont poursuivis jusqu'à nos jours. Mais ils l'ont fait dans des directions diverses : des définitions de plus en plus générales ont été données de l'intégrale, mais si chacune est poussée à son point extrême de généralités, il n'y a pas une théorie de l'intégration qui contienne rigoureusement toutes les autres.

Il n'est bien sûr pas question d'en faire ici un inventaire exhaustif : nous voudrions seulement rappeler les définitions qui ont été historiquement et sont encore théoriquement les plus importantes, dégager les points de vue principaux, différents quant à l'aspect, mais foncièrement identiques quant aux résultats, où l'on peut se placer pour édifier la théorie, et mettre en lumière les structures sur lesquelles elle est fondée.

Première partie

De la mesure des aires à l'intégrale de Riemann

1. Mesure des aires. Anneaux de Boole. Etendues.

L'aire des ensembles plans répond aux conditions suivantes (intuitivement senties, sinon explicitement exprimées dans les exposés les plus élémentaires) :

a) L'aire d'un ensemble A est un nombre positif ou nul mA.

b) Elle est « additive », en ce sens que $m(A \cup B) = mA + mB$, si $A \cap B = \emptyset$.

c) Les aires de deux ensembles égaux (par déplacement) sont égales.

d) L'aire du carré de côté 1 est 1 (plus précisément : l'aire du carré ouvert de côté 1, celle du carré fermé de côté 1, et celle de tout ensemble contenant le premier et contenu dans le second est 1).

Ces exigences suscitent les questions :

α) Existe-t-il une telle aire ? et plus précisément :

β) Est-il possible de la définir pour tous les ensembles du plan ?

γ) Sinon, quelle est la nature de la famille de ceux qui ont une aire ?

---

* Conférence prononcée le 6 mars 1958, à l'Institut Henri-Poincaré, et organisée par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

Les réponses sont obtenues par « construction ». Faisons tout d'abord abstraction de *c*) sous sa forme générale. Choisissons dans le plan deux axes rectangulaires *ox, oy,* et attribuons des aires égales aux carrés égaux dont les côtés sont parallèles à *ox* et *oy,* et ont des coordonnées rationnelles. L'application de *b*) et *d*) conduit alors à attribuer une aire mR égale au produit des longueurs de ses côtés à tout rectangle R dont les côtés sont parallèles à O*x* et O*y* et ont des coordonnées rationnelles (en désignant par rectangles R aussi bien le rectangle ouvert que le rectangle fermé et que tout ensemble contenant le premier et contenu dans le second).

Des rectangles R, (*b*) nous conduit aux ensembles A, réunions finies disjointes de tels rectangles (c'est-à-dire aux ensembles obtenus par $A = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$, $R_i \cap R_j = \emptyset$ pour $i \neq j$), en attribuant pour aire à A le nombre $mA = \sum_{i=1}^{n} mR_i$.

Mais ici deux questions se posent :

1) La première, de logique : Obtiendra-t-on la même aire pour le même ensemble A à partir de deux partitions différentes en rectangles R ? La réponse est positive : il suffit de le vérifier d'abord lorsque A est un rectangle R (on le fait en décomposant les rectangles des deux partitions de A en carrés de côtés parallèles à *ox* et *oy* et égaux, ce qui est possible à cause de la rationalité des coordonnées ; l'égalité des deux aires traduit alors l'associativité et la commutativité de l'addition des entiers) ; de là, on passe au cas d'un ensemble A quelconque en considérant une troisième partition de A dont les éléments soient $R_i \cap R_j$, si R_i décrit la première partition et R_j la seconde ; l'égalité des aires est alors dérivée de l'associativité et de la commutativité de l'addition des rationnels.

2) La seconde se rattache à la question γ. *A priori,* plus gratuite, elle éclaire cependant la théorie et ouvre la voie à la généralisation :

Quelle est la structure de l'ensemble $\mathcal{M}_0$ des ensembles A ?

On voit aisément que $\mathcal{M}_0$ possède la propriété suivante :

$$A, B \in \mathcal{M}_0 \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{M}_0 \text{ et } A - B(1) \in \mathcal{M}.$$

Sur un ensemble E quelconque, une partie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}(E)$ possédant cette propriété est appelée un anneau (de Boole). On montre que la propriété est équivalente à :

$$A, B \in \mathcal{M} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{M} \text{ et } A \Delta B = A \cup B - A \cap B \in \mathcal{M}$$

et pour ces deux opérations, $\cap$ et Δ, $\mathcal{M}$ a une structure d'anneau

(1) La différence A-B est égale à $A \cap \complement B$, elle est définie quels que soient A et B.

commutatif (où Δ est l'addition et $\cap$ la multiplication). On le vérifie aisément en associant à tout A sa fonction caractéristique χ_A dans le corps des entiers modulo 2 :

$$\chi_{A\,\Delta\,B} = \chi_A + \chi_B$$
$$\chi_{A\,\cap\,B} = \chi_A \cap \chi_B$$

L'aire mA se présente alors comme une application de $\mathcal{M}_0$ dans R qui est :

a) additive, c'est-à-dire vérifiant :

$$m(A \cup B) = mA + mB \qquad \text{si } A \cap B = \emptyset,$$

ou, énoncé équivalent.

$$\begin{cases} mA + mB = m(A \cup B) + m(A \cap B) \\ m\emptyset = 0. \end{cases}$$

Une application additive d'un anneau $\mathcal{M}$ dans R sera dite une « *étendue* » (2) sur $\mathcal{M}$;

b) positive, c'est-à-dire vérifiant $mA \geqslant 0$ ou, énoncé équivalent, croissante, c'est-à-dire vérifiant :

$$A \subset B \Rightarrow mA \leqslant mB.$$

Nous avons donc une réponse partielle à nos questions : il est possible de définir une aire satisfaisant *a, b, d* sur l'anneau $\mathcal{M}_0$ des réunions finies de rectangles R, mais *c* n'est pas satisfaite (les carrés dont les côtés ont une direction quelconque ne figurent pas dans $\mathcal{M}_0$!).

Il est donc souhaitable de définir l'aire pour d'autres ensembles que ceux de $\mathcal{M}_0$. C'est ce qui va être réalisé par l'application de ce que M. Denjoy a appelé le « principe d'Eudoxe », et que j'expose pour une étendue positive m définie sur un anneau donné $\mathcal{M} \subset \mathcal{G}(E)$ où E est un ensemble quelconque.

On considère les ensembles $A \subset E$ inclus dans au moins un ensemble de $\mathcal{M}$ [ensembles bornés du plan pour $\mathcal{M}_0$], et pour chaque A de cette nature tous les éléments α, β de $\mathcal{M}$ tels que :

$$\beta \subset A \subset \alpha.$$

L'ensemble des α n'est pas vide par hypothèse, et, parmi les β, il y a au moins l'ensemble vide.

On a alors : $m\beta \leqslant m\alpha$, et par suite : $\sup m\beta \leqslant \inf m\alpha$.

Un ensemble A sera dit quarrable pour l'étendue m si :

$$\sup m\beta = \inf m\alpha.$$

Le résultat fondamental est alors le suivant :

La famille des ensembles quarrables est un anneau $\overline{\mathcal{M}}$ contenant $\mathcal{M}$. Si l'on pose $\overline{m}A = \sup m\beta = \inf m\alpha$ pour $A \in \overline{\mathcal{M}}$, $\overline{m}A$ est une étendue sur $\overline{\mathcal{M}}$ dont la restriction à $\mathcal{M}$ est m.

---

(2) Désignée aussi dans la littérature par « mesure simplement additive », en allemand « Inhalt », en anglais « content ».

Il est clair que tout élément $A \in \mathcal{M}$ est quarrable, et que pour lui $\overline{m}A = mA$.

La condition de quarrabilité s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \alpha\beta \in \mathcal{M} \text{ avec } \beta \subset A \subset \alpha \text{ et } m(\alpha - \beta) < \varepsilon.$$

Soient alors A et $A' \subset \mathcal{M}$

Si $\beta \subset A \subset \alpha \qquad \beta' \subset A' \subset \alpha' \qquad \beta, \alpha', \beta', \alpha \in \mathcal{M}$

on a :

$$\beta \cup \beta' \subset A \cup A' \subset \alpha \cup \alpha' \qquad \beta \cup \beta', \alpha \cup \alpha' \in \mathcal{M}$$
$$\beta - \alpha' \subset A - A' \subset \alpha - \beta' \qquad \beta - \alpha', \alpha - \beta' \in \mathcal{M}$$

D'autre part :

$$\alpha \cup \alpha' - (\beta \cup \beta') = (\alpha \cup \alpha') \cap \complement(\beta \cup \beta') = (\alpha \cup \alpha') \cap (\complement\beta \cap \complement\beta')$$
$$= (\alpha \cap \complement\beta \cap \complement\beta') \cup (\alpha' \cap \complement\beta \cap \complement\beta') \subset (\alpha - \beta) \cup (\alpha' - \beta')$$

De même :

$$(\alpha - \beta') - (\beta - \alpha') = (\alpha \cap \complement\beta') \cap \complement(\beta \cap \complement\alpha')$$
$$= (\alpha \cap \complement\beta') \cap (\complement\beta \cup \alpha') = (\alpha \cap \complement\beta' \cap \complement\beta) \cup (\alpha \cap \complement\beta' \cap \alpha') \subset (\alpha - \beta) \cup (\alpha' - \beta')$$

Donc, si $m(\alpha - \beta) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad m(\alpha' - \beta') < \frac{\varepsilon}{2}$, on a :

$m[\alpha \cup \alpha' - (\beta \cup \beta')] < \varepsilon \qquad m[\alpha - \beta' - (\beta - \alpha')] < \varepsilon,$

c'est-à-dire que $A \cup A'$ et $A - A'$ sont quarrables quand A et A' le sont. $\mathcal{M}$ est un anneau.

L'additivité de $\overline{m}$ résulte de ce que si $A \cap A' = \emptyset$, on a aussi $\beta \cap \beta' = \emptyset$, d'où $m(\beta \cup \beta') = m\beta + m\beta'$, il en résulte :

$$m\beta + m\beta' \leqslant \overline{m}(A \cup A') \leqslant m(\alpha \cup \alpha') \leqslant m\alpha + m\alpha'$$

d'autre part :

$$m\beta + m\beta' \leqslant \overline{m}A + \overline{m}A' \leqslant m\alpha + m\alpha'$$

et on peut choisir α, β, α', β', de telle sorte que :

$m\alpha - m\beta + m\alpha' - m\beta' < \varepsilon$, d'où l'égalité :

$$\overline{m}(A \cup A') = \overline{m}A + \overline{m}A'.$$

La théorie classique des aires s'en tient à l'anneau $\overline{\mathcal{M}}_0$ complété de $\mathcal{M}_0$ par le principe d'Eudoxe. Il est à remarquer que :

1° $\overline{\mathcal{M}}$ n'est pas $\mathcal{P}(R^2)$ entier. Si A est l'ensemble des points à coordonnées rationnelles du carré unité, $\beta = \emptyset$, et il existe un plus petit $\alpha \in \mathcal{M}_0$ contenant A, le carré unité lui-même ; on a :

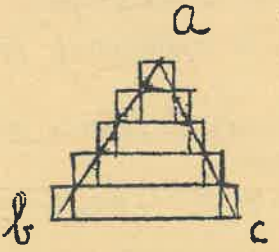
$$\sup m\beta = 0 < \inf m\alpha = 1 ;$$

2° qu'il n'y a pas à espérer obtenir un anneau plus grand $\overline{\overline{\mathcal{M}}}$ par application à $\overline{\mathcal{M}}$ et $\overline{m}$ du principe d'Eudoxe. On voit aisément que

$\overline{\overline{\mathcal{M}}} = \overline{\mathcal{M}}$. Ceci permet d'introduire la définition : $\overline{\mathcal{M}}$ sera dit le complété de $\mathcal{M}$ pour l'étendue m ;

3° que dans le cas de $\overline{\mathcal{M}_0}$ et de l'aire sur $\overline{\mathcal{M}_0}$, l'exigence c) est satisfaite.

Il suffit, en vertu du 2°, de vérifier que tout rectangle, quelles que soient les directions de ses côtés, appartient à $\overline{\mathcal{M}_0}$ et a pour aire le produit des longueurs de ses côtés. Ceci résulte du fait que tout triangle ayant un côté parallèle à Ox est quarrable (démonstration suggérée par la figure ci-contre !), et a même aire que tout triangle qui en est déduit par translation. Or, en ajoutant et retranchant deux fois de tels couples de triangles, on transforme, sans changer le produit des longueurs de ses côtés, un rectangle quelconque en un rectangle de même aire et dont les côtés sont parallèles à Ox et Oy.



Etendues de signe quelconque.

Le principe d'Eudoxe a été utilisé pour une étendue positive. Il est aisé de le transposer au cas d'une étendue négative.

Si on s'est donné sur $\mathcal{M}$ une étendue m prenant les deux signes, on peut se ramener au cas précédent si m est bornée, c'est-à-dire si :

$$\sup \{|mA| \; ; \; A \in \mathcal{M}\} < +\infty.$$

On démontre alors en effet qu'une telle étendue peut s'écrire $m = m_1 - m_2$, où m_1 et m_2 sont deux étendues positives. On étendra alors m_1 en $\overline{m}_1$ sur le complété $\overline{\mathcal{M}}_1$ de $\mathcal{M}$ pour m_1, et m_2 en $\overline{m}_2$ sur le complété $\overline{\mathcal{M}}_2$ de $\mathcal{M}$.

L'intersection (3) $\overline{\mathcal{M}}_1 \cap \overline{\mathcal{M}}_2 = \overline{\mathcal{M}}$ est un anneau contenant $\mathcal{M}$ auquel m pourra être prolongée.

2. Intégrale de Riemann.

L'intégration selon Riemann est étroitement liée à la mesure des aires par application du principe d'Eudoxe. Toutes les intégrations de Riemann sont des cas particuliers du schéma suivant :

---

(3) On voit aisément que l'intersection d'une famille quelconque d'anneaux est toujours un anneau.

Sont donnés au départ : un ensemble X ; un anneau de Boole $\mathcal{M}$ de parties de X ; une étendue positive m sur $\mathcal{M}$. R désignant la droite réelle, on considère dans le produit cartésien $X \times R$ les ensembles (4) :

$$(A, k_1, k_2) = \{ (x, y) \; ; \; x \in A, \; 0 \leqslant k_1 \leqslant y \leqslant k_2 \} .$$

On vérifie aisément que la famille des réunions finies disjointes d'ensembles (A, k_1, k_2), où A décrit $\mathcal{M}$ et $k_1 \leqslant k_2$ décrivent R^+, est un anneau $\mathcal{M}^+$, sur lequel on obtient une étendue positive m^+, en posant :

$$m^+(A, k_1, k_2) = (k_2 - k_1) . mA,$$

et en attribuant pour étendue à une réunion finie disjointe de tels ensembles la somme des étendues des composants.

Si l'on se donne une fonction f sur X, à valeurs réelles positives, bornée, et nulle hors d'un ensemble $Af \in \mathcal{M}$, Af variable avec f, on dira que f est intégrable $(\mathcal{M}, m)$ si l'ensemble :

$$A^+(f) = \{ (x, y) \; ; \; x \in Af, \; 0 \leqslant y \leqslant f(x) \}$$

est quarrable $(\mathcal{M}^+, m^+)$, et l'intégrable $\int_X f dm$ est alors l'étendue de cet ensemble.

On peut également considérer l'anneau $\mathcal{M}^-$, constitué des réunions finies disjointes d'ensembles :

$$(A, k_1, k_2) = \{ (x, y) \; ; \; x \in A, \; A \in \mathcal{M}, \; 0 \geqslant k_1 \geqslant y \geqslant k_2 \} ,$$

l'étendue $\overline{m}$ valant :

$$\overline{m}(A, k_1, k_2) = (k_2 - k_1) . mA$$

et étant définie par additivité sur les autres éléments de $\mathcal{M}^-$.

Définition analogue de $\int_X f dm$ pour les fonctions à valeurs réelles négatives, bornées et nulles hors d'un ensemble $Af \in \mathcal{M}$. Pour une fonction prenant les deux signes, on pose :

$$f^+ = \sup (f, 0) \qquad f^- = \inf (f, 0).$$

f est dite intégrable si f^+ et f^- le sont, et on pose :

$$\int_X f dm = \int_X f^+ dm + \int_X f^- dm$$

L'exposé classique, que nous rappelons ci-dessous, ne fait pas intervenir explicitement les anneaux $\mathcal{M}^+$ et $\mathcal{M}^-$, mais il consiste en fait à n'utiliser pour encadrer l'ensemble $A^+(f^+)$ [resp. $A^-(f^-)$] que des éléments de $\mathcal{M}^+$ [resp. $\mathcal{M}^-$] du type :

$$\bigcup_{i=1}^{n} (A_i, 0, k_i) \text{ avec } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j$$

et en prenant k_i aussi grand, ou aussi petit que possible, suivant l'encadrement cherché. Ceci conduit à la situation suivante :

---

(4) Généralisation des rectangles R du début.

f étant donnée [réelle, bornée, nulle hors de Af], on considère l'ensemble $\mathcal{P}$ des partitions finies P de Af en un ensemble $A_i \in \mathcal{M}$; $i = 1, ..., n$; n dépendant de P. [On a $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = Af$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$].

A chaque P, on associe les sommes (de Cauchy-Riemann) :

$$\sigma(P, f) = \sum_{i=1}^{n} \inf \{ f(x) \; ; \; x \in A_i \} \, mA_i$$

$$(P, f) = \sum_{i=1}^{n} \sup \{ f(x) \; ; \; x \in A_i \} \, mA_i.$$

On peut alors raisonner sur ces sommes (5), en faisant abstraction de $\mathcal{M}^+$ et $\mathcal{M}^-$.

P_1 et P_2 étant deux partitions finies de Af, on dit que P_1 est plus fine que P_2, $P_1 \succ P_2$, si tout ensemble A_i de P_1 est inclus dans un ensemble A_j de P_2. Pour l'ordre ainsi défini sur $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ est un treillis : l'important ici est l'existence de sup (P_1, P_2), partition constituée des ensembles $A_i \cap A_j$.

D'autre part :

$$P_1 \succ P_2 \Longrightarrow \sigma(P_2) \leqslant \sigma(P_1) \leqslant \sum (P_1) \leqslant \sum (P_2).$$

---

(5) On voit aisément comment les cas classiques suivants 1) $\int_a^b f(x)dx$; 2) $\int_a^b f dg$, g croissante ; 3) $\int\int_D f(x, y)d\omega$ sont contenues dans le cas général.

Il faut cependant signaler que les segments $[x_i, x_{i+1}]$ habituellemetn utilisés dans la définition de 1) et 2) ne forment pas une partition de $[a, b]$, non plus que les mailles quarrables compactes utilisées pour 3) n'en constituent une de D. En fait, on ne change rien au cas 1) en remplaçant les segments par des semi-segments $]x_i, x_{i+1}]$ par exemple. $\mathcal{M}$ est alors l'anneau des réunions finies de tels semi-segments et m la longueur. De même dans le cas 3), on peut attribuer les frontières communes à deux mailles à une seule d'entre elles, en prenant par exemple pour $\mathcal{M}$ l'anneau $\mathcal{M}_0$ entier.

Dans le cas 3), par contre, si l'usage de définir $\int_a^b f \, dg$ à partir des sommes telles que $\sum_{i=0}^{n-1}$ inf. $\{ f(x) \; ; \; x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1} \} [g(x_{i+1}) - (g(x_i)]$ au lieu de $\sum_{i=0}^{n-1}$ inf. $\{ (f(x) \; ; \; x_i < x \leqslant x_{i+1} \} [g(x_{i+1}) - g(x_i)]$ par exemple, conduit au même résultat dans le cas — très important — où g est continue, il est maladroit dans les autres cas, et il est préférable de considérer $g(x_{i+1}) - g(x_i)$ comme l'étendue du semi-segment $]x_i, x_{i+1}]$ (même anneau que pour le cas 1), ce qui permettra, pour g continue à droite, l'accord avec l'intégrale de Lebesgue.

Ceci tient au fait qu'à chaque terme $\inf\{f(x)\ ;\ x\in A_j\}\, mA_j$ de $\sigma(P_2)$ par exemple, correspond dans P_1 une somme de termes de la forme :

$$\sum_i \inf\{f(x)\ ;\ x\in A_i\}\, mA_i,$$

avec $\bigcup_i A_i = A_j$ et $A_i \cap A_k = \emptyset$ si $i \neq k$.

Or, de $A_i \subset A_j$ résulte $\inf\{f(x)\ ;\ x\in A_i\} \geqslant \inf\{f(x)\ ;\ x\in A_j\}$, et utilisant $mA_i \geqslant 0$ et $mA_j = \sum_i mA_i$, on en déduit :

$$\inf\{f(x);\ x\in A_j\}\, m(A_j) \leqslant \sum_i \inf\{f(x);\ x\in A_i\}\, mA_i.$$

D'où, quelles que soient $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$:

$$\sigma(P_1) \leqslant \sigma(\sup(P_1, P_2)) \leqslant \sum [(\sup(P_1, P_2)] \leqslant \sum (P_2),$$

et enfin :

(1) $\qquad \sup\{\sigma(P);\ P\in\mathcal{P}\} \leqslant \inf\{\Sigma(P);\ P\in\mathcal{P}\}$

f est intégrable, si les deux nombres sont égaux, et l'intégrale $\int_X fdm$ est alors leur valeur commune. La condition d'intégrabilité peut s'énoncer :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad P_0 \in \mathcal{P} \text{ telle que : } 0 \leqslant \Sigma(P_0) - \sigma(P_0) < \varepsilon$$

ou, de manière équivalente :

$$0 \leqslant \sum_i \Omega\,[f, A_i]\, mA_i < \varepsilon,$$

les A_i étant les éléments de P_0, et $\Omega(f, A_i)$ étant l'oscillation de f sur A_i.

On remarque :

1° que si ceci a lieu pour P_0, ceci a lieu *a fortiori* pour $P \succ P_0$ et que lorsque P_0 décrit $\mathcal{P}$, les ensembles $S(P_0) = \{P\ ;\ P \succ P_0\}$ décrivent la base d'un filtre $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{P}$;

2° que si $\xi_i \in A_i$, on a :

$$\sigma(P, f) \leqslant \sum_{A_i \in P} f(\xi_i) m(A_i) \leqslant \sum (P, f)$$

et que par suite l'intégrale peut être écrite comme limite suivant le filtre $\mathcal{F}$, on a :

$$(2) \qquad I(f) = \int_X fdm = \lim_{\mathcal{F}} \sum_{A_i \in P} f(\xi_i) m(A_i).$$

Propriétés de l'ensemble $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, m)$ des fonctions intégrables.

On vérifie aisément que :

1° Les fonctions caractéristiques des ensembles de $\mathcal{M}$ et aussi de $\overline{\mathcal{M}}$ sont intégrables.

A ce propos, on constate que $\mathcal{J}(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{m}) = \mathcal{J}(X, \mathcal{M}, m)$. Il est d'autre part évident que $\mathcal{J}$ croît avec $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ implique $\mathcal{J}(\mathcal{M}_1, m_1) \subset \mathcal{J}(\mathcal{M}_2, m_2)$ si m_1 est la restriction de m_2 à $\mathcal{M}_1$), mais l'extension de $(\mathcal{M}, m)$ en $(\overline{\mathcal{M}}, \overline{m})$ par le principe d'Eudoxe ne donne rien de nouveau. Une véritable extension de l'intégration devra donc utiliser un autre procédé.

2° Si f est intégrable, λ réel, λf est intégrable, et on a :

$$I(\lambda f) = \lambda I(f).$$

3° Si f et g sont intégrables, $f + g$ l'est.

Conséquence de $A_{f+g} \subset A_f \cup A_g$
et de

$$\sup \{(f+g)(x); x \in A\} \leqslant \sup \{f(x); x \in A\} + \sup_{x \in A} g(x);\}$$
$$\inf \{(f+g)(x); x \in A\} = \inf \{f(x); x \in A\} + \inf g(x); x \in A\}$$

En outre :

$$I(f + g) = I(f) + I(g) \qquad \text{(conséquence de (2)).}$$

4° Si f et g sont intégrables, $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ le sont, car :

$$\sup \{\sup(f,g)(x); x \in A\} = \sup [\sup \{f(x); x \in A\}, \sup \{g(x); x \in A\}]$$
$$\inf \{\sup(f,g)(x); x \in A\} \geqslant \sup [\inf \{f(x); x \in A\}, \inf \{g(x); x \in A\}]$$

5° Si f et g sont intégrables, fg est intégrable.

En effet, si m est le minimum de f sur A_f, μ le minimum de g sur A_g et χ la fonction caractéristique de $A_f \cup A_g$, les fonctions $f - m\chi$, $g - \mu\chi$ sont intégrables et positives, et

$$(f - m\chi)(g - \mu\chi) = fg - m\chi g - \mu\chi f - m\mu\chi.$$

Or, $m\chi g = mg$ et $\mu\chi f = \mu f$ qui sont intégrables.

On est donc ramené au cas des fonctions positives f et g pour lesquelles on a :

$$\sup \{fg(x); x \in A\} \leqslant \sup \{f(x); x \in A\} \sup \{g(x); x \in A\}$$
$$\inf \{fg(x); x \in A\} \geqslant \inf \{f(x); x \in A\} \inf \{g(x); x \in A\}$$

Utilisant alors l'égalité $a_1a_2 - b_1b_2 = a_1(a_2 - b_2) + b_2(a_1 - b_1)$, on conclut aisément.

L'ensemble $\mathcal{J}$ apparaît donc comme une algèbre réticulée sur R.

6° Limitons-nous à l'ensemble $\mathcal{J}_A$ des fonctions intégrables dont les ensembles A_f sont contenus dans un même $A_0 \in \mathcal{M}$.

Sur $\mathcal{J}_A$, $\sup \{|f(x)|\ ;\ x \in A_0\}$ est une norme.
$\mathcal{J}_A$ est complet pour cette norme.

Une suite de Cauchy de fonctions f_n de $\mathcal{J}$ converge vers une fonction bornée f. Montrons que f est intégrable.

On a $\|f - f_n\| < \varepsilon$ si $n > N(\varepsilon)$, d'où :

$$\sup \{f(x); x \in A\} \leqslant \sup \{f_n(x); x \in A\} + \varepsilon \quad \text{si } A \subset A_0$$
$$\inf \{f(x); x \in A\} \geqslant \inf \{f_n(x); x \in A\} + \varepsilon \quad \text{si } A \subset A_0$$

Or, n étant fixé, il existe une partition P de A_0 telle que :

$$0 \leqslant \sum (P, f_n) - \sigma(P, f_n) < \varepsilon, \text{ on en déduit :}$$

$$0 \leqslant \sum (P, f) - \sigma(P, f) \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon m A_0.$$

On remarque en même temps que :

$$|I(f) - I(f_n)| < \varepsilon m A_0.$$

Propriétés de I.

I est une application de $\mathcal{J}$ dans R, qui est :

1° *linéaire :*

$$I(\lambda f) = \lambda I(f),$$
$$I(f + g) = I(f) + I(g).$$

I est donc une forme linéaire sur $\mathcal{J}$;

2° elle est croissante, car $I(f) > 0$ pour $f > 0$, ce qui est équivalent à $f \succ g \Rightarrow I(f) \geqslant I(g)$;

3° sa restriction à $\mathcal{J}_{A_0}$ est continue.

C'est une conséquence de 2° exprimée par le théorème de la moyenne :

$$\inf \{ f(x) \ ; \ x \in A_f \} \, mA_f \leqslant I(f) = \sup \{ f(x) \ ; \ x \in A_f \} \, mA_f.$$

D'où, si $A_f \subset A_0$:

$$|I(f)| \leqslant \|f\| m A_0,$$

et on a bien $mA_0 = \sup \dfrac{I(f)}{\|f\|}$ (prendre $f = \chi_{A_0}$).

I est donc sur $\mathcal{J}_{A_0}$ une forme linéaire continue de norme mA_0. Sur $\mathcal{J}$ entier, I est continue, si $\mathcal{J}$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles $A \in \mathcal{M}$.

Cas d'une étendue de signe quelconque.

m est alors la différence de deux étendues positives m_1 et m_2. Par définition :

$$\int_X f\,dm = \int_X f\,dm_1 - \int_X f\,dm_2$$

Toutes les propriétés sont conservées, et on a pour $\mathcal{J}_A$:

$$|I(f)| \leqslant \|f\| (m_1 A + m_2 A),$$

mais on a $\|I\| \leqslant (m_1 A + m_2 A)$, et l'égalité n'est en général pas assurée.

Intégrabilité des fonctions continues.

La théorie de l'intégration est dans son essence indépendante de l'existence d'une topologie sur X, mais s'il en existe une, et c'est « pratiquement » presque toujours le cas, il est souhaitable que les fonctions continues sur X, ou certaines d'entre elles, particulièrement importantes, au moins, soient intégrables.

On a le résultat capital suivant, qui contient les cas élémentaires classiques :

Si X est localement compact, si pour tout $x \in X$, les ensembles A de l'anneau $\mathcal{M}$ qui contiennent x en constituent une base de voisinages, les fonctions continues réelles sur X à support compact [le support d'une fonction est l'adhérence de l'ensemble des points en lesquels elle prend une valeur non nulle] sont intégrables par rapport à toute étendue sur $\mathcal{M}$.

En effet, tout point $x \in S_f$ (support de f) possède, puisque f est continue, un voisinage V_x tel que $\Omega[f, V_x] < \varepsilon$. Il existe, par hypothèse, un $A_x \in \mathcal{M}$ tel que $x \in \mathring{A}_x \subset V_x$.

Les ensembles A_x forment un recouvrement ouvert du compact S_f, il existe donc un recouvrement fini de S_f constitué de tels ensembles : soient A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

On a : $S_f \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathring{A}_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $\Omega[f, A_i] < \varepsilon$.

L'ensemble $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ peut être pris comme ensemble A_f, dont les ensembles $A'_i = A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$ constituent une partition finie.

On a : $\Omega[f, A'_i] \leqslant \Omega[f, A_i] < \varepsilon$.

D'où : $\sum_{i=1}^{n} \Omega[f, A'_i]\, mA'_i \leqslant \varepsilon m A_f$,

ce qui établit l'intégrabilité de f.

Remarque 1. — L'hypothèse sur $\mathcal{M}$ sera en particulier satisfaite si $\mathcal{M}$ contient tous les compacts de X.

Remarque 2. — Il n'est pas question de donner de conditions nécessaires pour que des fonctions entières soient intégrables. Mais les observations suivantes montrent que le théorème précédent ne semble pas pouvoir être utilement généralisé :

Une condition suffisante d'intégrabilité d'une fonction f nulle hors d'un ensemble $A_f \in \mathcal{M}$, et qui, *a priori*, semble bien adaptée aux fonctions continues, est la suivante :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ P (partition finie de A_f en $A_i \in \mathcal{M}$) telle que :
$\Omega(f, A_i) < \varepsilon$.

Ce sera le cas, si la topologie de X dérive d'une structure uniforme (plus particulièrement, si X est un espace métrique), si f est uniformément continue, et si pour tout entourage V($\forall \varepsilon > 0$, pour X métrique), il existe une partition finie de A_f en ensembles $A_i \in \mathcal{M}$, petits d'ordre V (de diamètre inférieur à ε, pour X métrique).

On peut toujours supposer que X est complet (les fonctions uniformément continues se prolongeant en fonctions uniformément continues sur le complété). La condition sur les ensembles A_f entraîne alors qu'ils

soient relativement compacts, et puisque $S \subset \overline{A_f}$, que les fonctions considérées soient à support compact.

Il faut encore remarquer qu'une fonction sur X à support compact est identiquement nulle si son support a un intérieur vide. On aboutit donc à la situation suivante :

X est un espace uniforme complet, contenant des compacts d'intérieur non vide. L'anneau $\mathcal{M}$ est constitué d'ensembles relativement compacts et chacun d'eux admet une partition finie en ensembles de l'anneau petits d'ordre V, donné *a priori ;* tout compact d'intérieur non vide est contenu dans un ensemble de l'anneau.

Cette situation est réalisée par les hypothèses du théorème précédent qui en fournissent, sans doute, la réalisation la plus « raisonnable » actuellement.

II. PAGES A RELIRE

UN COURS DE FACULTÉ SOUS LOUIS-PHILIPPE

« Les étapes de la philosophie mathématique », de Léon BRUNSCHVICG, sont un beau livre qui fit quelque bruit lors de sa parution en 1912 et que l'on consulte toujours avec profit.

Mais, car il y a toujours un mais, encore faut-il le lire avec prudence. C'est ainsi qu'il oppose, page 334, la conception de la continuité de Cauchy et celle qu'il croit déceler dans un texte de Cournot, datant de 1847, « De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie », 1847.

Le lecteur superficiel risque devant la citation, fort courte d'ailleurs, de cet écrit du mathématicien philosophe, de prendre celui-ci pour un méchant rétrograde. Or, tout au contraire, il est un excellent témoin de son époque, très au courant de l'actualité scientifique et accessible aux idées les plus modernes.

Sans discuter ici la citation donnée par Léon Brunschvicg, je vais fournir quelques brefs renseignements sur Cournot, puis présenter un texte de lui, daté de 1841.

Antoine-Augustin Cournot (1801-1877) entra à l'Ecole Normale en 1821. Inspecteur-adjoint de l'Académie de Paris en 1831, professeur à la Faculté des Sciences de Lyon en 1834, recteur de l'Académie de Grenoble en 1835, Inspecteur général en 1838, recteur de l'Académie de Dijon en 1854, il prit sa retraite en 1862.

Il est connu comme mathématicien, comme philosophe et comme économiste.

En 1841, il écrit l'ouvrage dont nous publions la préface : « Traité élémentaire de la théorie des Fonctions et du Calcul infinitésimal », par M. A.-A. COURNOT, inspecteur général des études.

L'ouvrage est dédié « A la mémoire de M. Poisson, pair de France, membre de l'Académie des Sciences et du Conseil royal de l'instruction publique : témoignage de reconnaissance et de pieux attachement. »

Poisson venait de décéder le 25 avril 1840.

La préface est belle, dans une langue fort pure. On sent, à sa lecture, que tout n'était pas paix et harmonie dans le monde mathématique de la Monarchie de Juillet. Mais n'en est-il pas de même sous la Cinquième République ?

Jean ITARD.

PREFACE

Il y a déjà plusieurs années qu'ayant été chargé de remplir la chaire d'Analyse à la Faculté des Sciences de Lyon, je me suis trouvé conduit à jeter sur le papier l'esquisse de mon cours. Quelques personnes favorablement prévenues m'ont engagé à compléter ce travail, que je me décide à faire paraître, malgré la publication récente d'ouvrages fort estimables sur le même sujet. J'ai pu croire que je tirerais, dans l'accomplissement de ma tâche modeste, quelques avantages de ma position personnelle, qui ne m'assujettit point à un programme officiel, ni ne me suggère de prédilection trop exclusive pour la manière d'aucun maître. J'ai pu croire aussi que, porté depuis longtemps par goût vers l'étude de la philosophie des sciences (à laquelle tous sacrifient un peu, même en en médisant), j'étais assez bien préparé à traiter un sujet où des considérations de ce genre sont inévitables, et où chacun fait, bon gré, mal gré, sa *métaphysique* (1). Voici, en résumé, la marche que j'ai suivie dans l'exposition des principes de la matière.

J'ai cherché à faire comprendre comment, par les progrès de l'abstraction mathématique, on est amené à concevoir l'existence d'une théorie qui a pour objet les propriétés générales des fonctions continues : que ces fonctions s'expriment ou non par les signes de l'algèbre ou par d'autres symboles, d'une valeur mathématiquement définie. Il y a plus d'un avantage à distinguer ainsi la théorie des fonctions, de l'application qui s'en fait aux fonctions de l'algèbre et de la trigonométrie, et c'est en ce sens que j'ai donné au présent ouvrage le titre de *Traité élémentaire de la Théorie des Fonctions.*

Dans l'état actuel de l'analyse, la Théorie des Fonctions consiste presque entièrement dans la théorie des rapports qui s'établissent entre les fonctions que Lagrange a nommées *primitives* et *dérivées,* et l'expression analytique de ces rapports engendre ce qu'on a appelé depuis Leibniz le *Calcul différentiel et intégral,* ou bien le *Calcul infinitésimal,* à cause de la notion d'*infiniment petit* que Leibniz y a jointe. Pour peu que l'on ait une teinture de l'histoire des sciences, on n'ignore pas que Newton a inventé et fait connaître, sous le nom de *Méthode des fluxions,* un calcul qui a le même objet que celui de Leibniz, et l'on sait que le résultat d'un débat animé entre les partisans de ces grands hommes, a été d'assurer à chacun d'eux un droit égal à cette mémorable découverte.

Le développement parallèle des idées de Newton et de celles de Leibniz n'est pas seulement un fait historique ; il tient au fond du sujet, et ne peut être négligé

---

(1) Cournot ne cite personne. Cependant, l'abbé Moigno (1804-1884) se trouva visé. Il venait de faire paraître chez Bachelier, en 1840, le tome I[er] de ses « Leçons de Calcul différentiel et de Calcul intégral rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. A.-L. Cauchy. Par l'abbé Moigno. » Il écrit dans l'introduction : « Plusieurs savants... [me persuadèrent] que je rendrais un service éminent à l'enseignement des Mathématiques si j'arrivais à populariser les belles et rigoureuses méthodes du plus habile de nos géomètres. » Dans l'introduction au tome II du même ouvrage, datée du 15 avril 1844, il note : « J'ai une prédilection évidente pour la manière de M. Cauchy, j'en conviens... Mais cette prédilection n'est pas exclusive... et si M. Cournot veut bien comparer quelques-unes de ces Leçons aux chapitres correspondants de son ouvrage... il regrettera l'accusation qu'il a trop légèrement portée contre moi... Initié par mon éducation, par mes études, et par l'enseignement de la théologie, à toutes les subtilités de l'école, j'avais, suivant l'expression de M. Cournot, acquis le droit de *faire ma métaphysique ;* je ne l'ai pas voulu. »

Signalons que « la métaphysique » de 1840 est fort proche de l'axiomatique de nos jours, quant aux intentions du moins. Pour la rigueur, c'est autre chose.

dans une exposition didactique sans que l'exposition pèche en quelque point : les deux théories se complètent l'une l'autre, sans qu'on en puisse assigner une troisième qui ne rentre au fond dans l'une ou dans l'autre. J'ai cherché à faire sentir les raisons de cette double solution, autant que cela m'était permis dans un ouvrage destiné à des études élémentaires, et jusqu'à un certain point pratiques.

La méthode de Lagrange, avec les modifications qu'elle a reçues depuis qu'on a reconnu l'impossibilité de fonder, comme l'entendait ce grand géomètre, tout le calcul différentiel sur de simples identités algébriques, n'est au fond qu'un retour à la méthode de Newton. Sa notation, qu'il est utile dans une foule de cas d'employer concurremment avec celle de Leibniz, ne diffère par rien d'essentiel de la notation newtonienne, et les épithètes vagues de *primitives* et de *dérivées* ne valent pas les dénominations de *fluentes* et de *fluxions* auxquelles Newton avait donné un sens si précis. Mais je n'ai pas oublié que, dans un livre à l'usage des jeunes étudiants, il faut parler le langage actuellement reçu dans les écoles. En conséquence, j'ai exposé d'abord, dans un chapitre spécial, la théorie des fonctions dérivées, sous la forme qu'on lui donne maintenant ; puis, je me suis attaché à faire comprendre la théorie des infiniment petits, et l'identité des résultats obtenus par la méthode infinitésimale avec ceux que donne la considération des limites et des fonctions dérivées. Une fois cette identité bien saisie par le lecteur, il peut sans scrupule accepter les démonstrations par l'infiniment petit, et profiter des simplifications que ce tour de démonstration a la propriété d'opérer.

De cette manière, le lecteur n'arrive qu'avec lenteur, quoique sans circuits, à la différentiation des fonctions élémentaires, par laquelle les auteurs débutent ordinairement. Je souhaite que cette lenteur ne soit pas trop blâmée, et je m'imagine que, si j'ai réussi à me rendre clair, au moins à une seconde lecture, les commençants trouveront quelque avantage, pour la suite de leurs études, à avoir insisté un peu longuement sur ces généralités.

Pour représenter des fonctions qui peuvent être quelconques, et même n'avoir pas d'expression mathématique, j'ai fait un continuel usage des courbes. Ce signe, si naturel et si commode, rend presque évidents une foule de résultats dont la preuve exige, pour être suivie, un certain effort d'esprit, quand on ne s'aide pas de considérations graphiques, et il ne faut pas confondre l'emploi de ces considérations, pour la facile intelligence de la théorie des fonctions, avec l'application du calcul différentiel à la géométrie, qui fait, dans ce premier volume, l'objet d'un livre particulier. Les applications géométriques du calcul intégral ont beaucoup moins d'étendue, et on les trouvera dans le second volume, exposées après les théories de pure analyse auxquelles elles se rapportent le plus immédiatement.

Il était permis à une autre époque de regarder les applications géométriques comme le but principal de l'analyse : il n'en est plus de même depuis les rapides progrès de la physique mathématique. La discussion des questions particulières de physique, auxquelles les géomètres ont appliqué l'analyse, n'appartient pas sans doute à un traité de Mathématiques pures ; mais les propriétés générales des fonctions, en tant qu'elles représentent des grandeurs physiques, variables dans l'espace et dans le temps, sont un sujet de spéculations générales et abstraites qui n'emprunte rien à l'expérience, et qui appartient aux Mathématiques pures, aussi bien que l'exposition des propriétés de l'étendue. Nous avons appelé l'attention du lecteur sur ces propriétés générales des fonctions physiques et des fonctions du temps, chaque fois que l'occasion s'en est présentée, et sous ce rapport le présent ouvrage pourrait être considéré comme une introduction générale à la physique mathématique.

En adoptant la forme de Traité, j'ai dû m'attacher à rendre l'ordre et la distribution des matières aussi naturels que possible ; sans ignorer qu'on ne peut atteindre ce but de manière à éviter toute association arbitraire et toute séparation regrettable.

Le premier volume renferme ce qu'on a coutume de comprendre sous la rubrique de *Calcul différentiel* ; le second est consacré au *Calcul intégral* et à celui des *diffé-*

rences finies ; mais je donne, dès le commencement du premier volume, au livre intitulé *des Principes,* les premières notions du calcul intégral et du calcul des différences finies, qui m'ont semblé nécessaires pour rendre plus claires ou plus complètes, ou pour fixer à leur juste place des théories qui se rattachent au calcul différentiel.

Je me suis écarté de l'usage en plaçant le *Calcul des variations* dans le cinquième livre, qui a pour objet les quadratures, avant la théorie de l'intégration des équations différentielles. Cette innovation me paraît motivée sur l'ordre des difficultés, non moins que sur l'enchaînement des matières. En écartant le calcul des variations de la théorie des quadratures, à laquelle il se rattache naturellement, pour le rejeter après l'intégration des équations aux différences partielles, on induit les commençants en erreur sur la vraie nature de cette belle méthode de Lagrange, comme si elle constituait (selon l'expression proposée par un auteur de mérite) un nouveau calcul *hypertranscendant ;* tandis que ce n'est qu'une élégante application des principes du calcul différentiel aux fonctions renfermées sous le signe de quadrature.

Le progrès actuel des sciences mathématiques n'exige pas, comme celui de quelques branches de la physique, une refonte continuelle des éléments : cependant, à mesure que certaines théories se simplifient, ou reçoivent des applications plus importantes, elles acquièrent des droits à passer dans l'enseignement élémentaire, et à y prendre la place d'autres spéculations auxquelles on n'a pas reconnu la même fécondité. Il m'a semblé que les principes de la théorie des fonctions elliptiques et euléeriennes devaient se trouver dans les éléments du calcul intégral ; que les exemples de détermination d'intégrales définies devaient y être multipliés ; qu'il fallait insister sur les nouveaux procédés d'intégration des équations linéaires aux différences partielles, assez pour préparer convenablement le lecteur à l'intelligence des travaux spéciaux de physique mathématique. D'un autre côté, comme j'ai eu surtout en vue l'intérêt des jeunes gens qui se préparent à nos grades et à nos concours universitaires, j'ai indiqué par un astérisque, dans le texte et dans la table des chapitres, les matières qui, d'après l'usage, ne sont point réputées exigées pour la licence ès-sciences mathématiques, ni pour le concours d'agrégation, dont le grade de licencié est une condition préliminaire.

Il ne faut pas confondre, dans une exposition didactique, l'enchaînement logique des propositions, avec les liaisons naturelles qu'ont entre elles les vérités physiques ou abstraites qu'il s'agit d'exposer. On peut satisfaire à toutes les conditions d'un enchaînement logique, sans éclairer l'esprit sur les rapports essentiels des idées et des théories auxquelles on l'applique. Les intelligences pénétrantes finissent par saisir ces rapports, et n'en eussent-elles qu'une perception confuse, cela suffit pour les guider dans la recherche de vérités nouvelles ; mais il est bon de faciliter ce travail aux esprits ordinaires. On ne sera pas surpris que, d'après cette manière de voir, je n'aie pas fait consister seulement ma tâche dans la reproduction d'une suite de démonstrations pour le tableau. J'avoue même que j'attacherais moins de prix à mettre dans la démonstration d'un théorème cette rigueur extrême, si recherchée maintenant de quelques personnes, qu'à faire clairement apercevoir la raison de ce théorème et ses connexions avec les autres vérités mathématiques. Je prie donc que l'on m'accorde quelquefois, pour la commodité de l'exposition, et pour ne pas décourager dès le début mes jeunes lecteurs, des démonstrations qui ont satisfait si longtemps les plus grands géomètres.

.....

Quoiqu'on ne puisse se faire une loi, dans un livre élémentaire, de citer les inventeurs, j'ai passablement multiplié les citations, lorsqu'elles se rattachaient aux premières notions de l'histore des sciences, que les élèves eux-mêmes doivent posséder, ou lorsqu'elles pouvaient leur inspirer un juste respect pour ceux de nos contemporains dont les travaux contribuent aux progrès de la science. Les personnes déjà versées dans l'analyse supérieure, au jugement desquelles je soumets les idées qui me sont propres, reconnaîtront bien, sans que je les indique ici, les sources nom-

breuses auxquelles j'ai dû puiser sans scrupule. Si je cite en particulier le grand ouvrage de notre respectable maître, M. Lacroix, c'est pour acquitter une dette de reconnaissance personnelle ; car tout a été dit depuis longtemps sur le mérite du livre, et sur les services de tout genre que son auteur a rendus à l'enseignement (2).

J'ai évité soigneusement d'employer des mots qui n'eussent pas déjà cours, et l'on ne trouvera dans ce Traité, quant à la terminologie, qu'une innovation de quelque importance : celle qui consiste à distinguer par des numéros d'ordre les diverses solutions de continuité d'une fonction. Ainsi, je dis qu'une fonction éprouve une solution de continuité du premier ordre, lorsqu'elle prend une valeur infinie ou qu'elle passe brusquement d'une valeur finie à une autre ; si une pareille solution de continuité est subie par la fonction dérivée du premier ordre, je dis que la fonction primitive éprouve une solution de continuité du second ordre, et ainsi de suite. Cette définition a pour but, non seulement d'abréger le discours, mais aussi de donner plus de précision, à certaines notions fondamentales, et je m'étonne qu'on ne l'ait pas déjà introduite dans les livres didactiques (3).

Je n'ai pas craint d'employer, dans quelques passages fort courts du premier volume, des termes dont l'acception philosophique est bien connue, mais qui ne semblent pas appartenir à la langue mathématique. Ceux des lecteurs que ces termes choqueraient, peuvent passer outre sans inconvénient. J'ai conservé ces passages, en les resserrant, pour des personnes d'une autre tournure d'esprit, et peut-être trouverai-je une occasion de développer utilement les idées qui n'y sont qu'indiquées. Ce que je dis dans le chapitre IV du quatrième livre, sur les connexions de la géométrie et de l'algèbre, comporterait aussi des développements dans lesquels je ne suis pas entré, pour ne pas m'écarter du but principal que j'avais en vue.

---

(2) S.-F. Lacroix (1765-1843). Il est fait allusion ici à son « Traité du Calcul différentiel et du calcul intégral » en trois volumes, 2e édition : 1810, 1814, 1819.

(3) Nous sommes en 1841. La nouvelle définition de la continuité, qu'adopte d'ailleurs Cournot, a été rendue publique par Cauchy en 1821. Pensons au mal que nous avons aujourd'hui à introduire dans nos classes de Spéciales le calcul matriciel que Cayley trouva en 1843 !

Dans le cours de l'ouvrage, Cournot précise : « Une fonction quelconque étant représentée par l'ordonnée d'une courbe, cette courbe peut être continue et offrir en un point ce que dans les arts graphiques on appelle un *jarret*. La fonction dérivée éprouve une ruputure et la fonction primitive éprouve une solution de continuité du second ordre. »

III. ESSAI

COURS DICTÉS ET LEÇONS PAR CŒUR (*)

> Chers grands garçons africains, nous n'étions en classe ce matin que pour nous mettre ensemble au pas de cet homme exemplaire...
>
> Jean GUÉHENNO.

Il était une fois un maître qui entrait tout droit dans sa classe, s'asseyait à sa chaire, sortait de sa serviette un grand cahier, l'ouvrait à la page du jour, ajustait ses bésicles et, l'heure durant, et mot à mot, dictait son cours, coupant net la phrase, parfois même le mot — *perpendi* — au premier coup de tambour libérateur. Je n'ai jamais rencontré de tels maîtres, mais ils ont certainement existé, si on en juge par la bruyante levée de boucliers qu'ils ont provoquée. Qu'on soit parti en guerre contre eux et qu'on les ait exterminés, qui oserait s'en plaindre ?

Cette caricature à la Dubout, faisant suite à celle qui montrait « les enfants suppliciés, les maîtres enivrés de colère et les salles jonchées de tronçons d'osiers sanglants » a ému les esprits épris de nouveauté. La nouveauté est de donner aux élèves, non seulement à la maison, mais en classe et partout, plus de liberté, plus d'activité, plus de vie. Le film de Nicholas Ray (avec James Dean), « La fureur de vivre », nous montre de façon vivante et instructive une leçon de cosmographie au planétarium, et des élèves vraiment libres et actifs. Après cela, plus de doute, la « geôle de jeunesse captive » a vécu.

A l'opposé du cours dicté est le cours fait par l'élève. C'est Emile qui apprend à son maître la géométrie (1). Dès l'instant qu'on entend « respecter la personnalité de l'enfant » et lui reconnaître « un instinct secret qui le pousse à faire tout ce qu'il faut pour devenir grand », on est amené à désirer un maître qui « s'efface » et à écrire que toute intervention du maître est une « mutilation ». On concède à ce dernier une « présence silencieuse ». Dans cette perspective, le maître serait une sorte de commis, de « supporter », un M. Loyal qui prépare les matériaux et facilite la production de l'artiste.

Passons sur ces excès, excès de plume, sans suite et déjà oubliés. Les méthodes actives qui sont pratiquées ont pour but d'établir entre les élèves et le professeur, non seulement pour les exercices, mais aussi pour le cours, une collaboration intelligente. Le cours est converti en problèmes que les élèves cherchent sous la direction du maître par la méthode qui convient aux problèmes, c'est-à-dire la méthode de découverte, appelée alors redécouverte. Une chose peu connue est que cette méthode est très agréable, non seulement pour les bons élèves (2) — les autres font tapisserie — mais surtout pour le maître, pourvu qu'il réussisse à maintenir une bonne

---

(*) Article publié par notre collègue A. CHAUVIN, dans la *Revue Universitaire* de novembre 1957. Nous espérons qu'il intéressera nos lecteurs, à la fois par les idées qu'il expose, et par sa forme, plus littéraire qu'il n'est d'usage pour les articles de notre *Bulletin*. Une fois n'est pas coutume...

(1) Cf. « Classes nouvelles et méthodes nouvelles » (*Revue Universitaire*, novembre 1953).

(2) Pour lesquels, d'ailleurs, toute méthode est bonne. Les Instructions demandent de proportionner la longueur et la durée des étapes aux moyens du plus grand nombre. Dans les méthodes actives, absolument rien ne peut s'opposer à ce que ce soient les meilleurs qui brûlent les étapes.

discipline. Quoi de plus agréable que de converser, non seulement en lettres, mais en sciences ? Le maître suit les suggestions de l'un, réfute les objections de l'autre, essaie un chemin, revient en arrière, fait prendre une autre direction. Une idée en entraîne une autre ; c'est un foisonnement ; c'est la multiplication des branches de l'arbre. Pour le maître, quoi de plus agréable que ces réfutations et ces digressions qui mettent en valeur sa science et son talent ? Quoi de plus agréable surtout que les imprévus, les rebondissements, les surprises, les réponses curieuses et inattendues par lesquelles il s'instruit ? Rien à préparer, bien sûr, puique l'agrément est dans l'improvisation et puisque l'activité suppose la spontanéité. Vienne la sonnerie électrique, l'heure a paru courte, chacun s'en va content de soi, satisfait (3). On se quitte bons amis. Il reste à savoir si cette conversation peut être appelée instruction.

*
**

On aperçoit un premier avantage du cours dicté : il obligeait le professeur, pendant ses premières années d'enseignement, à faire un cours, à le constituer, à le penser, d'abord pour lui-même, puis pour ses élèves. Un cours — le mot l'indique — suppose d'abord une coordination, un enchaînement, une trame, une architecture, des divisions, des proportions, des étapes, des pas. La première chose à faire sentir à l'élève est une nécessité logique, une ordonnance rigoureuse. Faire un cours de géométrie, c'est édifier pierre à pierre un monument. Instruire, c'est construire. Un cours suppose ensuite une adaptation diligente au niveau mental des élèves, à leurs possibilités d'analyse et de compréhension, d'intuition et de rigueur. Il suppose des expériences et des retouches. Avant de faire appel à la personnalité de l'enfant, il convient de faire appel à la personnalité du jeune maître en lui recommandant de constituer un cours personnel. C'est là, à notre sens, une partie importante de la dignité de la profession. Le premier devoir du professeur est de professer, de professer son cours.

Professer n'est pas tout à fait dicter, du moins à la façon du magister de Dubout. Nous avons connu des cours dictés qui avaient un tout autre style. Le maître est debout, face au tableau, craie en main, sans notes. Derrière lui, le silence. Il est seul, et comme se parlant à lui-même (3). Voici en effet la grande vérité : on ne pense bien que seul. Hors de là, tout est bruit, concession, confusion. Qu'est-ce que penser ? C'est suivre la règle de Descartes, c'est mettre de l'ordre. Comment veut-on que l'élève conduise par ordre ses pensées s'il ne l'a pas d'abord appris par l'exemple ? (4). Le maître s'efforce donc, au tableau, de montrer ce qu'est un homme pensant. Ce n'est pas un récitant, c'est un acteur, qui vit son texte et le recrée. Voilà bien la vraie méthode active, et voilà donc le deuxième avantage du cours dicté, qui est essentiellement actif et vivant. Comme l'acteur sur scène, le professeur règle le débit et le geste, donne à chaque mot sa valeur et son poids et démontre théâtralement le théorème, selon une mise en scène minutieusement réglée. L'élève voit la figure, non pas inerte et donnée d'un seul bloc, comme sur le manuel, mais vivante et engendrée ligne par ligne sous la craie : d'abord la première, puis la seconde, puis la troisième. Il y a dans la parole une sorte de pouvoir magique de persuasion et d'entraînement que ne saurait avoir aucun imprimé. Les élèves, auditeurs et spectateurs, sont silencieux. Le silence est le grand agent pédagogique, car lui seul permet

(3) Entendons-nous. Il n'est question ici que de cours, ce qui correspond à 50 % de l'œuvre pédagogique. Après le cours, l'exercice. Après l'accommodation, l'assimilation. C'est alors entre maître et élèves le plus libre, le plus réconfortant des dialogues.

(4) « Qui rabaisse l'imitation ou s'en défend, je crains qu'il n'ignore l'homme et la manière dont un homme prend substance. » (Alexandre).

l'attention, c'est-à-dire la volonté de pensée personnelle. Sont-ils inactifs ? Pas plus que le spectateur d'une comédie, qui la vit intensément, pour son propre compte. Pas plus que l'auditeur d'une symphonie qui, au fur et à mesure qu'il l'entend, s'imagine qu'il la crée. En prenant le cours et les figures par écrit — ce qui entraine une nécessaire lenteur —, l'élève oblige son esprit à mettre les pas dans les pas, à peser chaque terme du raisonnement, à en apprécier les différents moments, à se les approprier. Par son écriture, il donne déjà au cours une signification personnelle et en prépare donc de la meilleure façon l'assimilation. L'assimilation définitive, qui sera une re-création personnelle, ne pourra être faite qu'à l'étude, dans la solitude : on ne pense bien que seul.

*
**

On a dit du cours dicté qu'il procédait du dogmatisme. Ce mot me paraît à la fois impropre et volontairement désobligeant. Si nos professeurs d'avant Blutel s'étaient entendu traiter de dogmatiques, ils auraient certainement ri de bon cœur et en longs éclats. Le cours dicté est si peu dogmatique qu'il s'accommode fort bien de la méthode de redécouverte, qualifiée bien à tort de nouvelle, puisqu'elle était quotidiennement pratiquée par Socrate et recommandée de siècle en siècle par de bons esprits, Clairaut, par exemple. Le professeur, au tableau, peut se poser en chercheur qui s'interroge et qui doute : « Est-ce la seule figure qui possède cette propriété ? » ou qui s'efforce de trouver un chemin : « Nous sommes ainsi conduit à... », disait souvent M. Fauvernier, qui enseignait les Spéciales à Besançon lorsque ce siècle avait le quart de son âge. Nous l'avions surnommé « le fauve », parce qu'il avait horreur de ce qui était artificiel et trop policé et qu'il cherchait à rendre tout problème et toute démonstration naturels. Il reste que le cours dicté est imposé comme une révélation et qu'il entre dans cette cérémonie quelque chose de religieux.

« L'art d'instruire, écrit Alain, ne se trouve que chez les militaires. Pourquoi ? Parce qu'avant de comprendre, il faut d'abord apprendre... Copier est très bon. C'est la meilleure façon de réfléchir. » Et, ailleurs : « Nous ne pensons jamais que devant une parole immuable... L'esprit se forme premièrement d'après ce préjugé du sentiment que tout ce qui est beau est vrai. L'homme étant ce qu'il est, je comprends qu'il ne pense jamais qu'en cérémonie et religion, assuré par la société visible, retenu par la politesse et le respect. C'est en adorant que l'on comprend. » Si on admet que l'homme refait dans sa vie les différents âges de l'humanité, il faut, selon A. Comte, reconnaître que l'enfant reste longtemps dans les âges théologique, mythologique et métaphysique. L'enfant est ainsi fait qu'il a d'abord besoin de croire et d'admirer. L'enfant ne saisit le concret que par l'abstrait, ne perçoit la chose que par le signe, n'arrive à l'application pratique que par la théorie. Ce qui prévaut pour lui, ce n'est ni le fait, ni l'expérience, mais la lettre et la règle.

Blutel entre dans une classe. Les élèves se lèvent. Il les fait se compter par rangs de tables : quatre fois huit élèves. Puis il ordonne un « à droite » et les fait se compter par lignes perpendiculaires aux tables ; huit fois quatre élèves. A sa question angoissée : « Trouverai-je, dans les deux cas, le même nombre ? », l'élève, plutôt que de répondre : « Oui, puisque ce sont deux façons de dénombrer la même classe et que, de l'une à l'autre, aucun élève n'est entré ni sorti, répond fièrement « Oui, parce que le produit de deux facteurs est commutatif ! ». Même réponse dans tous les établissements. Blutel conclut à une « déformation du jugement » par l'enseignement.

Si nous voulons comprendre l'unanimité de cette réponse, il faut bien appliquer la règle d'or *nisi parendo*. Sa cause n'est, ni dans l'enseignement, ni dans les maîtres, mais chez l'enfant. Si l'enfant fait cette réponse, c'est qu'il ne peut pas en faire une autre. Pour lui, une seule chose compte — et comme magiquement — et fait preuve :

c'est la règle. Sans doute, l'énoncé de la règle a-t-il été précédé d'une explication concrète, qu'il a certainement comprise ; c'est la règle qu'il retient. Plus précisément, c'est l'expression abstraite $ab = ba$ de cette règle qui le frappe et le séduit, et qui fait foi pour lui. Dans une application concrète, à l'explication concrète et directe, il substituera d'autorité l'explication par la règle, s'affirmant ainsi théologien et métaphysicien. Il suit innocemment le précepte de l'Imitation : « L'entendement doit suivre la foi, non la précéder. » Pour lui, « la règle est par elle-même idée, et c'est la seule idée » (Alain). Ainsi, c'est l'enfant, et non pas l'enseignement, qui est dogmatique. Et nous voici à ce qui est peut-être l'avantage essentiel du cours dicté : il respecte la vraie personnalité de l'enfant.

« Je serais curieux de savoir à quel âge cet état d'esprit cesse », demande Blutel. La réponse est simple. Il cesse lorsque l'enfant cesse d'être enfant, lorsqu'il atteint l'âge de raison, lorsqu'il est en état de penser selon la chose sans cesser de penser selon l'esprit. Or ceci se fait beaucoup plus tard que ne l'imaginent les théoriciens noblement impatients et sans expérience.

Mais n'est-ce pas précisément le but de l'éducation que de hâter la venue de cet âge de raison, de faire que l'enfant cesse d'être enfant ? Oui, bien sûr, mais il faut comprendre qu'en voulant traiter prématurément l'enfant en homme et en chercheur, et en voulant trop gagner, on risque de tout perdre. La seule règle à suivre est le *nisi parendo*. Ici se place la vue admirable ; le juste conseil de Rousseau, opportunément rappelé par M. Guéhenno : laissons mûrir l'enfance dans les enfants. Le conseil est d'ailleurs bon pour tout âge. D'abord croire et admirer ; puis laisser mûrir ; enfin douter et dépasser. On n'en finit pas de comprendre. Un grand Inspecteur général, M. Tresse, avouait modestement n'avoir compris ce qu'était un radian qu'une fois mis à la retraite. Si on admet que l'essentiel de la culture est d'apprendre à douter, pour pouvoir douter, il faut d'abord croire. Si on veut que l'essentiel de la culture géométrique soit d'apprendre à corriger ses erreurs (comme le voulaient les stoïciens), pour corriger, il faut une référence ; on ne juge du courbe que par le droit ; pour l'élève, cette référence est le cours. Il faut d'abord acquérir pour réfléchir sur l'acquis, puis le digérer par une assimilation progressive. Montaigne n'a eu sa tête bien faite qu'après l'avoir eue bien pleine.

Obéir n'est pas céder. Eduquer, c'est essentiellement s'opposer, c'est contraindre, mais en suivant la loi de l'enfant. De même, l'ingénieur ne conduit la nature à bonne fin qu'en l'obligeant à suivre ses propres lois. Le cours dicté contraint l'élève, et selon la loi de l'élève, qui est de croire et d'admirer. L'enseignement d'Euclide, qui est la plus monumentale réussite pédagogique de tous les temps, était selon cette loi. Pas d'erreur plus fondamentale que celle qui consiste à respecter la personnalité de l'enfant en lui donnant toutes les libertés possibles. Montaigne lui-même nous en avertit : « Comme nous voyons des terres oisives si elles sont grasses et fertiles, qu'elles ne cessent de foisonner en cent mille sortes d'herbes sauvages et inutiles et que, pour les tenir en office, il les faut assujettir et employer à certaines semences pour notre service..., ainsi est-il des esprits : si on les occupe à certains sujets qui les bride nt et contraignent, ils se jettent déréglés, par-ci, par-là, dans le vague champ des imaginations. » « Ce qui intéresse n'instruit jamais. J'irai même jusqu'à dire que nous ne nous instruisons jamais à ce qui nous passionne. » (Alain).

*
**

Les psychologues modernes ont montré que toute éducation est double, et comporte une part d'accommodation (se plier au monde extérieur) et une part d'assimilation (plier le monde extérieur à soi). Dans l'enseignement, l'accommodation correspond au cours (phase contraignante : on acquiert des besoins) et l'assimilation aux exercices (phase conquérante : on satisfait les besoins). L'enfant est tout entier dans

ses actes. L'inviter à l'activité libre, c'est l'inviter à rester lui-même, comme l'arbre libre ; cette activité favorise l'assimilation, non l'accommodation. Or, seule, l'accommodation peut commencer une éducation, car seule elle peut modifier l'enfant, en lui imposant un monde nouveau, en introduisant dans son univers propre un univers étranger, simplifié et ordonné, qui l'informe et le greffe. Le premier acte de toute éducation est une désadaptation, une rupture, une annonce d'un monde nouveau, une révélation. Le maître est le prophète. Eduquer n'est ni continuer ni même accompagner, c'est obliger d'abord l'enfant à faire un saut. L'enfant n'a que trop tendance à suivre sa pente et, par son égocentrisme naturel, à se faire une représentation subjective et mythique de ce qui l'entoure, et le laisser libre, c'est le laisser pousser et assimiler dans le sens de sa propre nature, sans réflexion ni information. Il faut débarrasser l'enfant de sa subjectivité, le délivrer de son égocentrisme et l'obliger à s'accorder à un monde sélectionné et élevé sur quoi l'humanité s'est universellement accordée. C'est cet accord qui constituera l'objectivité.

C'est l'accord avec Thalès et Descartes que cherche à réaliser le professeur faisant son cours. Dans cette mise au pas, dont parle M. Guéhenno, homme libre s'il en fut, il y a quelque chose de noble. Sentir derrière soi toute une classe assujettie, quarante-huit élèves tendus rencontrant, chacun sous sa plume, mais dans le même silence et le même temps, la même difficulté, puis avec soi et chacun pour son compte, la surmontant, voilà qui donne au maître une satisfaction élevée qui le réconcilie avec sa vocation et dont on aurait bien tort de priver le jeune professeur.

*
**

Le leçon par cœur réalise une autre contrainte par accommodation. « Savoir par cœur n'est pas savoir, dit Montaigne, c'est tenir ce qu'on a donné en garde à la mémoire. » C'est toujours la même idée : « L'enfant dit avant de savoir ce qu'il dit » (Alain), et toujours la même nécessité : il faut apprendre avant de comprendre, et on n'en finit pas de comprendre. On le voit bien sur la moindre fable de La Fontaine, inépuisable de richesses cachées. Si on attendait de tout comprendre pour l'apprendre, autant dit qu'on ne l'apprendrait jamais. C'est donc prendre un beau risque que de faire apprendre par cœur aux enfants les fables, tout incapables qu'ils sont d'en saisir les fines intentions, les délicatesses. Dans ce placement à terme, ce qui paraît voué à l'oubli fait sa place dans l'esprit, et attend l'occasion de multiples rencontres. A ces réveils, à ces résonances, c'est chaque fois un nouvel éclairage, c'est une plus riche compréhension, une plus subtile assimilation. Ici encore, c'est l'exemple de M. Tresse. La terre conserve longtemps la graine qui, un jour, pousse sa tige et donne ses fruits.

Mon professeur de Quatrième, M. Burtey, nous faisait apprendre chaque jour quatre vers. Il avait d'ailleurs une singulière façon d'enseigner, sur laquelle je ne me permettrai pas, bien sûr, de porter un jugement. Il ne connaissait que trois auteurs : Virgile, Racine et Hugo. Tout frais sortis du *De Viris*, il nous mit à la première bucolique. D'abord une dictée complète de la traduction. Puis, à l'aide de cette traduction, préparations : il fallait aller du français au latin et expliquer comment le latin s'y prenait pour exprimer une idée donnée ; grammaire et scansion. Enfin, nous récitions d'un trait l'églogue en chants alternés. Après, parfois, un élève devait traduire de vive voix quelques-uns des vers qu'il venait de réciter. *Athalie* était lu tout d'une traite ; puis préparations et scansion, puis récitation. Ne pas marquer l'arrêt, ou ne pas changer de ton après le « Je viens » du deuxième vers, c'était deux heures.

*
**

Nous sentons aujourd'hui, comme le sentait si lumineusement Renan après 1870, la nécessité d'une réforme intellectuelle et morale. « L'infériorité de la France a été surtout intellectuelle. Ce qui nous manque, ce n'est pas le cœur, c'est la tête. Le manque de foi en la science est le défaut profond de la France » (5). Cependant, de bons esprits veulent donner à nos enfants l'indépendance et la liberté. Mais la liberté est un terme. Elle ne peut raisonnablement naître qu'après une longue suite de contraintes, et par réaction contre elles. La liberté est le résultat de multiples combats ; elle est une création continue, toujours inachevée, car son exercice même suppose la continuation d'un combat, ce combat s'exerçant seulement dans des limites plus larges et plus hautes, le domaine final de la liberté étant celui de la spéculation dans l'ordre de l'intelligence, celui de la tolérance dans l'ordre du cœur. Si la liberté était au commencement, elle déboucherait dans la facilité intellectuelle et morale, dans le vagabondage et la licence, dans la confusion et l'égoïsme. Conquérir la liberté, c'est conquérir l'imagination créatrice d'une part, la bienveillance d'autre part. Qui ne voit qu'il faut pour cela s'être soumis à certaines disciplines enrichissantes, à certains renoncements exaltants.

Voici toujours la question : Ces enfants de *La Fureur de vivre*, à qui on a donné la liberté, sont-ils libres ?

A. Chauvin,
Professeur au Lycée Louis-le-Grand.

(5) La Réforme intellectuelle et morale. « Présomption, vanité, indiscipline, manque de sérieux, d'application, d'honnêteté, faiblesse de tête, incapacité de tenir à la fois beaucoup d'idées sous le regard, absence d'esprit scientifique », voilà les défauts relevés par Renan. Dans mon article « Retour aux Mathématiques » (*Revue Universitaire*, décembre 1956), écrit deux ans avant le premier Spoutnick, j'exprimais mon étonnement devant le progrès scientifique russe, qui suppose de toute évidence un progrès pédagogique, et je demandais, toute question d'amour-propre national mise à part : « Comment professeurs et responsables ne seraient-ils pas curieux et impatients d'aller en Russie voir ce qui s'y passe ? » Oui, a-t-on, là-bas, des méthodes nouvelles efficaces ? Y respecte-t-on la personnalité de l'enfant ? En fait-on un chercheur intégral ? Y use-t-on du sabotage par le haut : surchauffe stérilisante de certains enseignements, esprit de Spéciales en Elémentaires, concours généraux et particuliers essoufflants, agrégés enseignant les boites de poids en Sixième... ? Quelle nausée et quel gaspillage ! Ce qui était peut-être admissible à l'âge d'or d'une société policée, parvenue et satisfaite, l'est-il à l'âge de la concurrence atomique et céleste ? Oui, vanité, préciosité décadente et mépris sénile. Manque de sérieux, manque de générosité, manque d'esprit de communauté. »

IV. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES

SUR L'INTRODUCTION DES NOMBRES COMPLEXES

par P. SAMUEL, *professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand*

A la suite de l'audition et de la discussion de nombreuses leçons d'Agrégation, je crois pouvoir être utile aux candidats par quelques remarques sur les méthodes d'introduction des nombres complexes.

Méthode algébrique.

La méthode algébrique consiste à introduire formellement un élément i vérifiant $i^2 + 1 = 0$. Deux variantes sont possibles :

a) Construction de l'anneau quotient $R[X]/(X^2 + 1)$ de l'anneau $R[X]$ des polynômes à coefficients réels par l'idéal formé des multiples de $X^2 + 1$. Cette variante est assez naturelle, car elle consiste à calculer « modulo la relation désirée ». Mais elle n'est rapide que si on a traité au préalable des anneaux quotients.

b) Calcul sur les couples (a, b) de nombres réels. On définit $(a, b) + (a', b')$ comme étant $(a + a', b + b')$ et $(a, b)\,(a', b')$ comme étant $(aa' - bb', ab' + ba')$. La vérification du fait que, pour cette addition et cette multiplication, les couples forment un corps commutatif, est très rapide et facile (la seule chose non évidente est l'associativité de la multiplication). Cependant cette variante est assez artificielle ; faite devant des élèves, elle exigerait une habile introduction heuristique.

Méthode géométrique.

La méthode géométrique consiste à définir les nombres complexes non nuls comme étant les *similitudes directes* de centre donné du plan. Ayant entendu cette méthode exposée avec plus ou moins de bonheur par de nombreux agrégatifs, je voudrais établir ici une nette distinction entre, d'une part, les faits géométriques utilisés, d'autre part, les vérifications purement formelles qui en résultent ; il est en effet un peu choquant de voir des agrégatifs mélanger les deux choses.

On suppose connu (ou on démontre au préalable) le fait algébrique suivant : étant donné un espace vectoriel E, les applications linéaires de E dans E forment un *anneau* L(E) (addition de deux applications par addition des valeurs, multiplication par composition des applications). La vérification de ceci ne présente aucune difficulté, et c'est, en tout état de cause, un résultat fondamental d'algèbre linéaire.

On définit alors les similitudes directes du plan R^2 (par exemple comme produits d'homothéties et de rotations), et on vérifie géométriquement les résultats suivants :

(a) toute similitude directe (de centre O) de R^2 est une *application linéaire* de R^2 dans R^2 ;

(b) elles forment un *groupe commutatif* S ;

(c) ce groupe contient celui des homothéties non nulles ;

(d) étant donnés deux vecteurs non nuls, x, y de R^2, il existe une similitude directe $s \in S$ telle que $y = s(x)$ (*transitivité* de S).

Il résulte de (a) que S est un sous-groupe multiplicatif de l'anneau $\underline{L}(R^2)$. Il s'agit de montrer que la partie C de $\underline{L}(R^2)$ obtenue en adjoignant O à S est un *sous-corps commutatif* de $L(R^2)$. Le seul point qui ne soit pas évident est le fait que C est un sous-groupe additif de $L(R^2)$; en voici la démonstration :

1) Notons (— 1) l'application linéaire $x \to -x$, c'est-à-dire l'homothétie de rapport — 1 ; on a (— 1) $\in$ C [par (c)]. Alors, pour $s \in$ C, on a $-s = (-1)\,s \in$ C.

2) Soient s et s' deux éléments de C ; montrons que $s + s'$ appartient à C. C'est évident, si l'un des trois éléments s, s', $s + s'$ est nul. Supposons donc $s \in S$, $s' \in S$ et $s + s' \neq 0$. Il existe alors un vecteur x de R^2 tel que $(s + s')(x) \neq 0$. D'après (d) il existe une similitude directe $s'' \in S$ telle que $s''(x) = (s + s')(x)$. Nous allons montrer que l'on a $s''(y) = (s + s')(y)$ pour tout vecteur y de R^2, c'est-à-dire $s'' = s + s'$. Or, comme on peut supposer $y \neq 0$, il existe $t \in S$, tel que $y = t(x)$ [par (d)]. On a alors $(s + s')(y) = s(y) + s'(y) = st(x) + s't(x)$, et aussi $s''(y) = s''t(x) = ts''(x)$ (commutativité de S !) $= t(s(x) + s'(x)) = ts(x) + ts'(x)$; d'où notre assertion en vertu encore de la commutativité de S.

Ceci étant, la *représentation géométrique* des nombres complexes arrive très naturellement. On fixe, une fois pour toutes, un vecteur unitaire u de R^2. A tout nombre complexe $z \in C$, on associe le vecteur $z(u)$ (ou encore son extrémité). D'après (d) tous les vecteurs de R^2 sont ainsi obtenus (autrement dit $z \to z(u)$ est une application de C *sur* R^2). Pour montrer que cette application est *biunivoque*, on peut constater géométriquement que l'égalité des vecteurs $z(u)$ et $z'(u)$ entraîne celle des similitudes z et z' ; mais il est intéressant de remarquer que cette biunivocité est une conséquence formelle de (b) et (d) (en termes savants : commutativité + transitivité entraîne simple transitivité). En effet, si $z(u) = z'(u)$ et si y est un vecteur $\neq 0$ quelconque de R^2, il existe $s \in S$ tel que $y = s(u)$; d'où

$$z(y) = zs(u) = sz(u) = sz'(u) = z's(u) = z'(y) \ ;$$

comme on a $z(y) = z'(y)$ pour tout $y \in R^2$, on a bien $z = z'$.

On a ainsi une correspondance biunivoque entre C et R^2, et il suffit de l'expliciter pour obtenir toutes les propriétés classiques.

Remarque (débordant probablement du cadre d'une leçon d'Agrégation). — La construction de C, qui a été donnée, peut se généraliser : on se donne un corps commutatif K, un espace vectoriel E sur K, et un sous-groupe multiplicatif commutatif S de $\underline{L}(E)$ qui contienne les homothéties et opère transitivement dans l'ensemble des éléments non nuls de E ; alors la partie K' de $\underline{L}(E)$, réunion de S et de O est un sous-corps commutatif de l'anneau $\underline{L}(E)$ (la démonstration est la même que ci-dessus). Réciproquement tout corps commutatif K' contenant K est obtenu par ce procédé : il suffit de prendre $E = K'$, et de prendre pour S l'ensemble des « multiplications » $x \to ax$ $(x \in K')$ où a parcourt l'ensemble des éléments non nuls de K'.

Quelques problèmes inusités

I. — Classe de Première.

A) *Enoncé.* — 1) On considère la fonction $y\ x^2 + 2x$. Placer sa courbe représentative (C) par rapport à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy. Placer de même la ligne (D) d'équation $y = 2x + 1$ par rapport à ces mêmes axes. Déterminer les points communs à (D) et (C) par leurs coordonnées.

2) On dit qu'une fonction $y = F(x)$ est une fonction convexe dans un intervalle $]a, b[$, si, quels que soient α et β pris dans cet intervalle, l'ordonnée y d'un point de la courbe (Γ), représentative de la fonction F, est inférieure ou égale à celle, y_1, du point de même abscisse x appartenant à la corde de (Γ) qui joint les points d'abscisses α et β de (Γ).

A l'aide de cette définition, prouver que $y = ax + b$ est une fonction convexe dans tout intervalle $]a, b[$.

Prouver de même que $y = ax^2 + bx + c$, où $a > 0$, est convexe dans tout intervalle $]a, b[$. Il sera utile de recourir à une interprétation graphique.

3) On décide d'appliquer la définition précédente à la fonction $y = \Phi(x)$ construite comme suit :

— Elle coïncide avec $y = x^2 + 2x$ dans chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]+1, +\infty[$.

— Elle coïncide avec $y = 2x + 1$ dans l'intervalle $[-1, +1]$.

Etablir que $y = \Phi(x)$ est convexe dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. Il faudra pour cela considérer des intervalles $]\alpha, \beta[$ de chacun des types suivants :

$]\alpha, \beta[$ est tout ou partie de $]-\infty, -1[$ ou de $]+1, +\infty[$.
$]\alpha, \beta[$ est partie de $[-1, +1]$.
$]\alpha, \beta[$ contient -1, ou bien contient $+1$.
$]\alpha, \beta[$ contient -1 et $+1$.

B. *Commentaire.* — Problème à trois parties indépendantes, qui consiste à vérifier une définition. Il faut toutefois accepter qu'une fonction se définisse autrement que par une loi fixée, *ne varietur*, pour tout x.

Le recours aux mouvements d'un mobile, d'équations horaires distinctes dans divers intervalles de temps, usuel dès la Troisième, pourrait y aider les élèves.

II. — Classe de Mathématiques Elémentaires.

Premier sujet. — Dans l'ensemble des polynômes à une variable x, à coefficients rationnels, on définit une relation E entre deux polynômes $f(x)$, $\varphi(x)$, notée : $f(x) \sim \varphi(x)$ mod. E (lire : $f(x)$ reliée à $\varphi(x)$ module E). Cette relation a lieu si, et seulement si :

$$f(x) - \varphi(x) \equiv (x^2 - 1)\, q(x)$$

où $q(x)$ est un polynôme.

I. — *a*) Vérifier que E est une relation d'équivalence, c'est-à-dire qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

b) Prouver que tout polynôme $f(x)$ est relié (mod. E) à un polynôme déterminé $\Gamma(x)$ de degré inférieur à 2.

c) Utiliser I (*a*) pour former l'expression générale des polynômes reliés (mod. E) à un même polynôme $r(x)$ de degré inférieur à 2, à partir de $x^2 - 1$, de $r(x)$ et d'un polynôme arbitraire $q(x)$. On appellera une telle famille de polynômes « classe d'équivalence (mod. E) » de $r(x)$. On la désignera par R. Donner des exemples de telles classes. Cas de $r(x) \equiv 0$; de $r(x) \equiv 1$.

II. — *a*) Prouver que si :

$$f(x) \sim r(x) \text{ et } \varphi(x) \sim \rho(x) \text{ (mod. E), alors :}$$

(1) $f(x) \pm \varphi(x) \sim r(x) \pm \rho(x)$,
(2) $f(x) \times \varphi(x) \sim r(x) \times \rho(x)$. (mod. E)

II. — *b*) La question II *a* associe à des opérations sur les polynômes $f(x)$, $\varphi(x)$, appartenant respectivement aux classes (mod. E) R et P, des opérations analogues sur l'ensemble des polynômes des classes associées. La classe du polynôme $f(x)+\varphi(x)$ étant appelée « somme » des classes de $f(x)$ et de $\varphi(x)$, la classe du polynôme $f(x)\times\varphi(x)$ étant appelée classe « produit » des classes $f(x)$ et de $\psi(x)$, vérifier que :

si l'on a à la fois : $f(x) \sim r(x)$, $\varphi(x) \sim \rho(x)$, $f_1(x) \sim r_1(x)$, (mod. E),
alors : $\varphi(x)\,[f(x) + f_1(x)] \sim \rho(x)\,[r(x) + r_1(x)]$, (mod. E),
et de plus : $\rho(x).[r(x) + r_1(x)] \sim \rho(x)\times r(x) + \rho(x)\times r_1(x)$, (mod. E).

Quelle propriété de la « multiplication » des classes les équivalences précédentes traduisent-elles ?

III. — Dans la suite, on représentera chaque classe par son polynôme de degré inférieur à 2.

1) $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant de même classe R, peut-on avoir :

Ω : $$f(x) \times \varphi(x) \sim 0, \text{ (mod. E)}.$$

Examiner le cas où $r(x)$ est de degré 0, puis de degré 1.

$f(x)$ et $\varphi(x)$ étant de classes distinctes, étudier Ω :

si $f(x) \sim 0$, (mod. E) ; si $f(x)$ n'est pas équivalent à 0 (mod. E).

On montrera que, ou bien $\varphi(x) \sim 0$, ou bien $f(x)$ sont, l'une du type $h(x-1)$, l'autre du type $k(x+1)$.

2) Même étude pour : $f(x) \times \varphi(x) \sim 1$.

α) $f(x)$ et $\varphi(x)$ appartenant à la même classe, montrer qu'il y a quatre classes solutions ;

β) $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant de classes distinctes, déterminer la classe de $\varphi(x)$, connaissant celle de $f(x)$.

Remarque. — L'énoncé suppose connue la théorie de la division des polynômes suivant les puissances décroissantes. Il est dû à M. Châtelet (*Arithmétique et Algèbre modernes*).

Deuxième sujet. — 1° Soient $y_a(x)$ la fonction nulle pour $x < a$, égale à 1 pour $x \geqslant a$;

$z_a(x)$ la fonction nulle pour $x > a$, égale à 1 pour $x \leqslant a$.

Donner la valeur de $u(x) = y_a(x) \times z_b(x)$ suivant que x appartient ou non à $[a, b]$, a étant inférieur à b.

Même question pour : $w(x) = 1 - u(x)$.

2° A tout intervalle $[a, b]$, on attache la fonction $\varphi_{ab}(x)$ égale à 1 pour $x \in [a, b]$ et nulle pour $x \notin [a, b]$, appelée fonction caractéristique de $[a, b]$.

Soient $[a, b]$ et $[c, d]$ deux intervalles tels que : $a < c < b < d$.

a) Vérifier qu'à $[c, b]$ est attachée la fonction caractéristique $\rho(x) = \varphi_{a,b}^{(x)} \times \varphi_{c,d}^{(x)}$ pour tout x.

Donc : $$(1) \qquad \varphi_{c,b}^{(x)} = \varphi_{a,b}^{(x)} \times \varphi_{c,d}^{(x)}.$$

b) Quelles valeurs prend la fonction $\varphi_{a,b}^{(x)} + \varphi_{c,d}^{(x)}$ suivant la valeur de x ?

En déduire que la fonction caractéristique de $[a, d]$ est :

$$\varphi_{a,d}^{(x)} = \varphi_{a,b}^{(x)} + \varphi_{c,d}^{(x)} - \varphi_{a,b}^{(x)} \times \varphi_{c,d}^{(x)}.$$

3° Les constructions $2°_a$ et $2°_b$ attachent à l'intersection $X \cap Y = [c, b]$, supposée non vide, de deux intervalles $X = [a, b]$ et $Y = [c, d]$, ainsi qu'à leur réunion $X \cup Y = [a, d]$, deux fonctions caractéristiques ne dépendant que des fonctions caractéristiques de X et Y.

En posant $\varphi_{x \cap y} = 0$, si l'intersection [qui n'est plus nécessairement (c, b)] de $X = [a, b]$ et de $Y = [c, d]$ est vide, établir les formules :

$$\varphi_{xy} = \varphi_x + \varphi_y - \varphi_x \cdot \varphi_y, \quad \varphi_{x \cap y} = \varphi_x \cdot \varphi_z$$

valables quelle que soit la disposition relative des intervalles X et Y.

4° Ces formules associent à l'intersection de deux intervalles le produit des fonctions caractéristiques de ces intervalles.

Désignons par $\varphi_x * \varphi_y$ l'opération qui, à φ_x et φ_y, associe $\varphi_{x \cup y}$:

$$\varphi_{x \cup y} = \varphi_x * \varphi_y = \varphi_x + \varphi_y - \varphi_x \cdot \varphi_y$$

a) vérifier que :

$$\varphi_x . \varphi_x = \varphi_x, \quad \varphi_x * \varphi_x = \varphi_x.$$

b) vérifier que l'opération * est commutative et associative, c'est-à-dire : si Z est un autre intervalle $[e, f]$ et φ_z sa fonction caractéristique, on a :

$$\varphi_x * \varphi_y * \varphi_z = (\varphi_x * \varphi_y) * \varphi_z = \varphi_x * (\varphi_y * \varphi_z).$$

c) vérifier que :

$$\varphi_z . (\varphi_x * \varphi_y) = (\varphi_z . \varphi_x) * (\varphi_y . \varphi_z)$$
$$\varphi_z * (\varphi_x . \varphi_y) = (\varphi_z * \varphi_x) . (\varphi_z * \varphi_y).$$

5° Vérifier que :

$$\varphi_{z \cap (x \cup y)} = \varphi_{z \cap x} * \varphi_{z \cap y}$$
$$\varphi_{z \cap (x \cap y)} = \varphi_z . \varphi_x . \varphi_y$$
$$\varphi_{z \cup (x \cap y)} = \varphi_{z \cup x} . \varphi_{z \cup y}$$
$$\varphi_{z \cup (x \cup y)} = \varphi_z * \varphi_x * \varphi_y$$

Commentaire. — Les diverses fonctions φ ne pouvant prendre que les valeurs 0 et 1 (comme les restes mod. 2), les opérations . et * sont, sur l'ensemble M formé par 0 et 1, commutatives, associatives, distributives l'une par rapport à l'autre. L'ensemble M, muni de ces opérations, a une structure d'algèbre de Boole (voir article de CRUMEYROLLES, *Bulletin* 179).

Je remercie Mlle FÉLIX, qui a bien voulu m'envoyer des remarques sur une première rédaction de ces énoncés.

C. ALMÉRAS (*Lycée de Nîmes*).

Aux problèmes précédents, joignons ceux proposés naguère dans l'excellente revue « Les Humanités Scientifiques » que dirige notre collègue MINOIS (1). Certains désapprouveront sans doute ces textes, au moins en ce qui concerne les notations. Mais ce ne sont que des suggestions, que chacun est libre de discuter, et nous rappellerons que l'une des questions mises à l'étude, pour la période 1959-62, par la Commission Internationale de l'Enseignement mathématique, est celle-ci :

« *Quelles sont les questions de « Mathématiques modernes » et quelles sont les applications des « Mathématiques modernes » qui peuvent trouver place dans les programmes de l'Enseignement Secondaire ?*

I. — Construire les courbes représentatives des fonctions :

$$y = f(x) = 3 - |x - |3 - x|\,|,$$
$$y = g(x) = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{|1 - x^2|}{x^2 - 1}\right\}$$
$$y = h(x) = \sqrt{|1 - x^2|},$$

ainsi que la courbe représentative de la fonction $g(x) . h(x)$.

II. — Soit f une fonction définie pour toutes les valeurs de x. On désignera par E_f l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ s'annule ; par E_f^+ l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles f est strictement positif, et par E_f^- l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles f est strictement négatif.

1° Soient f et g deux fonctions ; exprimer, à l'aide des signes $\cup$ et $\cap$, E_{fg},

(1) *Les Humanités scientifiques*, décembre 1956. Ces énoncés étaient dus à notre collègue GLAESER, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Nancy.

E^{+}_{fg} et E^{-}_{fg}, (où fg désigne le produit des fonctions f et g), en fonction des ensembles analogues attachés aux fonctions f et g.

2° Calculer, en utilisant les formules établies au 1°, les ensembles E_{fgh}, E^{+}_{fgh} et E^{-}_{fgh}, où f, g, h, sont trois fonctions données.

(On pourra vérifier les formules obtenues en utilisant les fonctions de I comme exemples).

III. — On désigne par Z l'ensemble des entiers relatifs. Soit E l'ensemble de Z^4, formé des quadruplets (a, b, c, d) satisfaisant à la relation : $ad - cb = 1$.

A tout quadruplet $(a, b, c, d) \in E$, on fait correspondre la transformation : $\mathcal{C}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ qui à tout nombre se fait correspondre le nombre $\mathcal{C}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

1° Deux éléments distincts de E peuvent-ils définir la même transformation $\mathcal{C}$?

2° On désigne par $\mathcal{C}\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \cdot \mathcal{C}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ la transformation qui consiste à effectuer la transformation $\mathcal{C}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, puis à effectuer la transformation $\mathcal{C}\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ sur le résultat. Montrer que les transformations $\mathcal{C}$ forment un groupe pour cette opération.

SUR LES DÉFINITIONS

Il ne sera pas ici question des définitions axiomatiques, qui sont à la base d'une théorie et qu'il est préférable d'appeler *axiomes*, mais seulement des définitions que, une fois les axiomes posés, on est amené à créer au cours du développement de la théorie.

1) Que de fois n'avons-nous pas, comme M. Erhart, en classe de Quatrième, à la question : « Qu'est-ce qu'un parallélogramme ? », entendu la réponse suivante : « C'est un quadrilatère qui a ses côtés opposés égaux et parallèles et dont les diagonales... ». Le débutant, conformément à ses habitudes antérieures, réagit en littéraire, qui pense qu'un objet est d'autant mieux défini qu'on a cité un plus grand nombre de ses propriétés, et pour qui définition est description.

Le premier soin du maître doit donc être d'amener son élève à distinguer nettement ce qui est définition et ce qui est propriété démontrée. Il est amené à poser le principe suivant :

I. *Une définition doit comporter un minimum de conditions, conditions suffisantes, compatibles, indépendantes.*

Dans cette optique, il définit un parallélogramme par deux conditions simples (1) (AB parallèle à CD, AD parallèle à BC), un rectangle par trois conditions, un carré par quatre conditions. Ce procédé a de grands avantages : il assure la distinction fondamentale entre définition et propriété, c'est-à-dire la distinction entre propriétés dépendantes et propriétés indépendantes ; il oriente le débutant vers l'attitude scientifique fondamentale qui est la recherche de l'économie de la pensée, de la démarche strictement suffisante ; il permet d'apprécier le degré de complexité d'une définition, et, par suite, le degré de particularisation de l'objet défini, et achemine à la notion de dimension.

---

(1) Condition pouvant s'exprimer par une égalité de deux angles, de deux segments, de deux rapports.

2) Mais avec les exemples du rectangle et du carré nous rencontrons de suite une grosse difficulté. Si nous définissons le rectangle comme parallélogramme qui a un angle droit, nous définissons un quadrilatère dans lequel un angle est distingué et particularisé, nous accordons à cet angle un rôle privilégié et en quelque sorte directeur. Or, le rectangle a quatre angles droits : ils ont autant de droits l'un que l'autre à participer à sa définition. Pourquoi A plutôt que B ? Le sens de la justice — que nous appelons en Mathématiques le sens de la symétrie — nous fait une obligation de n'avantager aucun angle. De même, nous sentons qu'il est juste, et par conséquent beau, que le carré soit défini comme polygone régulier : quadrilatère ayant ses côtés égaux et ses angles égaux (six conditions au lieu de quatre).

Des raisons esthétiques — j'allais dire éthiques — nous conduisent donc à poser un second principe :

II. *Une définition doit respecter le principe de symétrie* (2).

3) Comment concilier ces deux principes contradictoires ?

a) Notons d'abord que la définition du rectangle par quatre angles droits ne peut être posée qu'après une justification. D'une façon générale, si le principe de symétrie conduit à employer dans une définition des données surabondantes, cela doit nécessairement venir après un *théorème de compatibilité*. Ainsi en est-il pour la définition du centre de gravité d'un triangle (point commun aux trois médianes), pour celle des triangles semblables (angles égaux, côtés proportionnels, soit cinq conditions au lieu du minimum de deux prescrit par les cas de similitude). pour celle du tétraèdre orthocentrique (trois couples d'arêtes opposées orthogonales), etc...

b) Notons ensuite que le principe de symétrie peut entraîner la donnée d'une *infinité* de conditions surabondantes : une perpendiculaire à un plan doit être définie comme droite rencontrant le plan et perpendiculaire à *toutes* les droites du plan passant par son pied (3). La définition négative des parallèles (deux droites n'ayant aucun point commun) respecte le principe de symétrie. La définition positive euclidienne ne la respecte qu'à condition de dire : droite formant avec *toute* sécante des angles alternes-internes égaux.

c) Notons enfin que tout théorème de compatibilité précédant une définition est au fond un théorème d'existence. Or, nous voici à un point capital :

III. *Toute définition proprement dite, même à données non surabondantes, exige un théorème d'existence.*

Un être mathématique, avant d'être défini, doit exister. En Mathématiques, l'existence précède l'essence. Tout mathématicien est existentialiste.

Ceci est bien évident lorsque la définition se rapporte à un invariant (puissance d'un point par rapport à un cercle) ou à un lieu (axe radical de deux cercles), ou à un ensemble (par exemple faisceau de cercles : ensemble tel que deux quelconques

---

(2) La surabondance pour raison de symétrie fourmille en Mathématiques. Une fonction homographique est définie par quatre constantes : $y = \frac{ax+b}{a'x+b'} (a' \neq 0,\ ab' - ba' \neq 0)$ et non par $y = \frac{a(x-\alpha)}{x-\beta}, a(\alpha-\beta) \neq 0$, forme pourtant plus économique et utile. Toute la trigonométrie repose sur une surabondance fondamentale : un arc, pourvu qu'on le ramène au premier quadrant, pouvant être défini par une seule ligne trigonométrique. Dans maints problèmes, les solutions élégantes sont obtenues en se fixant des données surabondantes ou des inconnues surabondantes.

(3) On pourrait aussi dire : droites orthogonales à toutes les droites du plan ; mais nous voulons laisser de côté le principe de la plus grande généralité, important en science, non en pédagogie.

ont comme axe radical une droite donnée) (4). Mais les définitions les plus humbles doivent aussi en principe ressortir à un théorème d'existence : celle du parallélogramme résulte du fait que si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre ; celle du triangle isocèle (AB = AC) résulte du fait qu'un triangle est déterminé par la donnée d'un angle et des deux côtés qui le comprennent. Le milieu, la bissectrice, l'angle droit, ne sont pas des données immédiates, mais les résultats de problèmes.

Certes, on fait pratiquement dans les débuts un large appel à l'intuition. Il semble d'ailleurs que certaines définitions résultent immédiatement de ce qui les précède et n'ont pas besoin de théorème d'existence. C'est que ces définitions (hauteur, supplément...) interviennent d'abord comme simples *commodités de langage*. Plutôt que de dire : la droite définie par un sommet et le milieu du côté opposé, il est plus économique de dire : médiane. A cette place, il s'agit plutôt d'une dénomination que d'une définition, si on veut qu'une définition donne essence à quelque chose ayant fait sa preuve de valeur. La notion de médiane ne prend valeur, et ne mérite par conséquent définition et nom qu'après qu'on a eu mis en évidence une propriété remarquable, celle de la concurrence des trois médianes, par exemple.

La nécessité du théorème d'existence précédant la définition va permettre de concilier les principes II et III. Il suffit en effet de charger le théorème d'existence, non seulement d'établir le nombre minimum de conditions créant la notion nouvelle, mais encore de rendre celle-ci de bonne tenue, et tout à fait présentable au public, c'est-à-dire équilibrée et aimable.

4) Enfin, il doit toujours être sensible à l'esprit de l'élève que la définition engendre, non pas un seul objet, mais une infinité d'objets. « Le rectangle » veut dire : tout rectangle. Le singulier de la définition doit toujours cacher un pluriel. Si l'on préfère :

IV. *La définition ramène à l'unité une infinité.*

Il semble que certaines définitions ne créent qu'un objet. S'il y a une infinité d'angles, il semble qu'il n'y ait qu'un angle droit. Cette conception est tout à fait fausse ; il y a une infinité d'angles droits. « Ils ne diffèrent que de situation » (Pascal). Si on définit l'unité de longueur, c'est pour la multiplier aussitôt, pour la faire glisser sur son support et tourner de mille manières autour d'un point.

Les définitions créant un invariant, un lieu, un ensemble, paraissent définir un objet unique ; mais cet objet est infiniment composé. La puissance d'un point par rapport à un cercle sous-entend l'infinité des sécantes passant par le point. La polaire d'un point par rapport à un cercle supporte et contient l'infinité de ses conjugués et le théorème d'existence qui précède la définition a pour but de mettre en évidence cette infinité. La définition exprime (paradoxalement) une *indétermination*.

La définition de la longueur d'un cercle paraît créer un nombre bien déterminé. Mais ce nombre est défini comme limite, par conséquent n'a d'existence que par l'infinité de ses approximations. Le périmètre du cercle n'est concevable que par l'infinité des périmètres des polygones réguliers inscrits.

5) Nous concluons. Toute définition proprement dite doit :

1° être précédée d'un théorème d'existence, qui lui donne essence et universalité ;

2° respecter le principe de symétrie ;

3° porter sur une infinité d'objets ;

4° ne pas viser du premier coup à la plus grande généralité, ce qui est crime pédagogique et sabotage par le haut.

A. Chauvin.

(4) Cette définition élémentaire ne respecte pas le principe de la plus grande généralité, car elle omet le faisceau des cercles concentriques, et aussi les deux faisceaux de cercles-droites, faisceaux qui, dans le plan conforme, sont les figures réduites des faisceaux de cercles.

SYMBOLISME ET RÈGLES OPÉRATOIRES DANS LES MATHÉMATIQUES SCOLAIRES

Résumé, dû à Mlle FÉLIX, d'une conférence faite au Congrès international d'Edimbourg, par M. STORER, directeur de la section mathématique de l'Institut de Pédagogie de Birmingham.

Les faits et les principes que j'ai en vue et que je voudrais réunir ici sont les suivants :

1) Il est désirable d'introduire à l'école quelques idées de Mathématiques modernes, et, en particulier, de prendre conscience clairement des lois fondamentales de l'arithmétique et de l'algèbre ;

2) le besoin universel d'augmenter le nombre et la qualité des mathématiciens et des scientifiques, y compris les professeurs, ne peut être satisfait que par une amélioration de la qualité de notre enseignement, en particulier en ce qui concerne les enfants de niveau moyen. Les plus doués apprendront toujours, même avec un enseignement médiocre ; ce sont les possibilités d'un élève moyen qui sont perdues par un enseignement insuffisant ;

3) on se plaint, dans tous les pays, des erreurs commises par les enfants. Je croyais que ces erreurs étaient plus communes en Angleterre que sur le continent, par suite de nos méthodes moins exactes d'enseignement, mais un article récent de Mme Krygowska (*Bulletin de l'A.P.M.*, mars 1958) indique que les professeurs des autres pays sont aux prises avec le même problème.

(Par exemple : $\dfrac{a+b}{a+c}=\dfrac{b}{c}$, $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$, etc...)

4) il y a, malgré tout, les différences de traditions et de méthodes dans les différents pays, de sorte qu'une transformation urgente dans un pays est peut-être inutile dans un autre. Certes, notre système anglais peut fournir une contribution à d'autres pays par l'importance donnée aux illustrations pratiques et par la liberté des discussions entre professeurs et élèves. Mais il serait dangereux de négliger l'aspect des Mathématiques comme discipline intellectuelle. Une récente étude russe sur l'enseignement de l'algèbre en Angleterre conclut que, malgré ses nombreux mérites, son but est de préparer les enfants à résoudre les exercices et à répondre aux questions d'examen plutôt que de développer la compréhension profonde du sujet. Bien qu'on puisse invoquer quelques justifications, cette critique est juste ;

5) le dernier point que je souligne est que, pour améliorer l'enseignement mathématique dans un pays, il n'est pas suffisant de penser à réformer les programmes et à compléter l'instruction des professeurs. Ceci produira un progrès à long terme, mais il est aussi désirable de produire une amélioration à court terme, avec les professeurs actuellement en exercice. Presque tous ces professeurs ont une expérience valable et la bonne volonté ne manque pas, mais ils ne voient pas toujours comment introduire des modifications dans leur enseignement. Si les professeurs qui ont pris l'initiative de faire des expériences peuvent indiquer des domaines limités où une nouvelle méthode a bien réussi, d'autres suivront. Il importe de ne pas être trop ambitieux au départ : il faut un large idéal, mais aller à petits pas (c'est peut-être la méthode anglaise de compromis empirique).

Les discussions de ce Congrès ont mis en évidence notre accord sur la possibilité de développer les lois fondamentales de l'arithmétique par voie inductive dès l'école primaire. Nous espérons que cela deviendra une pratique courante et que le travail commencé se développera au cours des études secondaires. Mon problème immédiat, toutefois, a été récemment de voir comment aider les enfants de 14 à

16 ans qui n'ont pas eu ce premier enseignement et qui font des fautes élémentaires en algèbre, telles que celles que nous avons mentionnées. Il me semble que les erreurs les plus graves proviennent de la confusion entre les opérations d'addition et de multiplication, ainsi que d'une méconnaissance de l'importance de l'ordre des opérations. Seule une « attaque directe » de ces fautes permettra d'espérer les corriger.

J'ai eu récemment l'occasion d'enseigner dans deux classes (13-14 ans et 14-15 ans) pour une quinzaine de jours dans chacune d'elles (sept à huit leçons et deux interrogations), et je me suis efforcé de voir jusqu'où l'on peut aller en si peu de temps.

Nous avons discuté les moyens par lesquels deux nombres peuvent en donner un troisième, puis discuté le comportement de ces « opérations », mot nouveau en ce sens pour les élèves. La commutativité fut discutée sous le titre : « L'ordre importe-t-il ? » et de nombreuses illustrations furent prises dans la vie de tous les jours (ordre suivant lequel on met ses habits, fait des mouvements, mélange d'ingrédients, ordre des mots d'une phrase, etc...).

L'associativité fut discutée sous le titre : « Les groupements interviennent-ils ? » Ici, les illustrations simples ne sont pas si nombreuses ; les plus frappantes semblent être, avec les filles, le mélange d'ingrédients pour faire un gâteau.

Ces idées furent appliquées aux quatre opérations, et les résultats furent mis en un tableau pour montrer clairement la ressemblance entre les deux opérations directes et les deux inverses. Les « éléments neutres » sont introduits sous le titre : « Rien ne change ».

Le procédé de « simplification » est basé sur la notion d'opération inverse « à l'intérieur d'une famille », et le résultat est l'élément neutre pour cette famille. (Des confusions à ce sujet conduisent aux erreurs : $\frac{a+b}{a+c}=\frac{b}{c}$, $\frac{a}{a}=0$).

A ce stade, il n'y a aucun mélange des familles : opérations (+ et —), et ($\times$ et :). Le signe $\times$ est conservé pour bien montrer qu'il y a une opération.

En cas d'opérations consécutives, une parenthèse à gauche peut être sous-entendue, mais, puisque l'ordre intervient pour les opérations — et :, il est nécessaire d'étudier la suppression des parenthèses pour des cas tels que : $a-(b-c+d)$ et : $a:(b:c\times d)$.

La règle pour (: et $\times$) est parallèle à celle qui correspond à (— et +). On n'y insiste pas suffisamment en général, si même on la mentionne. Ceci éclaire la règle de division par une fraction considérée comme une opération de division :

$$a:\frac{b}{c}=a:(b:c)=a:b\times c.$$

Tous ces résultats, écrits en tableau, mettent en évidence aussi clairement que possible les faits importants et les ressemblances. Ce tableau, affiché en classe, fixera les faits par la mémoire visuelle. Des feuilles d'exercices furent aussi utilisées en classe et à la maison.

Ensuite, il est nécessaire de mélanger les familles. Combien de manières possibles telles que : $(a+b)\times c$; $(a:b)+c$; $(a-b):c$, etc...
la parenthèse étant ici toujours placée la première à gauche.

Ceci fut regardé comme une question de commutativité dans l'ordre d'exécution des opérations. Ainsi, dans le troisième exemple, est-il indifférent de soustraire d'abord et diviser ensuite, ou bien de diviser d'abord par c et soustraire ensuite ?

Ceci conduit à la possibilité de discuter la distributivité dans des cas variés. Par exemple :

$(a+b)\times c$ donne : $(a\times c)+(b\times c)$,
mais $(a\times b)+c$ ne donne pas : $(a+c)\times(b+c)$.

Les règles de commutativité déjà connues :

$(a \pm b) \times c$ égal à : $c \times (a \pm b)$,
mais $(a \pm b) : c$ non égal à : $c : (a \pm b)$,
permettent d'étendre la distributivité :

de : $(a \pm b) \times c$ à $c \times (a \pm b)$,
mais non de : $(a \pm b) : c$ à $c : (a \pm b)$.

Ces règles étant comprises, il est possible de simplifier le symbolisme pour $\times$ et :, et d'écrire :

$$(a \times b) + c = ab + c \; ; \qquad (a : b) - c = \frac{a}{b} - c$$

l'indication des opérations étant restée visible jusqu'ici.

Enfin, l'étude se complète par la révision des méthodes de calcul élémentaire à la lumière des lois de commutativité, d'associativité et de distributivité, en particulier les règles des opérations de multiplication et de division.

Au cours de ces expériences, j'ai trouvé qu'en deux semaines, les enfants gagnent une bonne connaissance des principes de commutativité et d'associativité, mais n'ont pas encore consolidé suffisamment l'étude de la distributivité, ni la compréhension des algorithmes arithmétiques.

Naturellement, il serait mieux de ne pas enseigner tout ceci d'une façon continue et d'un bloc en une seule période, mais au contraire d'une façon intermittente sur un an et plus, et en outre par le professeur habituel et non par un visiteur qui se propose une expérience durant un temps limité. Un élargissement de la connaissance doit être développé durant toute la période d'instruction de l'élève, depuis huit ans, et même avant, jusqu'à 18 ans, le professeur faisant à chaque occasion appel au principe approprié. Mais à certaines époques, une courte période d'attention délibérée doit lui être consacrée, et ma courte expérience suggère qu'on obtient ainsi des résultats positifs.

Je répète que ma recommandation est seulement une proposition « par intérim », pour une situation particulière comme celle des élèves des écoles secondaires anglaises actuelles, mais proposer ces méthodes intérimaires est aussi utile que d'envisager des programmes à long terme. Pour les enfants les plus doués, je suggère que ce travail soit fait vers 13 ou 14 ans, et pour les élèves moyens vers 15 ans.

A bien d'autres stades du travail scolaire, la question « l'ordre intervient-il ? » est un stimulant efficace pour éveiller la pensée consciente et éviter les erreurs, qu'il s'agisse de termes, d'opérations ou de fonctions. Par exemple :

$$(a + b)^2 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2$$

c'est-à-dire une addition suivie de l'élévation au carré, ou bien deux élévations au carré suivies d'une addition ;

$$\sqrt{a + b} \quad \text{et} \quad \sqrt{a} + \sqrt{b},$$
$$\sqrt{a \times b} \quad \text{et} \quad \sqrt{a} \times \sqrt{b},$$
$$\log (a \underset{\times}{+} b) \quad \text{et} \quad \log a \underset{\times}{+} \log b,$$
$$\sin (A + B) \quad \text{et} \quad \sin A + \sin B,$$
$$\frac{d}{dx}(u \underset{\times}{+} v) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} u \underset{\times}{+} \frac{d}{dx} v$$
$$\int (u \underset{\times}{+} v) dx \quad \text{et} \quad \int u dx \underset{\times}{+} \int v dx$$

L'habitude de demander si l'ordre intervient rendra moins probables les réponses superficielles de pur verbalisme ou de symbolisme visuel. Pour les plus aptes, ce sera plus encore : ce sera une introduction à l'un des aspects des Mathématiques modernes, une préparation à un développement scientifique ultérieur.

CALCUL ALGÉBRIQUE - ERREURS ET DIFFICULTÉS

L'article du numéro 191 du Bulletin, *auquel il est fait allusion dans la Conférence précédente, était emprunté à la Revue « Mathematica et Pædagogia » de nos collègues belges. Nous les remercions de nous autoriser à reproduire l'étude ci-dessous, qui traite encore cette inépuisable question des erreurs.*

La part des Mathématiques dans l'inadaptation scolaire

Nous savons tous que les Mathématiques constituent et ont d'ailleurs constitué de tout temps une des matières les plus redoutées des élèves de toutes les sections de notre enseignement mathématique et plus particulièrement des sections latin-grec et actuellement aussi des sections économiques. Bon nombre d'entre eux l'appréhendent avant même d'en avoir commencé l'étude. Ils ont été alertés inopportunément par des parents ou des amis qui ont gardé un souvenir pénible de l'étude des Mathématiques.

L'insuccès dans cette branche prend ainsi l'allure d'une calamité héréditaire et la famille semble frappée jusque dans ses lointaines descendances d'un sort funeste et d'une disgrâce inexorable. Faute d'autres raisons connues, bien des parents y cherchent l'explication des mauvais résultats de leurs enfants tandis que d'autres les attribuent à la qualité de l'enseignement qu'ils reçoivent. Ces justifications servent aussi de prétextes aux moins courageux qui y trouvent parfaitement leur compte.

Par le fait même, les Mathématiques deviennent une des causes déterminantes des échecs aux passages de classe et constituent un des facteurs prépondérants de l'inadaptation scolaire.

Remarquons toutefois que, toutes choses égales, à connaissances relatives sensiblement équivalentes, les notes obtenues en Mathématiques, sont généralement inférieures à celles des autres branches, tout au moins en ce qui concerne les élèves dont le total général des points n'excède pas les 0,7. Faut-il en attribuer la cause à la sévérité excessive des professeurs de Mathématiques ? Nous ne le croyons pas. La raison doit en être trouvée dans la nature même des Mathématiques qui s'accommodent mal de notions approximatives, climat général dans lequel se complaisent les élèves de cette catégorie.

L'analyse des conditions requises pour favoriser la réussite en Mathématiques, au niveau de l'enseignement moyen, indique pourtant que ce sont là des critères demandés, à peu de chose près, pour la réussite des études en général.

M. H. Friedel, agrégé en Sciences, affirme, dans un livre paru récemment, que :

« Les Mathématiques sont peut-être la seule chose que *tous les esprits normaux peuvent comprendre.* Elles n'exigent, ni finesse, ni sensibilité, ni intuition (encore que ces qualités ne gâtent rien), mais seulement un solide bon sens et un peu (pas beaucoup) d'imagination constructive. »

D'autre part, comme le fait remarquer très justement M. G. Dutilleul, directeur du Lycée Claude-Bernard, « *les Mathématiques font appel à des mécanismes et à des processus intellectuels fort différents suivant la nature de la branche. Il est alors évident que par la diversité même des facteurs mis en jeu dans chaque cas, les Mathématiques ne réclament pas des composantes intellectuelles hors série, celles-ci se retrouvent aussi bien dans d'autres disciplines scolaires. Aussi l'échec total en Mathématiques est-il généralement en corrélation avec l'inadaptation scolaire* ». Parfois encore, l'élève parvient à faire illusion dans les autres branches, pendant les premières années du secondaire, seules les Mathématiques semblent touchées. Elles ne

le sont, en fait, que les premières, l'insuccès s'étendant progressivement aux autres branches, à partir des premières années du cycle supérieur de l'enseignement moyen.

On en arrive ainsi à cette conclusion assez paradoxale : si la « nullité » en Mathématiques est une des causes de l'inadaptation scolaire dans le cycle inférieur des humanités, c'est l'inadaptation scolaire qui serait responsable des échecs en Mathématiques dans le cycle supérieur.

Une illusion d'optique

Et pourtant, jamais on n'a parlé autant qu'actuellement des échecs scolaires en Mathématiques. On ne s'en est jamais autant ému qu'à présent. Y a-t-il réellement plus d'échecs en Mathématiques qu'auparavant ? Cette question est mal posée. On doit se demander si le *pourcentage* des échecs est plus élevé qu'avant. Nous ne possédons pas de statistiques précises à ce sujet. Mais, même si elles existaient, on ne pourrait en tirer des conclusions précises. Trop de conditions ont changé.

Nous nous sommes livrés à une petite enquête auprès de nos collègues littéraires, auprès de médecins, d'avocats, de pharmaciens de notre génération, c'est-à-dire parmi les universitaires sortis de la section latin-grec, il y a 25 ans et plus ; 90 % nous ont confessé avoir été de parfaites « nullités » en Mathématiques. Et les autres alors ? Ceux qui n'ont pas fait d'études supérieures ! Et, pourtant, comparez le programme des Mathématiques de cette section, il y a trente ans et aujourd'hui.

Nous n'en sommes pas à un paradoxe près, mais nous croyons réellement que, parmi les élèves sortant de rhétorique latin-grec, actuellement, le pourcentage de ceux qui ont acquis une certaine formation mathématique et qui savent se servir de l'outil qu'on a mis entre leurs mains est plus élevé qu'auparavant. Par comparaison, sommes-nous devenus plus sévères pour les autres ? Il y a aussi lieu de tenir compte du fait qu'on a relevé de 0,4 à 0,5 le minimum requis, en Mathématiques, pour le passage de classe.

D'où vient alors que les professeurs en général et ceux de Mathématiques tout particulièrement sont traités de « crocodiles » qui dévorent les élèves à pleines dents ? Pour plusieurs raisons, pensons-nous, parmi lesquelles :

1. — Les questions d'enseignement se débattent sur la voie publique. Et tout le monde donne son avis sur la question.

2. — Il y a beaucoup plus d'élèves dans l'enseignement moyen et partant le nombre absolu d'échecs est plus élevé.

3. — Beaucoup plus qu'avant, les parents s'intéressent aux résultats en Mathématiques de leurs enfants, car ils savent que l'usage des Mathématiques dans l'Enseignement Supérieur s'est largement développé. Limitée, auparavant, presque exclusivement aux Facultés polytechniques et aux sections de Mathématiques et de Physique, la mathématisation progressive de toutes les sciences fait que les Mathématiques ont gagné toute la Faculté des Sciences et les Facultés économiques.

4. — D'autre part, les parents se rendant compte du besoin accru de techniciens, sentent que leurs enfants se feront plus aisément une situation s'ils abordent des études supérieures conduisant à des carrières scientifiques.

5. — Le snobisme de la « nullité » en Mathématiques est en voie de disparition complète.

Les impératifs mathématiques des sections latin-grec et économique

Ce qui doit retenir particulièrement notre attention, c'est que dans 80 % de nos Athénées et Lycées, c'est encore toujours la section latin-grec qui conduit, à l'exclusion des sections de Physique et de Mathématiques, à la Faculté des Sciences. Et, devant la pénurie croissante de « scientifiques » nous devons essayer, dans un ensei-

gnement moyen mal sectionné, de réduire au maximum les déchets en Mathématiques en cette section latin-grec, exagérément polyvalente.

Si la question est envisagée de cette façon, les impératifs de cette section apparaissent plus nettement. A quoi faut-il attacher le plus d'importance ? Quels sont les outils dont le futur étudiant aura le plus besoin ? A notre avis, le calcul formel, d'algèbre, des représentations graphiques, des éléments du calcul différentiel et intégral et d'un peu de trigonométrie, beaucoup plus que de géométrie et d'arithmétique, sauf dans ce que cette dernière peut fournir comme introduction à l'étude de l'algèbre.

Le calcul dans les classes du cycle supérieur. Erreurs, difficultés

Nous croyons que le calcul doit garder une place importante dans l'enseignement des sections latin-grec et économique. Toute théorie ne vaut que par l'application qu'on peut en faire et le calcul numérique et algébrique reste, de ce fait, l'instrument obligé.

Si nous parcourons le programme d'algèbre des différentes classes du degré supérieur des sections latin-grec et économique et en nous tenant au seul objet que nous voulons considérer, à savoir : le calcul et plus particulièrement le calcul algébrique, nous relevons un certain nombre d'opérations nouvelles :

1) les opérations sur les radicaux arithmétiques d'indice m ;
2) le calcul avec les exposants négatifs et fractionnaires ;
3) le calcul logarithmique, ou, mieux, l'opération qui consiste à prendre le logarithme d'une expression algébrique ;
4) l'opération de passage à la limite ;
5) le calcul des dérivées ;
6) très peu de calcul différentiel et intégral.

Voilà, en gros, les points du programme qui introduisent de nouveaux procédés opérationnels. Nous sommes d'accord pour reconnaître qu'au fur et à mesure que nous abordons l'étude de nouveaux chapitres, nous ouvrons, par là-même, un nouveau champ d'application du calcul numérique et algébrique et que celui-ci s'enrichit aussi de techniques plus efficaces, mais en dehors des points ci-dessus, nous n'introduisons rien de nouveau.

Reprenons ces différents points et cherchons ensemble les difficultés qu'on y rencontre :

1. — Radicaux d'indice m : l'étude des radicaux du second degré est faite presque complètement en Quatrième et, lorsque le calcul sur les radicaux d'indice 2 est bien acquis, celui des radicaux d'indice m l'est très vite. D'autre part, pour le peu d'usage que l'on en fait, il n'y a vraiment pas lieu d'y consacrer beaucoup de temps ;

2. — L'usage des exposants négatifs et fractionnaires libère, dans une certaine mesure, les élèves d'une contrainte et leur application se limite au calcul logarithmique et au calcul des dérivées ;

3. — Nous n'avons jamais rencontré de grosses difficultés dans le calcul logarithmique, ni dans ses applications, sauf parfois, dans la division d'un logarithme à caractéristique négative par un nombre entier, Chaque opération sur les nombres se remplace par l'opération correspondante (directe ou indirecte), mais d'un rang inférieur (comme pour les puissances. évidemment !). Et comme il n'y a pas d'opération d'un rang inférieur à l'addition ou à la soustraction, il n'y a pas de $\log(a \pm b)$, si ce n'est par calcul numérique direct. Le calcul numérique proprement dit devient ensuite un calcul de nombres relatifs. Le fait que le logarithme à caractéristique négative soit une espèce d'androgyne, n'émeut pas l'élève outre mesure ;

4. — Le calcul des limites est certainement, du point de vue opérationnel, le calcul le plus simple, puisque le passage à la limite conserve les opérations. De plus,

quand on a attiré l'attention de l'élève sur le fait que l'infini ne se traite pas comme un nombre, si même il est tenté de le faire (et, dans certains cas cela, n'a pas d'importance), il reconnaît rapidement les formes illusoires. Aussi, quand il en rencontre une ($\infty - \infty$; $0 \times \infty$ et ∞/∞), il sait qu'il doit faire autrement. La seule difficulté est $x \to \pm \infty$ lorsqu'il faut diviser à l'intérieur du radical par x^2 et distinguer peut-être la recherche de la limite d'une fonction irrationnelle pour les deux cas $x > 0$ et $x < 0$. En ce qui concerne les limites de fonctions circulaires, la limite de $\sin x/x$ pour $x \to 0$ étant établie, leur recherche se réduit en général à une transformation trigonométrique ;

5. — L'opération qui consiste à prendre la dérivée d'une fonction élémentaire est plus complexe. Pourtant, nous devons reconnaître qu'en fin de compte nous n'avons rencontré que fort peu d'élèves qui n'arrivaient pas à dériver une fonction composée, à partir des dérivées des fonctions élémentaires que doivent connaître les élèves de Première latin-grec ou économique. A ce propos, nous avons constaté qu'il était préférable de traiter directement les cas de u^m, $\sqrt[m]{u}$, $\sin u$, $\cos u$, $\operatorname{tg} u = \sin u/\cos u$. De cette façon, la dérivée d'une fonction n'intervient plus que dans le calcul des dérivées des puissances d'une fonction circulaire d'un multiple de la variable.

En général, les élèves savent toujours reconnaître le type de la formule à appliquer et la dérivée à *l'état brut* est presque toujours correcte. C'est quand il s'agit de réduire et de simplifier l'expression obtenue qu'ils éprouvent le plus de difficultés et commettent des erreurs.

Quelle est la nature des erreurs que commettent alors nos élèves ? Nous avons constaté qu'elles ressortissent presque toujours au programme de calcul algébrique des classes inférieures et plus particulièrement à celui de la Quatrième.

Nous ne savons quel est votre sentiment à ce sujet, mais nous avons vérifié, sur plusieurs années, que les classes latines qui laissent le plus grand déchet en Mathématiques sont les Quatrièmes et, à un degré moindre, par suite de la décantation opérée dans l'année antérieure, les Troisièmes. Ce déchet, qui n'est que de l'ordre de 10 à 15 % en Cinquième, atteint parfois 50 % en Quatrième, en fin d'année, avec une certaine récupération en septembre. Ne faut-il pas en rechercher la cause dans un programme trop chargé pour des enfants qui traversent la période de crise pubertaire ?

Quelles sont ces erreurs tenaces, irritantes et considérées comme inexplicables ? En les relevant à partir du niveau de la cinquième année on peut affirmer qu'elles n'offrent pas toutes une permanence absolue au travers des humanités ; certaines disparaissent assez rapidement, d'autres se maintiennent plus longtemps, certaines, qu'on croyait définitivement disparues, réapparaissent sporadiquement dans le cycle supérieur.

Les catégories d'erreurs en Mathématiques

On peut, dans une première analyse, classer les erreurs en trois catégories :

1) les erreurs de langage et d'écriture,
2) les erreurs de calcul,
3) les erreurs de raisonnement.

Cette classification n'épuise probablement pas tous les cas et, d'autre part, certaines erreurs ressortissent à des catégories différentes. En fonction de l'objet de cette réunion, nous pouvons nous en tenir aux erreurs de langage et d'écriture qui engendrent des erreurs de calcul, et aux erreurs de calcul proprement dites, bien qu'on puisse par ailleurs classer les erreurs de calcul dans la catégorie des erreurs de raisonnement, ou, mieux, des erreurs par manque de raisonnement.

Les erreurs de langage.

C'est l'abbé de Condillac qui, dans sa « Logique », constatait le fait que nous ne pensons qu'avec le secours des mots. De plus, toute discipline a une terminologie et des moyens d'expression qui lui sont propres. Or, très rapidement, certains élèves confondent le sens de termes désignant des objets différents, tels :

a) terme, facteur, membre ;
b) coefficient, exposant ;
c) nombres premiers, nombres premiers entre eux ;
d) p.g.c.d ; p.p.c.m. ;
e) égalité, équation, identité ;
f) équation et fonction, etc...

Les conséquences de ces confusions, de ce manque de précision, peuvent être graves ; les énoncés des propriétés et des théorèmes finissent par être vidés de leur contenu réel. La confusion s'accentue et passe, si nous pouvons nous exprimer ainsi, au second degré. En voici un exemple :

Nous connaissons les deux propriétés relatives au produit d'une somme par un nombre et à la multiplication d'un produit par un nombre.

Par suite de la confusion entre les mots « termes » et « facteurs » on obtient finalement une réponse du genre que voici :

— Pour multiplier un produit par un nombre, on multiplie chaque *terme* du produit par ce nombre et on fait la somme des produits obtenus... ou la variante... on fait le produit des nombres obtenus.

Et l'élève pratique effectivement le calcul de cette façon. Les erreurs de langage deviennent ainsi génératrices d'erreurs de calcul.

Les erreurs d'écriture.

En dehors de l'expression verbale, les Mathématiques s'expriment aussi à l'aide de symboles et d'opérateurs. Aussi, les erreurs de graphie entrainent-elles des conséquences aussi graves que les erreurs de mots. Les principales sont .

1) *Les signes d'égalité placés illégitimement.*

En voici un exemple :

$$7(3+5)-5(9-5)=7\times 8=56-5(9-5)$$
$$=5\times 4=56-20=36.$$

Cet exemple est authentique (début de la Cinquième). C'est là une séquelle du primaire que l'on retrouve même dans des livres d'arithmétique commerciale.

2) *L'oubli ou le mauvais placement de parenthèses et la mauvaise interprétation des calculs proposés.*

L'élève n'établit pas les distinctions entre certaines graphies :

a) $7a-ab+c$; $7a-a(b+c)$; $7a-(ab+c)$; $7(a-ab+c)$,
b) $4a+5bc^2$; $4a+5(bc)^2$; $4a+(5bc)^2$,
c) $(-a)^2$; $-a^2$,
d) a^2+b^2 et $(a+b)^2$,

(ces deux dernières au point de vue de la graphie, du langage et de l'interprétation du calcul).

3) *Traduction symbolique défectueuse d'une thèse ou d'un énoncé.*

Elle se rencontre notamment dans la mise en équation d'un problème, les calculs indiqués n'exprimant pas les opérations à effectuer. Nous avons observé parfois,

dans ce cas, un phénomène assez curieux, lorsque les calculs sont simples et peu nombreux : l'élève suit l'idée de son raisonnement, mais n'effectue pas les opérations par lesquelles il le traduit.

Disons tout de suite que les corrections répétées et patientes de l'impropriété des termes et des erreurs de langage amènent assez rapidement une amélioration sensible. Il existe aussi des exercices très utiles, dans le genre de ceux que notre collègue, Mlle Lenger, proposait dans le n° 4 de notre revue, qui corrigent une bonne partie des erreurs de graphie. Ces mêmes exercices, envisagés dans l'autre sens, servent également à corriger l'imprécision de la terminologie. *On peut même envisager l'emploi d'un magnétophone.*

Les erreurs de calcul.

1) *Erreurs de signe.*

Le signe — devant des parenthèses et plus encore devant une fraction $\left(-\frac{a-b}{2}\right)$, dans une équation lorsqu'on chasse le dénominateur, dans le calcul des puissances des nombres négatifs ; même dans le calcul du réalisant de l'équation du second degré ($b^2 - 4ac$), dans un remplacement en trigonométrie

..... $= -\cos^2(a+b) =$ ..... $= -\cos^2 a \cos^2 b - 2\cos a \cos b \sin a \sin b + \sin^2 a \sin^2 b$.

2) *Le produit par zéro* ($5 \times 0 = 5$).

3) *Le quotient de deux nombres égaux* ($a : a = 0$, erreur de même source que la précédente) et ses conséquences dans la mise en évidence :

$$m + ma - mb = m(a - b).$$

4) *Les opérations sur les puissances.*

$(-1/2)^3 = -3/6$ ou $-3/8$ ou $1/6$,

$(a^3)^2 = a^5$ ou a^9 ; $a^3 \times a^2 = a^6$; $a^4 + a^3 = a^7$; $a^5/a^2 = 1^3$.

$a^3/a^5 = ?$. A notre avis, l'introduction des exposants négatifs, à ce moment, n'arrange rien, pour la raison fort simple que si l'élève n'a pas pris conscience de ce que $a^{-2} = 1/a^2$, il lui est impossible de trouver la valeur numérique de a^{-2} pour une valeur quelconque de a.

5) *Les identités remarquables.*

$(a+b)^2 = a^2 + b^2$,

$(a-b)^2 = a^2 - b^2$, et inversement.

6) *Les radicaux du second degré.*

$\sqrt{a^2 \pm b^2} = a \pm b$, conséquence des précédentes.

$\sqrt{4} = \pm 2$; $\sqrt{4} = 2$ et $\sqrt{-4} = -2$.

La simplification

$$\sqrt{42} = \sqrt{36} + 6,$$
$$= 6 + \sqrt{6},$$
$$\text{ou} = 6\sqrt{6}.$$

7) *L'invention par analogie.*

$m : (a \pm b) = (m : a) \pm (m : b)$.

8) *Les opérations sur les fractions arithmétiques et algébriques et leur simplification.*

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c},$$

c. $\frac{a}{b} = \frac{ca}{cb}$ (jusque dans les classes supérieures de la section scientifique),

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$,

$\frac{1}{a}+=\frac{1}{b}\frac{1}{a+b}$ ou l'inverse.

$\frac{mp+q}{ms+r}=\frac{p+q}{s+r}$; $\frac{M+p}{n+p}=\frac{m}{n}$; $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=ad+bc$

(puisqu'on chasse les dénominateurs !).

9) *Les erreurs complexes provenant de la combinaison et de la superposition d'erreurs élémentaires.*

Exemple, avec explications d'élève. Soit à calculer :

$$\frac{3ax}{2x-a}\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{x}\right).$$

1) Produit de deux fractions

$$\frac{3ax\ (2-1)}{(2x-a)\ \ (a-x)}=\frac{3ax}{(2x-a)\ \ (a-x)}$$

2) Je vais mettre $(a-x)$ en évidence au dénominateur, mais comme j'ai $2x-a$, je change les signes haut et bas

$$=\frac{-3ax}{(a-x)\ \ (1-2)}=\frac{-3ax}{-(a-x)}=\frac{3ax}{a-x}$$

puis je divise haut et bas par a et j'obtiens $\frac{3x}{-x}=-3$.

Nous n'avons certainement pas, dans cette liste, épuisé toutes les erreurs que commettent nos élèves, mais nous pensons pouvoir les considérer comme étant les plus courantes. Toutes ces erreurs ne présentent pas le même caractère de permanence. Même si certaines d'entre elles réapparaissent encore dans le cycle supérieur, cette réapparition n'a qu'un caractère accidentel, dû à la négligence, et soulève généralement la réprobation des autres élèves.

La disparition de certains types d'erreurs provient principalement de ce que les mêmes procédés opérationnels se trouvent appliqués dans plusieurs questions d'origines différentes et de ce fait finissent par faire l'objet de prises de conscience individuelles, à des moments différents, grâce à la diversité des questions dans lesquelles ils se présentent.

Aussi, la persistance d'un type caractérisé d'erreur provient de ce que la règle opérationnelle dont elle découle n'a pas d'applications suffisamment variées.

Lorsque M. le Professeur Gattegno, parlant de « l'usage des fautes dans l'enseignement des Mathématiques » dit : « que le remède est dans la compréhension et non dans la répétition et le " drill ", nous marquons sans restrictions, notre accord pour le " drill " ». Mais en ce qui concerne la répétition, notre avis sera plus nuancé. La profusion des exercices sur un même procédé avec, comme conséquence inévitable, leur complication de plus en plus grande, exagérée, n'a jamais rien arrangé. Les élèves doués s'y retrouvent encore, tandis que les autres y perdent définitivement pied. Mais la répétition du même type d'opération dans des champs d'application variés est, croyons-nous, souhaitable.

Aussi constate-t-on que certains types d'erreurs disparaissent à des niveaux différents ; ainsi au niveau des Cinquième et Quatrième, la plupart des erreurs de signes, le produit par zéro, le quotient de deux nombres égaux et ses conséquences, les identités remarquables (tout au moins dans le sens de leur développement), les erreurs dans le calcul des fractions numériques et certaines erreurs dans les opérations sur les puissances. Il ne faut d'ailleurs pas se faire trop d'illusions ; nous ne

supprimerons jamais toutes les erreurs, l'inattention et l'étourderie existent aussi bien en Mathématiques qu'en orthographe, par exemple. L'ennui, c'est, qu'en Mathématiques, les conséquences sont plus graves puisqu'elles entachent les calculs jusqu'au bout.

D'autres erreurs s'amenuisent à des niveaux plus élevés. Mais en schématisant, on peut constater que les erreurs les plus tenaces sont imputables à deux mécanismes :

1) *Les opérations dans lesquelles le calcul à effectuer est d'un autre rang que l'opération indiquée.* Et c'est *à partir de leur introduction* que se produisent les confusions entre multiplication et addition, entre division et soustraction, entre élévation à une puissance et multiplication, entre extraction de racine et division.

2) *La réduction à la forme produit.* Il faut d'ailleurs reconnaître que l'analogie de procédé entre la décomposition en facteurs d'une expression algébrique et celle d'un nombre est insuffisante pour éveiller rapidement une prise de conscience des élèves peu doués.

Les remèdes

Vous ne vous attendez pas à ce que nous vous fournissions la méthode à suivre pour que nos élèves ne commettent plus d'erreurs.

La prise de conscience d'une structure mathématique est d'ordre individuel. Les élèves doués y accèdent assez spontanément, les autres plus lentement. S'il est vrai que les qualités intellectuelles requises par l'étude des Mathématiques élémentaires ne sont pas hors série, ces qualités n'existent, en général, chez la plupart des enfants, qu'à l'état potentiel. Elles se libèrent plus ou moins rapidement suivant la nature des individus. Mais pour permettre cette libération, chez beaucoup d'adolescents, il faut de la patience, du temps, beaucoup de temps. Les erreurs proviennent généralement d'un mécanisme mental faussé. Pour les corriger, il faut pouvoir les repérer. Il faut savoir ce qui fait agir les élèves, pourquoi, en vertu de quel mécanisme, ils opèrent de telle ou telle façon et cela dans chaque détail d'un calcul. Alors, il faut expliquer, faire comprendre, chercher d'autres raisons, présenter le mécanisme d'une autre façon. On est parfois stupéfié du résultat obtenu en pratiquant de façon peu orthodoxe et qui semble, au premier abord, irrationnelle.

Sens d'une réforme dans le cycle inférieur

Dans le cycle inférieur, l'horaire réservé aux Mathématiques est probablement suffisant pour les élèves doués (1). Il ne l'est pas pour les autres, compte tenu de la matière à voir.

Dans quel sens faut-il réformer ? Augmenter le nombre d'heures ? Certainement pas ; les élèves subissent déjà une trop longue présence à l'école. C'est probablement la seule catégorie de citoyens à laquelle on ne reconnaît pas le bénéfice de la semaine des 40 heures. Alors, élaguer les programmes ? Bien sûr, radicalement et au maximum.

Pourquoi passons-nous tant de temps à résoudre des problèmes par des méhodes « dites » arithmétiques ? Parce qu'on les pose à certains examens que passent nos élèves qui quittent l'école après la quatrième année. Les demande-t-on aux examens d'entrée en Polytechnique ? Non, et on a parfaitement raison, car 75 % au moins de nos élèves qui quittent les sections scientifiques ne seraient plus capables de les

(1) Il s'agit naturellement ici de l'horaire appliqué dans les établissements belges.

résoudre. Pensez aux professeurs de section scientifique que le hasard d'un changement d'établissement amène en Sixième et Cinquième !

Nous demandons aux professeurs de Quatrième, s'ils ont le temps de faire beaucoup de problèmes d'algèbre.

Il faut réduire les problèmes d'arithmétique au strict minimum, et ne conserver que ceux qu'il y a avantage à traiter par des procédés arithmétiques. Ils ne sont pas si nombreux. Il faut aussi avoir l'audace d'aborder plus tôt, en Sixième, l'introduction des nombres relatifs et les mécanismes les plus simples du calcul algébrique. *Il faut absolument alléger la matière du programme des Quatrièmes.* En reportant une partie de ce programme sur les classes supérieures ? A notre sens, non. Mais il faut limiter la matière du cycle inférieur à ce qui est indispensable et il faut fixer ce minimum en fonction des prolongements dans le cycle supérieur.

Dans le cycle supérieur des sections latin-grec et économique

Il faut moins de géométrie et limiter les applications de l'équation du second degré et du trinôme à ce qui est utile et ne pas vouloir épuiser les manuels. « La trinômite coûte beaucoup d'argent à la France »... à la Belgique aussi ! Le programme de trigonométrie semble sage.

Et le calcul différentiel et intégral ?

Faut-il le maintenant ? Oui ! Il est absolument indispensable que la prise de contact avec ces notions élémentaires se fasse dans le secondaire plutôt qu'à l'Université. Pensez à nos futurs médecins, pharmaciens, chimistes, biologistes, géographes et ingénieurs commerciaux.

Faut-il l'étendre ? Non, pour ce qui regarde le développement théorique, mais certainement en ce qui concerne ses applications.

Comment y arriver ? De la façon que J. Tannery préconisait il y a déjà près de 70 ans.

Un mot pour finir

Il faut limiter le programme des Mathématiques et son développement à ce qui est utile et formatif. Mais peut-on demander qu'on en fasse autant dans les autres branches ? Ainsi, en diminuant le nombre d'heures de présence des enfants à l'école, la part relative des sciences en général et des Mathématiques en particulier serait plus élevée. Les enfants auraient ainsi le temps de se livrer au travail personnel, le seul réellement efficace. On reproche à des enfants en pleine croissance, à des enfants qui ont besoin de repos, de ne pas lire, de ne pas se cultiver ! Mais quand le feraient-ils ?

Le gonflement exagéré de certains cours fait que les élèves se meuvent dans un fatras de connaissances superficielles, mal assimilées, insuffisamment digérées au point que les plus studieux même confondent l'essentiel et l'accessoire et ne retiennent finalement plus rien.

Qu'on y réfléchisse ! Si l'on ne prend pas des mesures radicales, l'enseignement des humanités périra de « crevaison grenouillère ».

F. Claus, *Athénée Royal, Jodoigne.*

V. DOCUMENTS OFFICIELS

Rapport sur la composition de Mathématiques (classe de Mathématiques) au Concours général des Lycées, Collèges et Écoles normales en 1958 (1)

I. Les données sont :

un cercle (C) de plan (Q), de centre O, de rayon a, d'axe Oz ;

un point H intérieur au cercle (C). Le diamètre passant par OH est orienté selon l'axe $x'Ox$ et l'abscisse $\overline{OH}$ de H sur $x'x$ est désignée par l $(-a < l < a)$;

un angle (aigu ou droit) θ ;

une longueur donnée d $(d > 0)$.

L'angle θ sert à repérer un plan (R) passant par la droite $x'x$: angle (Q, R) $= \theta$.

1° Les inconnues sont deux points M et M′ du cercle (C), qu'on demande de déterminer par les conditions suivantes :

a. Le milieu P de la corde MM′ est projeté orthogonalement sur $x'Ox$ au point *donné* H. Autrement dit P se trouve sur une droite connue Δ qui est, dans le plan (Q), la perpendiculaire élevée en H à $x'x$.

b. La projection orthogonale mm' du segment MM′ *sur le plan connu* (R) doit être de longueur *connue* égale à d.

On observe qu'en désignant par α l'angle de la droite MM′ avec le plan R $(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2})$, $mm' = MM' \cos\alpha$. La mise en équation du problème consistera à égaler à d le produit des expressions de MM′ d'une part, de $\cos\alpha$ d'autre part, en fonction d'une inconnue. D'après l'indication de l'énoncé l'inconnue va être la distance $OP = \rho$. La connaissance de ρ détermine celle de $HP = \sqrt{\rho^2 - l^2}$, longueur qu'on peut porter sur Δ de part et d'autre de H et à partir de ce point, d'où la connaissance de P ; reste à élever en P une perpendiculaire à OP qui coupera (C) en M et M′. Ainsi, chaque valeur de ρ donne deux cordes MM′ répondant au problème et symétriques par rapport à $x'x$. Leur longueur commune est

$$MM' = 2PM = 2\sqrt{OM^2 - OP^2} = 2\sqrt{a^2 - \rho^2}$$

puisque le triangle OPM est rectangle en P.

En nous adressant ce rapport, M. l'Inspecteur général ROBERT nous écrit qu'il a présidé le Jury du Concours général pour la dernière fois en 1958. Que ce soit pour nous l'occasion de renouveler à M. ROBERT les vœux que nous avons formulés au moment de son départ en retraite. Ce départ ne l'a pas empêché de présider encore une fois le Jury du Concours général. Nous comprenons que maintenant il a le droit de considérer sa tâche comme bien remplie. Qu'il sache, cependant, combien son départ est regretté.

(1) Le Jury était composé de MM. ROBERT, inspecteur général honoraire, président ; CHATEAU, professeur (Centrale) au Lycée Charlemagne ; FLORY, professeur (Centrale) au Lycée Chaptal ; GUAYDIER, professeur (Centrale) à l'annexe Stanislas du Lycée St-Louis ; MARTIN, professeur (Spéciales) au Lycée Janson-de-Sailly ; NORDON, professeur (Centrale) au Lycée Buffon.

Voir l'énoncé du problème, *Bulletin 193*, page 476.

Pour évaluer α en fonction de ρ, on appelle (R_1) la nouvelle position prise par le plan (R) après une rotation *d'angle droit* et de sens quelconque autour de l'axe Oz, suivie de la translation de vecteur $\overline{OH}$. Ces opérations, dans le plan Q, changent la droite $x'x$ (passant par O) en la droite Δ (passant par H), faisant avec $x'x$ l'angle de rotation qui est droit. Le plan (R_1) passe par la droite (Δ) et fait avec (Q) l'angle θ. La droite MM' devient, dans (Q) une *perpendiculaire* à MM', c'est-à-dire une parallèle à OP. L'angle de cette droite avec le plan (R) n'est pas changé par la rotation, ni par la translation, ni par la substitution à la droite d'une parallèle. *L'angle α est donc égal à celui de* PO *avec* (R_1), angle dont le sommet est d'ailleurs P, puisque P est un point de Δ, donc du plan (R_1).

Introduisons la sphère (Σ) de centre O telle que le plan (R_1) lui soit tangent. Son rayon est le côté opposé à l'angle aigu θ d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est OH. Nous désignons ce rayon par r et l'on a : $r = \text{OH} \sin\theta = |l| \sin\theta$.

Le plan (R_1) est un plan tangent à la sphère passant par P : il y a une infinité de tels plans formant le même angle, *qui est* α, avec le diamètre PO et l'on voit que $r = \rho \sin\alpha$.

D'où $\cos^2\alpha = 1 - \dfrac{r^2}{\rho^2} = \dfrac{\rho^2 - r^2}{\rho^2}$.

2° La relation à écrire $\text{MM}'^2 \cos^2\alpha = d^2$ donne finalement l'équation (1) du problème

$$(1) \qquad \frac{(a^2 - \rho^2)(\rho^2 - r^2)}{\rho^2} = \frac{d^2}{4}.$$

A remarquer que les données l et θ n'interviennent que par la combinaison $r = |l| \sin\theta$ que l'on peut regarder comme connue. Cette simplification, capitale dans tout le problème, ne s'étend cependant pas aux inéquations que doit vérifier ρ.

Pour qu'une racine en ρ de (1) soit acceptable, il est nécessaire que $\sqrt{\rho^2 - l^2}$, expression de HP, existe, et que $2\sqrt{a^2 - \rho^2}$, expression de MM', existe, d'où les conditions nécessaires

$$\rho < |l|,$$
$$\rho < a,$$

et bien entendu $\rho > 0$.

L'inéquation $\rho^2 < a^2$ ou $a^2 - \rho^2 > 0$, lorsque ρ est racine de (1), équivaut à $\rho^2 - r^2 > 0$, puisque le premier membre est assuré d'être positif. Les inéquations du problème $(\mathcal{P})$, moyennant (1) se réduisent à $r < \rho < |l|$.

Pour discuter on est conduit à rechercher si, en posant $\rho^2 = X$, la fonction

$$\varphi(X) = \frac{(a^2 - X)(X - r^2)}{X}$$

peut prendre, dans l'intervalle $r^2 \leqslant X \leqslant l^2$ une valeur égale à $\dfrac{d^2}{4}$.

L'intervalle $r^2 \leqslant X \leqslant a^2$ est plus étendu (car $|l| < a$). On le substitue au précédent puisque, comme il a été noté, le paramètre $|l| = \dfrac{+r}{\sin\theta}$ peut être considéré comme n'intervenant qu'en second lieu, puisque seuls a, ρ, r et d figurent dans (1) [ou bien a et r dans $\varphi(X)$].

Dans l'intervalle (r^2, a^2), $\varphi(X)$ est définie et continue

$$\varphi(X) = a^2 + r^2 - \frac{X^2 + a^2 r^2}{X}.$$

La dérivée est $\varphi'(X) = -1 + \dfrac{a^2 r^2}{X^2} = \dfrac{a^2 r^2 - X^2}{X^2}$ elle s'annule pour $X = ar$ dans l'intervalle. D'où le tableau des variations de $\varphi(X)$:

X	r^2	ar	a^2
$\varphi'(X)$	+	o	—
$\varphi(X)$	croît	max.	décroît.

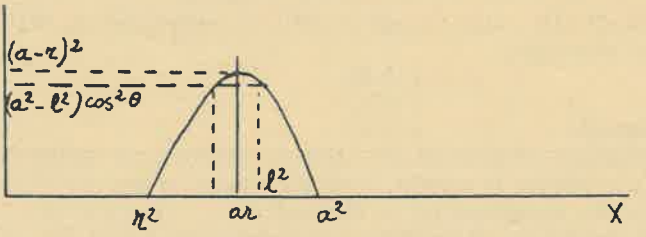
La valeur du maximum est $\varphi(ar) = \dfrac{a(a-r)\ r\ (a-r)}{ar} = (a-r)^2$.

Il est *nécessaire* pour que le problème $(\mathcal{P})$ ait des solutions, et *nécessaire et suffisant* pour que l'équation (1) ait des racines en ρ (quatre racines deux à deux opposées) que d satisfasse à l'inégalité $\dfrac{d^2}{4} \leqslant (a-r)^2$.

Pour une discussion plus complète du problème $(\mathcal{P})$, il nous faut revenir à l'intervalle (r^2, l^2), voir comment y varie la fonction $\varphi(X)$ et lire sur son graphique en combien de points il est coupé par une parallèle à l'axe des X d'ordonnée $\dfrac{d^2}{4}$.

l^2 est supérieur à r^2, mais peut être inférieur ou supérieur à ar. Formons $l^4 - a^2r^2 = l^2(l^2 - a^2\sin^2\theta)$. Donc si $a\sin\theta > |l|$ $l^2 > ar$,
$a\sin\theta < |l|$ $l^2 < ar$,

1er *cas* : $a\sin\theta > |l|$ (soit H entre F et F') $\varphi(X)$ est croissante dans (r^2, l^2),



$$\varphi(l^2) = \frac{(a^2-l^2)\ (l^2-r^2)}{l^2} = (a^2-l^2)\cos^2\theta.$$

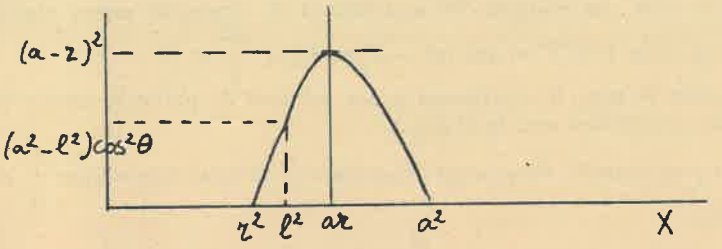
Résultats $\dfrac{d^2}{4} < (a^2-l^2)\cos^2\theta$, une valeur acceptable de ρ^2, la plus petite racine de (1) en ρ^2 $(\rho^2 < ar)$.

$\dfrac{d^2}{4} = (a^2-l^2)\cos^2\theta$ une valeur $< ar$ et la valeur l^2 acceptables pour ρ^2.

$(a^2-l^2)\cos^2\theta < \dfrac{d^2}{4} < (a-r)^2$ deux valeurs acceptables de ρ^2 encadrant ar.

Ces valeurs sont égales si $\dfrac{d^2}{4} = (a-r)^2$. Le problème est impossible pour $\dfrac{d^2}{4} > (a-r)^2$.

2° *cas* : $a \sin\theta < |l|$ (H est, soit entre A et F, soit entre A′ et F′).



Résultats $\frac{d^2}{4} < (a^2 - l^2)\cos^2\theta$, une valeur acceptable de ρ^2, la plus petite racine en ρ^2 de (1) ($\rho^2 < ar$).

$\frac{d^2}{4} = (a^2 - l^2)\cos^2\theta$, une valeur acceptable l^2.

$(a^2 - l^2)\cos^2\theta < \frac{d^2}{4}$, problème impossible.

3° Exprimons les mesures de $\overline{FG}$ et $\overline{F'G'}$ (sens positif de $\overrightarrow{OP}$),

$\overline{FG} = \overline{OP} - \text{proj}_{OP}\, OF$. Désignons $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})$ par v $\text{proj}_{OP}\, OF = a \sin\theta \cos v$.

Mais le vecteur $\overline{OP}$ est projeté sur $x'x$ selon $\overrightarrow{OH}$: $l = \rho \cos v$ d'où $\cos v = \frac{l}{\rho}$.

Ainsi $\overline{FG} = \rho - a \sin\theta \frac{l}{\rho}$,

$$\overline{F'G'} = \overline{OP} - \text{proj}_{OP}\, OF' = \rho + \frac{a \sin\theta l}{\rho}$$

ces expressions ne font intervenir l que par $l \sin\theta$,

$$\overline{FG}.\overline{F'G'} = \rho^2 - a^2 \sin^2\theta \frac{l^2}{\rho^2} = \rho^2 - \frac{a^2 r^2}{\rho^2} = X - \frac{a^2 r^2}{X} \quad \text{en posant } \rho^2 = X.$$

D'autre part $\varphi'(X) = \frac{a^2 r^2 - X^2}{X^2}$ ce qui peut s'écrire

$$\varphi'(X) = -\frac{\overline{FG}.\overline{F'G'}}{X} = -\frac{\overline{FG}.\overline{F'G'}}{\rho^2}.$$

Une solution du problème ($\mathcal{P}$), considérée comme l'*association de deux cordes* MM′ *symétriques par rapport à* $x'x$ et répondant à ce problème peut être :

de *première espèce* si F et F′ sont de part et d'autre de la corde MM′ : alors $\overline{FG}.\overline{F'G'}$ est négatif, $\varphi'(X)$ est positif et la solution correspond à un intervalle pour X où la fonction $\varphi(X)$ est croissante ;

de *deuxième espèce* si F et F′ sont d'un même côté de la droite MM′ : alors $\overline{FG}.\overline{F'G'}$ est positif, $\varphi'(X)$ est négatif et la solution correspond à un intervalle pour X où la fonction $\varphi(X)$ est décroissante ;

de *troisième espèce* si la droite MM′ passe par l'un des points F, F′ ; alors $\overline{FG}.\overline{F'G'}$ est nul, la solution corespond à la valeur ar de X. Ceci nécessite

$$\frac{d^2}{4} = (a - r)^2.$$

Il résulte de la discussion que, *lorsque le problème* ($\mathcal{P}$) *est possible, il comporte au plus une solution d'espèce donnée.*

Il peut avoir des solutions de première et de deuxième espèce simultanément quand H est entre F et F′ et que $(a^2 - l^2)\cos^2\theta < \frac{d^2}{4} < (a-r)^2$.

La valeur l^2 pour X correspond à une solution de première espèce formée de deux cordes confondues avec la droite Δ.

4° On peut résoudre simplement l'équation (1) où nous supposerons $\frac{d^2}{4} < (a-r)^2$. Elle s'écrit :

$$(a^2 - X)\ (X - r^2) - \frac{d^2}{4} X = 0.$$ Revenons à l'inconnue ρ

$$\rho^4 + a^2r^2 - \rho^2\left(a^2 + r^2 - \frac{d^2}{4}\right) = 0.$$

Si l'on considère que $\rho^4 + a^2r^2 = [\rho^2 + ar]^2 - 2\,ar\,\rho^2$ ceci s'écrit

$$(\rho^2 + ar)^2 - \rho^2\left(a^2 + r^2 + 2\,ar - \frac{d^2}{4}\right) = 0,$$

d'où $\rho^2 + ar = \sqrt{(a+r)^2 - \frac{d^2}{4}}\,\rho$,

($\rho^2 + ar$ est *a priori* positif).

De même, si l'on considère que $\rho^4 + a^2r^2 = [\rho^2 - ar]^2 + 2\,ar\,\rho^2$ on est amené à $(\rho^2 - ar)^2 - \rho^2\left(a^2 + r^2 - 2\,ar - \frac{d^2}{4}\right) = 0$,

d'où $\rho^2 - ar = \varepsilon\sqrt{(a-r)^2 - \frac{d^2}{4}}\,\rho$,

ε est égal à -1 ou à $+1$, selon que $\rho^2 < ar$ ou que $\rho^2 > ar$.

Mais dans la discussion, on ne trouve une solution telle que $\rho^2 > ar$ que dans le 1er cas $a\sin\theta > |l|$, c'est une solution de deuxième espèce puisque $\varphi(X)$ est décroissante pour cette valeur de ρ^2.

Ajoutons membre à membre les deux formules irrationnelles, ce qui donne 2ρ et en fin

$$\rho = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(a+r)^2 - \frac{d^2}{4}} + \varepsilon\sqrt{(a-r)^2 - \frac{d^2}{4}}\right] \qquad (2)$$

ε *étant égal à* -1 *pour une solution de première espèce,* $+1$ *pour une solution de deuxième espèce.*

II. 1° *Solution géométrique du problème* ($\mathcal{P}$). — Supposons que M et M′ satisfasse au problème ($\mathcal{P}$). Il existe une rotation autour de l'axe Oz qui transforme le milieu P de MM′ en un point P_1 appartenant à la perpendiculaire (Δ_1) à $x'x$ élevée en H_1, H_1 étant le point de $x'x$ d'abscisse $\overline{OH_1} = l\sin\theta$. En effet

$$OH_1 = |l|\sin\theta\ \ OH = |l|,$$

donc $OH_1 < OH$, la droite Δ_1 est sécante au cercle de centre O et de rayon OP.

On a vu que le rayon r de la sphère (Σ) est $|l|\sin\theta$, c'est-à-dire OH_1. Le point H_1 est donc situé sur (Σ).

Soit P_1 un des points de rencontre de (Δ_1) avec le cercle de centre O et de rayon OP : son choix n'aura pas d'influence dans la suite. $OP_1 = OP = \rho$.

Rappelons que l'angle α de MM′ avec (Q) est égal à l'angle de OP avec le plan R_1 tangent à (Σ), autrement dit α est le demi-angle d'ouverture du cône de révolution de sommet P circonscrit à (Σ). Il est encore égal au demi-angle d'ouver-

ture du cône de révolution de sommet P_1 circonscrit à (Σ). L'une des génératrices de ce cône est la droite P_1H_1 visiblement tangente à la sphère (Σ) en H_1. Donc α est égal à l'angle $\widehat{OP_1H_1}$.

L'équation fondamentale (1) traduisait le fait que $d = MM' \cos\alpha$. Or

$$MM' = M_1M'_1,$$

$M_1M'_1$ étant la corde de (C) de milieu P_1, déduite de MM' par la rotation d'angle $\widehat{POP_1}$ autour de Oz. Nous avons donc $d = M_1M'_1 \cos\widehat{OP_1H_1}$.

Soient m_1 et m'_1 les projections orthogonales de M_1 et M'_1 sur $x'x$. Dans le plan (Q) on voit que $m_1m'_1 = M_1M'_1 \cos\widehat{OP_1H_1}$ donc $d = m_1m'_1$. Les points m_1 et m'_1 sont faciles à connaître, le point H_1 pouvant être regardé comme connu. Les tracés pour obtenir une solution MM' du problème $(\mathcal{P})$ sont les suivants :

Marquer sur $x'x$ le point H_1 homothétique de H dans l'homothétie de centre O et de rapport $\sin\theta$; *porter sur $x'x$ à partir de et de part et d'autre de H_1 les longueurs H_1m_1 et $H_1m'_1$, de longueur* $\frac{d}{2}$. *Construire les points M_1 et M'_1 de (C) dont les projections orthogonales sur $x'x$ sont les points m_1 et m'_1. Décrire le cercle de centre O tangent à une corde $M_1M'_1$ (en son milieu P_1) et prendre, s'ils existent, ses points d'intersection avec la droite (Δ). Soit P un tel point ; en effectuant sur $M_1M'_1$, la rotation de centre O et d'angle $(\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP})$ dans (Q), on obtient MPM', soit la corde MM' de milieu P.*

Inversement une corde MM' ainsi obtenue a d'après les considérations précédentes sa projections sur Q égale à $m_1m'_1$ et par construction est donc égale à d. Elle est bien une solution de $(\mathcal{P})$ et il s'y associe sa symétrique par rapport à $x'x$.

Ayant obtenu séparément M_1 et M'_1 (avec ambiguïté pour chacun de ces points), le choix de $M_1M'_1$ se fait de quatre manières deux à deux symétriques par rapport à $x'x$. Les solutions correspondantes de $(\mathcal{P})$ si *elles existent toutes*, sont au nombre de deux, une étant de première, l'autre de seconde espèce, comme on va le voir, en général.

2° Appelons G_1 et G'_1 les projections orthogonales respectives de A et A' sur la droite $M_1M'_1$,

$$\overline{AG_1} = \overline{OP_1} - \text{proj } OP_1\, OA.$$

C'est le même calcul que pour FG, mais OP est remplacé par OP_1 et v par $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{OP_1} = v_1$. Ici $\overline{OP_1}\cos v_1 = \overline{OH_1}$ donc

$$\cos v_1 = \frac{l_1}{\rho} \text{ et } \overline{AG_1} = \rho - a\frac{l\sin\theta}{\rho_1}.$$

On avait $\overline{FG} = \rho - a\sin\theta\,\frac{l}{\rho}$, donc $\overline{AG_1} = \overline{FG}$

$$(\text{sens} + \overrightarrow{OP_1})\ (\text{sens} + \overrightarrow{OP})$$

De même $\overline{A'G'_1} = \overline{F'G'}$.

Le produit $\overline{AG_1}.\overline{A'G'_1}$ qui, par son signe, indique la position du couple AA' par rapport à la droite $M_1M'_1$ est égal à $\overline{FG}.\overline{F'G'}$ qui a servi à caractériser, par ce signe, l'espèce de la solution considérée.

Donc, si la corde MM' est de première espèce, $\overline{AG_1}.\overline{A'G'_1}$ est négatif, les points A et A' sont de différents côtés de la droite $M_1M'_1$, ce qui revient à dire que M_1 et M'_1 sont de part et d'autre du diamètre AA' de (C).

Si la corde MM′ est de deuxième espèce, $\overline{AG_1}.\overline{A'G'_1}$ est positif, les points M_1 et M'_1 sont du même côté du diamètre AA′.

Si la corde MM′ est de troisième espèce, $AG_1.A'G'_1 = 0$, donc l'un des points A ou A′ est sur la droite $M_1M'_1$, autrement dit, l'un des points M_1 ou M'_1 coïncide avec A ou A′.

En résumé, l'espèce de la corde MM′ fournie, si elle existe, par une corde $M_1M'_1$ de (C) dépend de la position de la droite $M_1M'_1$ par rapport au segment AA′.

3° Le quadrilatère $Am_1M_1G_1$ est inscriptible dans le cercle décrit sur AM_1 comme diamètre. Donc la droite G_1m_1 est antiparallèle de la droite AM_1 par rapport aux deux droites AA′ et $M_1M'_1$.

De même, à partir de la considération du quadrilatère $A'm_1M_1G'_1$, on montre que la droite G'_1m_1 est antiparallèle de la droite $A'M_1$ par rapport aux deux droites AA′ et $M_1M'_1$.

L'antiparallélisme est une symétrie des directions, donc l'angle (G_1m_1, G'_1m_1) est opposé, à $k\pi$ près, à l'angle $(AM_1, A'M_1)$. Ces droites AM_1 et $A'M_1$ sont rectangulaires puisque AA′ est diamètre de (C). Donc G_1m_1 et G'_1m_1 sont aussi rectangulaires. Autrement dit le cercle décrit sur $G_1G'_1$ comme diamètre contient m_1.

En répétant un raisonnement analogue où m'_1 et M'_1 remplacent respectivement m_1 et M_1 on montre que le cercle décrit sur $G_1G'_1$ comme diamètre contient m'_1.

Soit (K) ce cercle de diamètre $G_1G'_1$; il est tangent en G_1 à AG_1 et en G'_1 à $A'G'_1$. Considérons le cercle (A) de centre A et de rayon AG_1 et le cercle (A′) de centre A′ et de rayon $A'G'_1$. $G_1G'_1$ est une tangente commune à ces cercles (A) et (A′). Le cercle (K) est un cercle orthogonal à (A) et (A′) qui rencontre en m_1, m'_1 leur ligne des centres AA′ : *les points m_1 et m'_1 sont donc les points de Poncelet du système des deux cercles* (A), (A′).

Ceci permet un nouveau calcul de AG_1 et $A'G'_1$:

$$\overline{AG_1}^2 = Am_1.Am'_1 \qquad \overline{A'G'_1}^2 = A'm_1.A'm'_1.$$

Supposons $\overline{H_1m_1} = +\frac{d}{2}$.

Or $\overline{Am_1} = \overline{AH_1} + \frac{d}{2}$ $\overline{Am'_1} = \overline{AH_1} - \frac{d}{2}$ $\overline{A'm_1} = \overline{A'H_1} + \frac{d}{2}$ $\overline{A'm'_1} = \overline{A'H_1} - \frac{d}{2}$

donc $\overline{H_1m'_1} = -\frac{d}{2}$.

$$\overline{AG_1}^2 = \overline{AH_1}^2 - \frac{d^2}{4} = (r-a)^2 - \frac{d^2}{4} \qquad \overline{A'G'_1}^2 = \overline{A'H_1}^2 - \frac{d^2}{4} = (r+a)^2 - \frac{d^2}{4}$$

suppose $\overline{OH_1} = +r$ (pour fixer les idées).

Enfin : si MM′ est de première espèce, A et A′ sont de part et d'autre de $M_1M'_1$ qui est une tangente commune intérieure à (R) et (A′). La distance OP_1 du milieu O de AA′ à la droite $M_1M'_1$ est la demi-différence des distances de A et A′ à cette droite : ce qui donne ρ, puisque $OP = OP_1$,

$$\rho = \left|\frac{1}{2}\left[\sqrt{(a-r)^2 - \frac{d^2}{4}} - \sqrt{(a+r)^2 - \frac{d^2}{4}}\right]\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(a+r)^2 - \frac{d^2}{4}} - \sqrt{(a-r)^2 - \frac{d^2}{4}}\right)$$

Si MM′ est de deuxième espèce, $M_1M'_1$ est une tangente commune extérieure à (A) et (A′). OP_1 est la demi-somme de AG_1 et $A'G'_1$ et dans ce cas

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(a+r)^2 - \frac{d^2}{4}} + \sqrt{(a-r)^2 - \frac{d^2}{4}}\right)$$

On vient de redémontrer la formule (2).

Si MM′ est de troisième espèce, $AG_1 = 0$, $(a-r)^2 = \frac{d^2}{4}$, mais la formule subsiste, (ε quelconque). Le calcul fait a supposé $\overline{OH_1} = +r$. Dans le cas où $\overline{OH_1} = -r$, le calcul est semblable, les radicaux s'échangent entre eux, les résultats restent les mêmes, ρ étant une valeur absolue. Seulement il peut arriver que $A'G'_1$ soit nul, résultat inchangé encore dans ce cas :

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(a+r)^2 - (a-r)^2}\right) = \sqrt{ar}.$$

4° Les rayons OM, OM′ forment avec OP le même angle u $\left(0 < u < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\rho = OP = a\cos u \quad PM = a\sin u.$$

L'aire σ_1 du segment de cercle compris entre la corde MM′ et le cercle (C), et n'excédant pas un demi-cercle, est la différence entre l'aire du secteur circulaire de même arc $\overline{MM'}$ et l'aire du triangle isocèle MOM′

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\, a^2.\, 2u - \frac{1}{2}\, a^2 \sin 2u = a^2\,[u - \sin u\, \cos u].$$

Evaluons l'aire σ_2 du secteur mixtiligne limité par les segments FM, FM′ et l'arc $\overline{MM'}$ du segment de cercle. En considérant deux cas de figure, on voit que
$\sigma_2 = \sigma_1 +$ aire triangle MFM′ quand F et O sont du même côté de la droite MM′ et que
$\sigma_2 = \sigma_1 -$ aire triangle MFM′ quand F et O sont de part et d'autre de MM′.

On a trouvé pour $\overline{FG}$ (sens positif de $\overrightarrow{OP}$) $\overline{FG} = \rho - a\,\frac{\sin\theta l}{\rho} = a\left[\cos u - \frac{l\sin\theta}{\cos u}\right]$

L'aire du triangle MFM′ est $\frac{MM'}{2} \times FG$. Dans le premier cas de figure $\overline{FG}$ est du signe de $\overline{OP}$, soit positif, donc $FG = +\overline{FG}$. Dans le second cas $\overline{FG}$ est du signe de $-\overline{OP}$, soit négatif, donc $FG = -\overline{FG}$.

Finalement, dans les deux cas $\sigma_2 = \sigma_1 + \frac{1}{2}\, MM' a\left[\cos u - \frac{l\sin\theta}{\cos u}\right]$.

$$\sigma_2 = a^2 u - al\sin\theta\,\mathrm{tg}\,u,$$

$$\sigma_2 = a^2\left[u - \frac{l\sin\theta}{a}\,\mathrm{tg}\,u\right].$$

III^e PARTIE. — Considérons ici une orbite elliptique autour du foyer attirant F. On appelle O son centre, A et A′ ses sommets de grand axe, en supposant $\overrightarrow{OA}$ de même sens que $\overrightarrow{OF}$; (R) le plan de cette ellipse (E), a la mesure de son demi-grand axe, e son excentricité ($0 < e < 1$). L'ellipse a un second foyer F′ supposé distinct de F. En orientant A′A dans le sens $x'x$ du vecteur $\overrightarrow{OA}$ les abscisses de A, A′, F, F′ sont respectivement a, $-a$, ae, $-ae$.

b étant le demi-grand axe et c la demi-distance focale de (E), on sait que l'ellipse (E) peut être regardée comme la projection orthogonale sur son plan (R) d'un cercle (C) ayant AA′ comme diamètre, choisi entre deux, une fois pour toutes, et que

l'angle θ du plan (Q) du cercle avec (R) est tel que $\cos\theta = \frac{b}{a}$. D'où $\sin\theta = \frac{c}{a}$, puisque $a^2 = b^2 + c^2$. Donc $\sin\theta = e$. Nous sommes amenés à reconstituer ainsi les données fixes du 1 de la 1re partie du problème.

(E) étant envisagée comme la trajectoire d'un mobile (planète, comète ou satellite) dans un mouvement ($\mathcal{M}$) déterminé, satisfaisant aux lois de Képler, soient m, m' deux positions successives distinctes de ce mobile.

Les points m, m' de (E) sont les projections orthogonales des points M et M' de (C). La notion d'espèce de la corde mm' de l'ellipse se définit à partir de l'espèce de la corde MM' sur (C), les points F et F' utilisés à cet effet dans (II, 2°) étant les foyers de l'ellipse. En clair, mm' est de première espèce si la droite mm' traverse le segment FF', de deuxième espèce, si F et F' sont de même côté de la droite mm', de troisième espèce si cette droite mm' passe par F ou F'.

Appelons encore P le milieu de MM', H la projection orthogonale de P sur AA' et p le milieu de mm', projection de P sur le plan (R) ; la droite pH est perpendiculaire en H à AA' (théorème des trois perpendiculaires), donc parallèle à la directrice de (E) relative au foyer F. La distance de p à cette directrice est d'une part $\frac{a^2}{c} - \overline{OH}$; d'autre part c'est la demi-somme des distances de m et m' à cette directrice, qui sont les produits par $\frac{1}{e}$ des rayons vecteurs focaux Fm et Fm'.

$$\text{Donc } \frac{1}{e}\left[Fm + Fm'\right] = 2\left[\frac{a^2}{c} - \overline{OH}\right] = 2\left[\frac{a}{e} - l\right]$$

En posant avec l'énoncé $Fm + Fm' = s$ on voit que $s = 2(a - el)$ (3)

Il y a proportionnalité entre les aires balayées par le rayon vecteur du mobile et les durées ; d'autre part, l'aire balayée entre les positions mm' est proportionnelle à l'aire mixtiligne σ_2 dont mfm' est la projection orthogonale sur le plan (R). Appelons Δt le temps mis par le mobile pour balayer l'arc mm' d'ellipse inférieur au demi-périmètre de (E). Δt est proportionnel à σ_2. Pour une demi-ellipse balayée, projection d'un demi-cercle de (C), la durée est la demi-période T du mouvement ($\mathcal{M}$). Donc

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\sigma_2}{\pi a^2}$$

D'après le dernier résultat de (II, 4°) où l'on remplace $l\sin\theta$ par sa valeur r' ($r = |r'|$) $\operatorname{sgn} r' = \operatorname{sgn} l$,

$$\Delta t = T\frac{1}{\pi}\left[u - \frac{l\sin\theta}{a}\,tg\,u\right] = \frac{T}{\pi}\left[u - \frac{r'}{a}\,tg\,u\right]$$

La longueur d de la corde mm' projection orthogonale de MM' sur le plan (R) a été calculée dans I

(1) $\qquad \frac{d^2}{4} = \frac{(a^2 - \rho^2)(\rho^2 - r^2)}{\rho^2}$ dans laquelle $\rho = OP = a\cos u \quad r = |r'|$

De (3) on tire $el = a - \frac{s}{2}$ ou $r' = a - \frac{s}{2}$ donc $\Delta t = \frac{T}{\pi}\left[u - \left(1 - \frac{s}{2a}\right)tg\,u\right]$

Pour utiliser u tel que $\cos u = \rho$ revenons à la formule irrationnelle

$$\rho = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(a+r)^2 - \frac{d^2}{4}} + \varepsilon\sqrt{(a-r)^2 - \frac{d^2}{4}}\right]$$

où $\varepsilon = -1$ si mm' est de première espèce, $\varepsilon = +1$ si mm' est de deuxième espèce. Supposons qu'on connaisse par des mesures a, s, d, on peut en déduire Δt par les

calculs suivants, à condition de connaître aussi ε, c'est-à-dire l'espèce de la corde mm' :

évaluer $r' = a - \frac{s}{2}$, puis $r = |r'|$,

puis u par $a \cos u = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(a+r)^2 - \frac{d^2}{4}} + \varepsilon \sqrt{(a-r)^2 - \frac{d^2}{4}}\right]$ $\quad 0 < u < \frac{\pi}{2}$

on peut remarquer que $a + r = 2a - \frac{s}{2}$ $\quad a - r = \frac{s}{2}$,

$$\text{si } a > \frac{s}{2} \quad r = r',$$

au contraire si $\quad a < \frac{s}{2} \quad r = -r' \quad a + r = \frac{s}{2} \quad a - r = 2a - \frac{s}{2}$.

Enfin $\qquad \Delta t = \frac{T}{\pi}\left[u - \frac{r'}{a} tg\, u\right]$

Ces calculs sont fort simples.

Théorème de Lambert. — Comparons deux mouvements $(\mathcal{M})$ sur des orbites *ayant même longueur de grand axe*, et les temps mis par les mobiles respectifs à parcourir les arcs $\overline{mm'}$, $\overline{nn'}$ de ces deux orbites. Les durées de révolution T sont les mêmes pour les deux mouvements d'après la troisième loi de Képler.

Si, en outre, on suppose les cordes mm', nn' telles que

$$\text{corde } mm' = \text{corde } nn' \qquad Fm + Fm' = Fn + Fn'$$

et si elles sont de même espèce dans les deux orbites, les calculs sont exactement les mêmes de part et d'autre : même r', même u, enfin même Δt.

Donc les mobiles de ces mouvements parcourent les arcs elliptiques $\overset{\frown}{mm'}$, $\overset{\frown}{nn'}$ correspondants dans des temps égaux.

Ce qu'il y a de remarquable, c'est que l'influence de l'excentricité de l'orbite ne se fait pas sentir, Lambert est amené à comparer le mouvement général avec celui où l'ellipse est aplatie selon un segment de droite (Lambert : *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik*, Berlin, 1765-1772).

Une corde mm' est de troisième espèce, soit si elle passe par le foyer F et alors $s = d$, soit si elle passe par le foyer F' et alors $s = 4a - d$

$$(\text{car } MF + MF' = M'F + M'F' = 2a).$$

Il semble que la partie algébrique du problème n'ait pas beaucoup embarrassé les concurrents. Toutefois, après avoir retrouvé la formule (1), nombreux sont ceux qui n'ont pas soupçonné l'avantage qu'il y a pour discuter le problème à résoudre cette équation par rapport à $\frac{d^2}{4}$, pris comme paramètre de discussion, et se sont référés à une équation du second degré en $\rho^2 = X$.

En général, on a résolu cette équation par la formule classique donnant les racines d'une équation du second degré. Il est heureux pour les candidats que l'énoncé donnait le résultat sous forme irrationnelle, on se demande si, d'eux-mêmes, ils l'auraient découvert. Sur ce point, beaucoup ont en somme effectué plutôt une vérification qu'une démonstration. Ce qui est peu satisfaisant alors, c'est le rattachement de ε de la formule (2) à la notion d'espèce.

Souvent cette résolution précède la discussion du problème $(\mathcal{P})$.

Le calcul de $\overline{FG}$, $\overline{F'G'}$ est présenté comme une conséquence de l'emploi de triangles semblables, mais est peu concluant sur le point de savoir si les résultats obtenus sont généraux. De même pour $\overline{AG_1}$, $\overline{A'G'_1}$.

La construction géométrique semble, dans beaucoup de copies, avoir été bien comprise, mais l'étude des cercles (A) et (A'), avec leurs points limites, a généralement arrêté les concurrents.

Quant à la III[e] partie, elle n'est pas abordée dans la majorité des copies, sinon pour affirmer des détails évidents. En n'étalonnant pas pour la correction une série de questions précises dans cette partie, qui se bornait à guider et fixer un but à la recherche, on s'était proposé de juger ceux qui, ayant constamment remarqué que l et θ n'intervenaient que par le produit $l \sin\theta$, auraient pu en tirer des conséquences.

La proportionnalité entre la durée Δt et l'aire σ_2 de la figure du cercle dans le plan (Q) a été signalé dans une bonne copie.

Ce fut donc, pour cette partie, un insuccès presque total. Il ne faut pas croire que le fait que l'Astronomie, dans certains cours, puisse être enseignée tardivement dans l'année, ait découragé les concurrents. *Il suffisait de connaître les lois de Képler* que l'énoncé a tenu à rappeler et encore la troisième n'intervenait que sous sa forme la plus qualitative : *la durée de révolution* T *ne dépend que de la longueur du grand axe de l'orbite a.*

Une erreur regrettable dans la distribution des enveloppes de sujets aux centres de composition put heureusement être corrigée à temps : le carré T^2 est proportionnel au cube a^3 : il n'est pas inversemuent proportionnel à a^3. T est fonction croissante de a, comme chacun sait.

La méthode suivie dans ce problème permet de trouver les lois des accélérations et des vitesses du mouvement newtonien, en n'utilisant, bien entendu, que les lois de Képler. Le théorème des forces vives, par une anomalie que d'aucuns regretteront, est au programme de physique, mais non au programme de Mathématiques de la classe, et il nous faut nous passer de lui ici.

La formule donnant d^2 fait connaître en somme la longueur de la corde mm' de l'arc parcouru pendant le temps Δt. En ayant recours à la notion de vitesse moyenne du mouvement de t à $t + \Delta t$, on peut considérer le rapport d'infiniment petits corde mm' et Δt pour en déduire sa limite quand Δt tend vers o. Il n'y a là rien qui présente quelque difficulté : il est visible que ρ a pour limite $a - Fm$. On en déduit une expression de la vitesse à l'instant t, contenant la longueur Fm du rayon vecteur et la durée de révolution T du mouvement

$$v^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} \frac{(2a - Fm)}{Fm}.$$

D'après la troisième loi de Képler $\frac{a^3}{T^2}$ est une constante pour tous les mouvements $(\mathcal{M})$.

Remarque : On démontre avec Newton que

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{4\pi^2}{G.M}$$

G constante de la gravitation universelle,
M masse du corps attirant le mobile et placé en F.

La formule de la vitesse est

$$v = \frac{2\pi a}{T} \sqrt{\frac{F'm}{Fm}}$$

Or la distance FJ du foyer à la tangente en M a pour valeur $Fm \sin \widehat{JmF}$ et le produit $Fm.F'm \sin^2 \widehat{JmF} = b^2$ d'où $\sin \widehat{JmF} = \frac{b}{\sqrt{Fm.Fm'}}$ $FJ = b\sqrt{\frac{Fm}{Fm'}}$

$v \times FJ = \frac{2\pi ab}{T} = C^{te}$.

Par un raisonnement classique, l'hodographe du mouvement est semblable, au lieu géométrique de J, qui est le cercle directeur de l'ellipse : on en déduit les accélérations $\vec{\gamma}$ et on peut retrouver la formule

$$\gamma = + \frac{MG}{Fm^2} \vec{\gamma} \text{ étant situé sur } \overrightarrow{mF}.$$

Nous signalons ici ce tour d'horizon théorique non sans faire toutes réserves sur son emploi et les difficultés qu'il pourrait rencontrer dans les classes. Entre deux démarches d'esprit, pour enseigner une théorie, il est fréquent qu'on doive préférer celle qui a pour elle la tradition, tout simplement parce que les réactions des élèves sont ou semblent mieux connues qu'avec une exposition toute nouvelle. Ils commettent facilement des erreurs en s'aventurant sur un terrain nouveau : ainsi, certains concurrents ont affirmé à la légère que le mouvement elliptique képlérien provenait de la projection sur un plan d'un mouvement circulaire uniforme ! Cela dénote un manque de maturité (ou un sujet placé un peu trop haut).

194 élèves de la classe de Mathématiques ont pris part à ce concours. Le Jury a tenu sa première réunion le 16 mai et y a rendu compte d'une première lecture des copies. Il a décidé de retenir pour une étude plus complète très soigneusement pourvue d'un barème d'étalonnage seize copies, parmi lesquelles toutes celles qui avaient abordé la III[e] partie.

Dans la réunion finale du Jury, le 23 mai, il fut procédé à l'établissement du palmarès de l'épreuve : trois prix et neuf accessits. Le premier prix dominait largement (18,4 sur 20) ; le second et le troisième prix (15 et 13,75) sont inférieurs de forme et de distinction au précédent, mais témoignent d'un effort très estimable.

Il a été décerné des accessits de 13,3 à 10,4, dont les 2[e] et 7[e] accessits réunissent chacun deux *ex-æquo*.

Somme toute, le concours est satisfaisant. Comme d'habitude on retrouve dans la liste des lauréats le titulaire du premier prix du concours de Physique et des lauréats du concours de 1957 en classe de Première. Le premier prix de 1957 obtint cette année le second prix ; le premier accessit de 1957 eut le troisième prix ; le troisième accessit de 1957 s'est classé 9[e] accessit en 1958.

L'habitude de dessiner des figures d'ensemble en perspective, contre laquelle nous nous étions élevé l'an dernier, sévit encore un peu, bien que les raisonnements préliminaires ont été généralement suivis avec facilité sur de simples figures planes. L'emploi de procédés algébriques ne constitue-t-il pas une dérogation, en lui-même, à la hantise du visuel ? on semble l'avoir définitivement compris.

L'Inspecteur général honoraire, président du Jury.
P. ROBERT.

29 novembre 1957.

CONCOURS DE FONTENAY 1958

Rapport sur la 1re composition de Mathématiques (Option Mathématiques)

Répartition des notes des 108 copies corrigées et cotées de 0 a 60

Les notes correspondant à la valeur intrinsèque des compositions se répartissent entre 0 et 56 de façon régulière, sauf deux zones d'accumulation : quinze notes entre 25 et 30, trente-trois notes entre 12 et 19.

Ces notes primitives ont été légèrement relevées de façon à avoir 40 copies au-dessus de la moyenne ; ceci a conduit à attribuer la note 60 à la meilleure copie.

Voici la répartition des notes définitives :

neuf notes entre 50 et 60, douze entre 39 et 47, dix-neuf entre 30 et 36, dix-huit entre 23 et 27, quatorze entre 17 et 20, dix-neuf entre 13 et 16, onze entre 7 et 10, cinq entre 4 et 6, une note 1.

Observations générales

Le problème proposé était un problème très classique d'analyse, comportant l'étude de fonctions, l'étude d'une suite, et un petit calcul d'aire.

Aucune question ne présentait de difficultés au départ, de sorte que la grande majorité des candidates a pu les aborder toutes, et une bonne moitié d'entre elles a raisonné correctement. Les résultats de l'épreuve sont supérieurs à tous ceux des dernières années.

Il faut tout de même noter qu'un trop grand nombre de candidates (espérons que ce sont celles qui n'ont qu'un an de préparation) ignorent ou ont mal compris leur cours d'analyse et les propriétés fondamentales des fonctions exponentielle et logarithmique. Beaucoup d'entre elles croient que leurs démonstrations d'analyse paraîtront d'autant plus rigoureuses qu'elles seront plus longues, qu'elles introduiront un nombre impressionnant de « ε » et une imposante suite d'inégalités.

La définition même d'infiniment petits ou grands équivalents n'est pas sue. On ignore que, pour étudier une somme d'infiniment grands, le premier soin doit être de rechercher s'il n'existe pas un terme de la somme, d'ordre supérieur à tous les autres. Aussi, dans beaucoup de copies, on propose comme équivalent le plus simple d'une fonction pour x tendant vers $-\infty$, l'expression $e^{-x} + \operatorname{Log}|x|$; on n'ose pas remplacer $\operatorname{Log}|1+x|$ par $\operatorname{Log}|x|$ pour les grandes valeurs de x (par contre certaines confondent avec le cas où x tend vers zéro et décrètent que $\operatorname{Log}(1+x)$ est équivalent à x). Faute plus grave, on se figure qu'un infiniment grand équivalent fournit un infiniment grand asymptote. On ne comprend pas que la connaissance des infiniments grands équivalents donnait tous les renseignements pour les directions asymptotiques et on recommence, à quelques lignes d'intervalle, les mêmes calculs et raisonnements en partant, cette fois-ci, de la traditionnelle limite de $\frac{y}{x}$.

L'origine de la plupart des autres erreurs fut l'abus des résolutions graphiques des équations, en particulier pour trouver les zéros des dérivées première et seconde. Dans le cas du problème on peut ne jamais les utiliser. Les candidates doivent savoir que dans un très grand nombre de figures, on ne peut pas conclure, car le nombre de points communs aux courbes tracées reste ambigu. C'est en particulier le cas pour

(1) Voir les énoncés *Bulletin 193*, page 467.

deux branches paraboliques de même direction asymptotique ou deux arcs de courbe ayant même asymptote ; beaucoup croient que l'étude précise de la disposition des arcs à l'infini permet de conclure pour les parties à distance finie.

La méthode graphique devient en général correcte si l'une des courbes est une droite ; quelques candidates ont su l'utiliser, tandis que les autres mettent une équation sous la forme $f(x) = g(x)$ sans y apporter la moindre réflexion. Par exemple, pour trouver les zéros de $y' = \frac{1}{1+x} - e^{-x}$ elles écrivent $e^{-x} = \frac{1}{x+1}$ au lieu de $e^{x} = 1 + x$!!!

Méthodes et résultats sont encore plus pitoyables avec la dérivée seconde qui s'annule pour $e^{-x} = \frac{1}{(1+x)^2}$; on pouvait écrire $(1+x)^2 = e^{x}$, mais le tracé des courbes ne permettait pas de conclure ; certaines ont pensé à prendre les logarithmes, ce qui leur donne $\mathrm{Log}\,(1+x) = \frac{x}{2}$ et un graphique permettant de conclure avec précision.

Dans le cas du problème, toutes ces méthodes graphiques longues et imprécises sont évitables. Par exemple, dans la partie II, un peu plus délicate par suite de l'introduction d'un paramètre λ, la dérivée seconde est du signe de

$$u = e^{-\lambda x}\,(1+x)^2 - \frac{1}{\lambda^2}$$

il suffit de calculer $u' = e^{-\lambda x}(1+x)\,[2 - \lambda\,(1+x)]$ pour avoir en évidence dans le tableau de variations de u, le signe de cette expression.

Remarques particulières relatives aux diverses parties du problème

1° du § I. — Un trop grand nombre de candidates ignorent encore la dérivée de $\mathrm{Log}\,|1+x|$ et distinguent deux cas en écrivant $\frac{1}{1+x}$ ou $\frac{1}{|1+x|}$; chose curieuse, en dérivant à nouveau, ε disparaît ???

On apporte peu de soin à la mise en place de la courbe représentative, on ne compare pas la position du point de rencontre avec Ox (autre que O), et du point d'inflexion de cette branche ; les pentes des tangentes d'inflexion sont tellement inexactes que les candidates introduisent de nouveaux points d'inflexion sans même s'en apercevoir.

2° du § I. — L'énoncé guidant les candidates de façon précise, l'étude de la suite a été satisfaisante dans beaucoup de copies. On relève toutefois un lot important de maladresses ou fautes de raisonnement.

Pour démontrer que $1 - u_{2p+1} < u_{2p} - 1$ et $u_{2p+2} - 1 > 1 - u_{2p+1}$ on recommence inutilement deux fois le même raisonnement ou bien l'on fait inutilement deux figures, sans s'apercevoir que l'une des inégalités est une conséquence immédiate de l'autre, ou que toutes les deux reviennent à comparer e^{x} et $1+x$. A signaler une énormité rencontrée trop souvent : de $u_{2p} > 1$ et $1 > u_{2p+1}$ on tire $u_{2p} - 1 > 1 - u_{2p+1}$.

Pour démontrer que les deux suites u_{2p} et u_{2p+1} sont adjacentes, c'est-à-dire que $u_{2p} - e^{1-u_{2p}}$ peut être rendu arbitrairement petit, on pose $u_{2p} = 1 + h$, et on décrète que h peut devenir aussi petit que l'on veut, sans s'apercevoir que cela revient à admettre que la limite de u^{2p} est 1, résultat que l'on s'efforce justement de démontrer.

D'autres candidates, pour démontrer que les deux limites L et L' sont égales, se contentent de voir qu'elles sont solutions de la même équation, comme si une équation n'avait jamais qu'une seule solution !!!

1° et 2° du § II. — La discussion demandée n'exige que soin et méthode ; la plupart des candidates ont cru malheureusement justifier leurs résultats par des procédés graphiques qui ne le permettent pas.

On oublie d'examiner les cas limites souvent bien utiles. De même, il aurait été intéressant d'étudier la fonction à l'origine, de faire un développement limité, de voir ainsi le cas où l'origine est un point inflexionnel et de vérifier ainsi des résultats de la discussion générale. Trop peu pensent à voir comment se placent les courbes les unes par rapport aux autres, et quels sont leurs seuls points communs possibles.

3° du § II. — Il est abusif de donner la primitive de $(1 + x)\ \mathrm{Log}\,(1 + x)$ comme si cela était un résultat bien connu qu'il est inutile de justifier. Par contre, on peut savoir que $(x + 1)\ \mathrm{Log}\,(1 + x)$ tend vers 0 quand x tend vers (-1) et ne pas le justifier maladroitement tout le long d'une demi-page. Il n'est pas nécessaire d'utiliser les développements limités pour démontrer la continuité de $\dfrac{e^{\lambda} - 1}{\lambda}$ pour $\lambda = 0$.

A. Perrichet.

Rapport sur la composition de Mathématiques (Option sciences naturelles)

Répartition des notes des 88 copies corrigées et cotées de 0 a 40

Cinq notes entre 30 et 37, dix-neuf entre 25 et 28, vingt-trois entre 20 et 24, treize entre 17 et 19, neuf entre 14 et 16, huit entre 10 et 13, six entre 7 et 9, cinq entre 3 et 6.

Les notes correspondent ici à la valeur intrinsèque des compositions, et les résultats sont nettement supérieurs à ceux des années précédentes, puisque plus de la moitié des candidates ont une note supérieure à la moyenne.

Observations générales

Le problème assez facile et ne demandant qu'une bonne utilisation des connaissances du cours explique ces résultats satisfaisants.

1) La maladresse habituelle des calculs est moins sensible que les autres années, du moins dans les trois premières parties du problème où il était difficile de les compliquer outre mesure. Elle réapparaît dans la quatrième partie, où l'on demande un développement limité, les candidates n'ont pas su éviter une division assez pénible, oubliant d'employer les exposants négatifs et de remplacer $\dfrac{1}{(1 + \varepsilon)^k}$ par $(1 + \varepsilon)^{-k}$. A ce propos, que d'écritures inutiles, de calculs mal disposés et presque toujours faux ; comme par hasard on trouve exactement les coefficients indiqués dans l'énoncé (même si les expressions écrites ne permettent pas de les justifier), alors que tous les suivants sont inexacts.

2) La rigueur de l'exposé n'est pas suffisante dans beaucoup de copies. On se contente d'affirmer certains résultats au lieu de les justifier, ce qui est inadmissible, même si les conclusions paraissent simples ou immédiates ; en particulier un tableau de variations est un résumé, mais il ne peut servir de justification. D'autres fois, on trouve des explications pour des cas où elles ne sont pas nécessaires ; par exemple, dans l'étude de l'expression $\dfrac{\mathrm{Log}\,x - x}{x}$ pour x tendant vers zéro, on commence par dire que $\dfrac{\mathrm{Log}\,x}{x}$ est une forme indéterminée !!!, puis on invoque le fameux précepte : « Le nombre l'emporte sur le logarithme » pour conclure que la limite est infinie.

Il faut noter aussi l'abus des résolutions graphiques qui, très souvent, ne peuvent être rigoureuses ; on oublie qu'une dérivation peut débarrasser une équation d'un logarithme gênant. Pour une des fonctions du problème le signe de la dérivée est celui de $2(1-x) - \operatorname{Log} x$. En l'écrivant $2(1-x) + (-\log x)$, on voit que pour $x < 1$ on a une somme de deux termes positifs et que pour $x > 1$ on a une somme de deux termes négatifs ; une simple observation de bon sens évite donc ici des constructions graphiques ou des calculs, et montre que $x = 1$ est le seul zéro de la dérivée, résultat non vu dans un très grand nombre de copies.

OBSERVATIONS PARTICULIÈRES CONCERNANT LES DIVERSES PARTIES DU PROBLÈME

1re partie. — La faute grave la plus courante est l'oubli de la constante d'intégration ; parmi les candidates qui introduisent cette constante beaucoup omettent de la déterminer pour que la courbe intégrale passe par le point A de coordonnées 1 et — 1.

Beaucoup ne semblent pas à l'aise dans le maniement des fonctions exponentielle et logarithmique; on ne reconnaît pas la fonction puissance dans $e^{-K \operatorname{Log}|x|}$; on écrit $-K \operatorname{Log}|x| = \operatorname{Log} \sqrt[k]{\frac{1}{|x|}}$.

2e Partie. — La plupart des candidates sont bien entraînées à l'étude d'une variation de fonctions et à la construction de la courbe représentative. Toutefois, l'étude des branches infinies est souvent incomplète ou incorrecte. Après avoir trouvé que y tend vers $-\infty$ quand $x \to 0$, on cherche la direction asymptotique pour $x \to 0$?? Par contre, on oublie de chercher cette direction asymptotique quand $x \to +\infty$, ou bien on refait dans ce but une suite de calculs bien inutiles ; en effet, l'expression de la fonction donnait $y + \sqrt{x} = \frac{\operatorname{Log}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, donc $y + \sqrt{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$ et par suite la demi-parabole $y = -\sqrt{x}$ est un arc de courbe asymptote pour la courbe étudiée.

Une faute grave a été commise dans le calcul de la dérivée seconde pour la fonction correspondant à $K = \frac{1}{2}$. Pour éviter les radicaux, certaines candidates posent $x = u^2$. Pour le sens de variation on peut utiliser y'_u puisque $y'_x = y'_u \times u_x$ (avec u'_x positif), mais on ne peut obtenir les points d'inflexion en cherchant les zéros de y''_{u^2} !!!

On n'apporte pas toujours assez de soin à la construction des courbes ; on oublie en particulier qu'elles passent par le point A (1, — 1) et on ne place pas les points d'inflexion avec assez de précision.

3e Partie. — Pour le calcul d'aire, il est vraiment peu habile de prendre $\int x\,dy$ ou $\frac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx)$ alors que l'on a une expression simple de y en fonction de x.

4e Partie. — Pour le développement, il fallait éviter la division et faire le produit du développement de $K \operatorname{Log}(1+\varepsilon) - (1+\varepsilon)$ par celui de $(1+\varepsilon)^{-k}$.

Il est nécessaire d'aller jusqu'au terme en ε^4 inclus, si l'on veut vraiment placer la parabole par rapport à la courbe dans le cas où le coefficient de ε^3 est nul ; il faut en effet s'assurer que celui de ε^4 ne s'annule pas en même temps que celui de ε^3.

Beaucoup de candidates ne savent pas utiliser le développement limité pour dégager la parabole osculatrice et la placer par rapport à la courbe.

A. PERRICHET.

VI. BIBLIOGRAPHIE

1. Ouvrages reçus

— R. CLUZEL et J.-P. ROBERT : *Mathématiques, classe de Troisième des Ecoles nationales professionnelles, collèges techniques, collèges modernes* (Bibliothèque de l'Enseignement scientifique, Delagrave).

— R. CAHEN : *Mathématiques, classe de Sixième* (Cours R. Maillard, Hachette).

— R. GIRARD et P.-M. FOURNIER : *Initiation aux Mathématiques, classe de Sixième des lycées, collèges, cours complémentaires* (Cours Marvillet, A. Colin).

2. A travers les Revues

— *L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE* (juillet-septembre 1958) : G. VALIRON : Fonctions entières d'ordre fini et fonctions méromorphes. — J.-E. HOFMANN : La géométrie élémentaire du triangle dans le plan complexe. — W. SIERPINSKI : Sur les nombres premiers de la forme $n^n + 1$. — Commission Internationale de l'Enseignement mathématique (C.I.E.M.) : Informations sur le Congrès d'Edimbourg (les rapports seront publiés ultérieurement). L'exposition d'ouvrages d'enseignement des Mathématiques a été organisée par notre Institut pédagogique national de la rue d'Ulm, auquel ont été confiées toutes les collections présentées, de même que celles qui l'avaient été à Amsterdam en 1954.

Le Comité de la C.I.E.M. propose l'étude, pendant la période 1959-62, des questions suivantes :

1° Etude des différents types d'examens, et, notamment, des examens donnant accès à l'Enseignement Supérieur.

2° Quelles sont les questions de « Mathématiques modernes » et quelles sont les applications des « Mathématiques modernes » qui peuvent trouver place dans les programmes de l'Enseignement Secondaire ?

3° Etude comparée des méthodes d'enseignement employées pour le passage de l'arithmétique à l'algèbre.

— *CHIFFRES* (Revue de l'Association Française de Calcul), n° 1 (mars 1958) : E. DURAND : Sur les solutions numériques de l'équation de Poisson. — F. GENUYS : Dix mille décimales de M. — J.-C. HERZ : Sur la démonstration du théorème de réduction de Wielandt dans le cas fini. — J. HEURTAUX : Tables de polynômes d'interpolation avec seulement deux abscisses distinctes. — J. KUNTZMANN : Etude de représentations approchées dans le cas de deux variables.

N° 2 (juin 1958) : G. DADY : Le calcul électronique apporte une optique nouvelle sur un problème ancien : la prévision météorologique. — M. FEIX, C. SAJABOLI et J. KUNTZMANN : Une variante de la méthode de Tricomi-Picone pour l'inversion de la transformation de Carson. — P. MONTAGNE : Méthodes de vérification par les caractères simples de divisibilité (application aux tables de puissances). — I. SAMUEL : Calcul des mineurs non diagonaux.

— *L'ASTRONOMIE* (Bulletin de la Société Astronomique de France) (juillet-août 1958) : F. ZWICKY : Les premiers spectres obtenus de la matière brillante intergalactique. — C. BERTAUD : Les étoiles à enveloppe. — A. PÉRARD : Les progrès récents de l'astronomie.

Septembre 1958 : J. BECQUEREL : L'expansion de l'univers et les théories cosmologiques. — J.-M. SAURER : Les amas globulaires.

Octobre 1958 : A. DANJON : Allocution prononcée à l'ouverture de la 10e assemblée générale de l'Union astronomique internationale. — J. BECQUEREL : L'expansion de l'Univers et les théories cosmologiques (fin).

— *CAHIERS PEDAGOGIQUES :* Cahier d'octobre 1958 : L'Enseignement de la physique, I (le numéro de décembre sera consacré au même sujet). — Cahier de novembre 1958 : consacré en partie à l'initiation aux Mathématiques (le concret, l'incompréhension, critique de certaines méthodes).

3. Comptes rendus

J. MALENGREAU : Etude des écritures binaires au moyen de la machine à calculer dénommée le Factorisant, Bibliothèque Scientifique, Editions du Griffon, Neuchâtel (Suisse), 1958 (broché, 20 fr. suisses).

Les fervents de la Théorie des nombres accueilleront avec joie la parution de cet ouvrage de M. J. MALENGREAU, ingénieur civil des Mines, connu déjà pour ses publications ayant trait aux fondements des Mathématiques et à la Théorie des nombres. Si, pour bien des ouvrages de Théorie des nombres le lecteur se croit handicapé par l'insuffisance de ses connaissances mathématiques, il peut aborder sans une telle appréhension l'étude de cet ouvrage accessible à toute personne ayant une culture mathématique du niveau du secondaire.

Il est issu de l'étude systématique des opérations effectuées dans le système binaire par une machine électro-mécanique conçue par l'auteur (et construite par M. E. JANMOULLE), permettant la factorisation de nombres de la forme $2^n \pm 1$ et plus généralement $2^n \pm t$, t étant un nombre impair. Un premier modèle fut présenté à l'Exposition d'instruments scientifiques organisée à l'occasion du 3e Congrès National des Sciences à Bruxelles en 1950, un nouveau modèle à plus grande portée au 1er Congrès International de Cybernétique à Namur en 1956.

Nous ne donnerons pas ici une analyse détaillée de cet ouvrage dans lequel on trouve une foule de résultats intéressants, inédits ou connus, obtenus par l'interprétation des figurations réalisées avec cette machine ingénieuse, nous bornant à en présenter un plan d'ensemble tout en insistant sur quelques points saillants.

L'étude des « cycles de résidus » fait l'objet de la première partie. Après la définition des figurations binaires données par la machine, constituées de traits perpendiculaires à une droite repère horizontale tracée, tantôt au-dessus, tantôt en-dessous de celle-ci, l'auteur expose sa méthode de résolution de l'équation $2^\alpha - 1 = py$, extrêmement simple en principe, puisqu'elle consiste à se donner p et à déterminer ensuite y tel que le produit py soit composé dans le système binaire uniquement de chiffres 1 (1). Au cours de la résolution de l'équation précédente, la machine fournit un critère de resolubilité de $2^\alpha + 1 = py$. Elle permet encore de résoudre l'équation $2^x \pm t = py$, t représentant une somme algébrique de puissances de 2 parmi lesquelles figure toujours 2^0, ainsi que l'équation $z.2^x \pm t = py$, z étant un résidu de p. A partir de cette dernière équation l'auteur définit ses cycles de résidus. Il obtient une classification des résidus d'un module p de la manière suivante : h étant l'un des résidus de p, il appelle cycle d'origine h de ce module la suite des résidus de p obtenus par la relation $h \times 2^a \equiv d_a \pmod{p}$

(1) Les méthodes binaires ont été appliquées avec grand succès au criblage dans les machines électroniques grâce à une matrice appelée matrice de criblage. Le problème consiste à trouver les colonnes renfermant uniquement des chiffres 0 ou des chiffres 1. (Cf. Mathematical Tables and Other Aids to Computation, VII, Number 41, *The Sieve Problem for All-Purpose Computers,* D. H. LEHMER, p. 6-14).

où l'exposant prend successivement les valeurs 0, 1, 2, ... jusqu'à ce que le résidu d_a se reproduise. Il établit ensuite le nombre de cycles correspondant à un module donné.

La deuxième partie est consacrée à l'étude des propriétés des cycles de résidus. Y sont étudiés les cycles du premier degré, et parmi les cycles de degré supérieur, tout particulièrement les cycles quadratiques. Cette partie se termine par les cycles exponentiels et les opérations entre cycles de même module et de même degré.

XXIII tableaux numériques répartis sur autant de pages complètent l'ouvrage.

Nous terminerons par quelques remarques.

Certaines indications dans l'Introduction seraient à compléter. Par exemple, aux nombres premiers $2^n - 1$ appelés nombres de Mersenne — ce terme manque — signalés par l'auteur, il faut ajouter ceux obtenus pour les valeurs suivantes de n : 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217. Les résultats pour 2203, 2281 ont été obtenus par M. D.-H. Lehmer, grâce à la machine dénommée SWAC dans l'espace d'une heure pour chacun. Tout récemment, M. H. Riesel, de Stockholm, a démontré la primalité du nombre $2^{3217} - 1$.

Nous ne saurions faire nôtre l'affirmation suivante de l'auteur (p. 68-69) : « Par les cycles, nous nous efforçons d'édifier une théorie des nombres premiers, théorie que nous croyons pouvoir affirmer être restée inexistante jusqu'à ce jour. Nous appelons Théorie des nombres premiers un traité où les propriétés des dits nombres se déduisent l'un de l'autre par la voie qui a fait la célébrité de la géométrie d'Euclide. » Si l'étude des cycles de résidus a permis à l'auteur de mettre en évidence des propriétés classiques des nombres premiers, sa méthode ne semble pas douée d'une puissance lui permettant d'atteindre un but aussi éloigné.

Un Index alphabétique réunissant les notions de base et les termes techniques parmi lesquels figurent de nombreux néologismes, dont l'introduction est inévitable dans un ouvrage d'une originalité indéniable, en aurait facilité la lecture.

Les quelques observations que nous avons présentées ne sauraient en aucune façon diminuer sa valeur. Ajoutons que sa présentation agréable et impeccable fait honneur aux Editions du Griffon.

A. Gloden (*Athénée de Luxembourg*).

M. Cazin et N. Dequoy : **Cours de mécanique pour les classes de préparation aux Grandes Ecoles.** Broché 1 700 F, relié 2 000 F, Gauthier-Villars, 1958.

Le nouveau programme de mécanique des classes de préparation aux Grandes Ecoles se caractérise par l'apparition de la cinématique du solide en mouvement le plus général, et par l'éviction délibérée de toute espèce de question où intervient le frottement.

Il importe de préciser un programme qui reste vague sur bien des points, notamment sur la limitation des connaissances pouvant être exigées à propos du vecteur rotation d'un solide. Les auteurs ont été, sur ce point, guidés par le souci de ne pas participer, dès la publication d'un programme, à un gonflement systématique de son contenu.

Les résultats généraux de cinématique du solide donnent l'occasion d'exposer l'essentiel de la méthode du trièdre mobile. Le vecteur rotation d'un solide est exprimé en fonction des angles d'Euler.

A propos du travail élémentaire s'introduit la notion de composante covariante. Quelques exercices permettent d'aborder des questions relatives à des systèmes triples orthogonaux qui interviennent en physique nucléaire ou dans l'étude des guides d'ondes, et qui facilitent de nombreux exercices actuellement posés aux examens.

Associons-nous au vœu formulé par J.-L. Destouches dans sa préface : que ce livre clair et précis soit, le plus vite possible, complété par un volume d'exercices.

P. I.

R. Godement : **Topologie algébrique et théorie des faisceaux.** A.S.I. 1252, Hermann, 1958, 3 600 F.

L'objet essentiel de ce livre est de fournir un exposé détaillé et autonome de la théorie des faisceaux, instrument indispensable en topologie, et qui a fourni un langage algébrique commode pour formuler certains des résultats les plus profonds de la théorie des variétés analytiques complexes et de la géométrique algébrique.

Pour faciliter la tâche du lecteur, une centaine de pages sont consacrées à un exposé des préliminaires algébriques nécessaires. Cette partie de l'ouvrage pourrait servir d'introduction aux méthodes modernes de la topologie algébrique.

P. I.

A. Lichnerowicz : **Géométrie des groupes de transformations.** « Travaux et recherches mathématiques », Dunod, 1958, 2 800 F, relié.

On sait l'importance, tant en Mathématiques qu'en Physique, de la notion de groupe de transformations d'une variété, due à Sophus Lie. Après avoir exposé une théorie nouvelle de la transformée infinitésimale d'un objet géométrique, l'auteur étudie les groupes de transformation qui respectent une connexion linéaire et les espaces homogènes correspondants.

Ouvrage destiné aux chercheurs qui désirent parvenir, dans ce domaine, à la pointe des résultats de la recherche contemporaine.

P. I.

A. Weil : **Introduction à l'étude des variétés kählériennes.** A.S.I. 1267, Hermann, 2 000 F.

Comme le précédent ouvrage, celui-ci est destiné à conduire le lecteur aux travaux les plus récents, où se rejoignent la topologie, la théorie des équations aux dérivées partielles et la géométrie algébrique.

VII. LA VIE DE L'ASSOCIATION

Comité du 16 octobre 1958

Présents : Mlles BIARD, FÉLIX, MARCHAND, MASSON, VERVAECKE ; MM. CASSÉ, CLUZEL, CROZES, FOUCHÉ, HUISMAN, KLEIN, LE MÉNAGER, MAGNIER, MONJALLON, NICOLAS, SCHAEFFER, SIROS.

Notre Vice-Président DURRANDE vient d'être nommé Inspecteur général de l'Enseignement Technique. Le Comité se félicite de l'honneur mérité qui est ainsi fait à notre collègue, qui, depuis plus de dix ans, participait activement à ses travaux.

Conformément aux statuts, M. DURRANDE sera remplacé au Comité par M. DEMENGEL, professeur agrégé à l'Ecole nationale de Radiotechnique et d'Electricité appliquée.

A l'unanimité, M. MAGNIER est élu Vice-Président à la place de M. DURRANDE.

Les taux de cotisation. — Il y aurait lieu de remanier et uniformiser les divers taux de cotisation, sauf peut-être pour l'étranger (en raison des frais élevés de port). A la demande de notre trésorier NICOLAS, ces modifications seront faites au début du prochain exercice.

Propagande. — Comme les années précédentes, un prospectus résumant l'activité de l'A.P.M. sera envoyé. Il est d'autre part recommandé d'organiser des réunions régionales comme cela se fait, notamment à Lille et Nancy. Cela permettrait de faire connaître l'Association aux jeunes collègues, et de recruter de nouveaux adhérents.

Rapport sur les concours. — Le rapport sur les concours des Grandes Ecoles paraît être tombé en désuétude ces derniers temps. M. MAGNIER pense qu'il s'agit, non seulement de rassembler des textes, mais encore de les étudier et de dégager l'évolution de ces problèmes. Un collègue, chargé d'une Centrale, a été pressenti, mais s'est modestement récusé. Il y aura lieu de solliciter d'autres bonnes volontés.

Conférences de la Société Mathématique. — Nous avons obtenu, grâce aux démarches du Vice-Président REVUZ, l'adhésion de principe des divers conférenciers, et il ne reste plus qu'à fixer les dates définitives.

Certains collègues souhaitent des conférences portant sur des sujets plus proches de leurs préoccupations quotidiennes. D'autres craignent la « Conférence pédagogique », et, finalement, il est admis que les conférences resteront ce qu'elles sont.

Néanmoins, un effort doit être fait pour insérer dans le *Bulletin* davantage d'articles d'un niveau plus modeste, bien que l'expérience montre que ce genre d'études est très difficile à obtenir. Soit prudence, soit modestie, les auteurs pressentis se dérobent la plupart du temps.

A propos de l'agrégation, on souhaite l'étude approfondie de quelques leçons, étude qui compléterait l'énumération des leçons suivie de quelques commentaires.

Mais il s'agirait, bien entendu, d'exposer et critiquer les diverses manières de concevoir la leçon, sinon les candidats pourraient croire qu'on leur impose une leçon-type, « ne varietur ».

Baccalauréat Sciences Expérimentales. — De nombreux collègues s'inquiètent de ce que sera la future épreuve de Mathématiques, et nous leur avons communiqué les renseignements en notre possession. En attendant, une décision officielle, il sera bon de proposer et d'étudier divers sujets d'épreuve.

La question suivante est posée incidemment : le sujet national est-il préférable

au sujet académique ? Les avis paraissant partagés, il y aura lieu de procéder à une enquête. En particulier, les raisons qui ont fait remplacer les sujets académiques, autrefois en usage, par le sujet national, sont-elles encore valables aujourd'hui ? Cette question a d'ailleurs déjà été soulevée (cf. n° 194, page 47).

Les nombres relatifs. — M. SCHAEFFER remarque que les nouveaux programmes de Quatrième remplacent « nombre algébrique » par « nombre relatif ». Tout en se félicitant de l'abandon de l'ancien terme, il formule des objections contre le nouveau (voir notes plus loin).

Baccalauréat Lettres modernes. — Le principe d'une épreuve à option (entre Mathématiques et Lettres) est admis, avec la même réserve déjà exprimée le 19 juin (cf. *Bulletin* 194, page 79) : elle doit porter sur un nouveau programme, mieux adapté à la classe.

ANNEXE I

LE BACCALAURÉAT SCIENCES EXPÉRIMENTALES

Depuis la réunion du Comité, un arrêté a été pris, le 15 novembre, fixant à deux heures la durée de l'épreuve écrite de Mathématiques de Sciences Expérimentales. Puis la circulaire du 17 novembre indique :

« Cette épreuve ne comprendra pas de question de cours. Elle consistera en une composition à caractère essentiellement pratique, permettant le contrôle de l'acquisition des techniques. Elle pourra comporter plusieurs parties distinctes. »

Nous donnons ci-dessous quelques exemples de questions, dues à des collègues, ou provenant d'examens étrangers.

1. — *a*) Définir les différentes unités de longueur utilisées en astronomie.

b) La parallaxe de l'étoile Altaïr étant 0,2 seconde, exprimer sa distance en parsecs, en km. en années-lumière.

2. — *a*) La fraction $\frac{a+17}{a-4}$ peut-elle se réduire à un entier ?

b) Une fraction est égale à $\frac{105}{375}$. Trouver ses termes, sachant que leur p.g.c.d. est 31.

3. — *a*) Etablir le développement de $y=(1+x)^n$; appliquer à $y=(1+x)^6$.

b) On joue à pile ou face six fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois pile et quatre fois face ?

(Exemples communiqués par Mlle ORAIN, professeur au Lycée La Fontaine).

4. — On donne un rectangle. Ses diagonales sont les asymptotes d'une hyperbole, et deux de ses côtés opposés sont tangents à l'hyperbole. Trouver l'angle des asymptotes, sachant que l'aire du rectangle est $4cp$ (avec les notations classiques).

5. — Une parabole a pour sommet le point $(2, -4)$. Son axe est parallèle à l'axe Oy, et elle est tangente à la droite d'équation : $x+y=0$. Trouver l'équation de la parabole.

6. — Soit la fonction : $y=\frac{ax^2+3x+b}{ax-b}$. Déterminer a et b de manière que la courbe ait pour asymptotes les droites d'équations : $x+3=0$, $x-y+4=0$. Tracer la courbe représentative.

7. — Deux points A et B sont diamétralement opposés sur un parallèle de latitude nord. Montrer que le trajet de A à B, le long du parallèle, est plus long que le

trajet par le pôle nord. Trouver le parallèle de manière que la différence soit maximum.

Facultatif : représentation graphique de la différence des deux trajets.

8. — Un triangle a pour sommets les foyers d'une ellipse, le 3e sommet étant en un point P de l'ellipse. Lieu du centre du cercle inscrit dans le triangle, lorsque P décrit l'ellipse.

9. — Montrer que la courbe d'équation $y = x \sin \frac{1}{x}$ coupe l'axe des x une infinité de fois. Entre deux intersections consécutives, il y a un point où la courbe touche, soit la droite $y = x$, soit la droite $y = -x$.

Facultatif : tracer la courbe ; comment se comporte y au voisinage de $x = 0$; de x infini.

10. — On donne une sphère de diamètre AB = 2, et un point P (extérieur) sur AB, à la distance x du centre O. On considère la surface conique de révolution, de sommet P, d'angle au sommet égal à 60°. Calculer, en fonction de x, l'aire de cette surface qui est intérieure à la sphère. Etudier cette fonction, tracer la courbe représentative.

Facultatif : étude de la fonction au voisinage de $x = 1$ et $x = -1$.

11. — Calculer l'aire comprise entre les courbes d'équations : $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.

ANNEXE II

Enquête permanente sur le vocabulaire et le symbolisme

Nombres algébriques, nombres relatifs

I. — Les nouveaux programmes pour la classe de Quatrième (arrêté du 31 juillet 1958) remplacent l'expression « nombres algébriques » par la tournure à la mode « nombres relatifs ».

Or, tant dans le langage courant que dans le langage scientifique, le mot « relatif » évoque plutôt une idée de rapport et ne fait aucunement penser à « positif ou négatif ». Des expressions telles que « nombres relatifs », « erreur relative » et « valeur relative d'un chiffre » sont à peu près incompatibles. C'est sans doute pour une raison de ce genre que le nouveau programme continue de parler de la mesure algébrique d'une grandeur orientée, alors qu'il eût été logique de dire « mesure relative ». On voit que l'expression « nombres relatifs » présente le pire défaut que puisse avoir un vocabulaire : l'incohérence.

Par quoi peut-on remplacer le si discutable « relatif » ? On pense à plusieurs solutions possibles :

1° Choisir un mot qui évoque l'origine concrète des nombres positifs et négatifs ; on pourrait dire, par exemple : *nombres orientés*. Cette tournure est claire et immédiatement compréhensible par tous ; son principal inconvénient est qu'elle laissera subsister l'expression synonyme : nombres réels.

2° Choisir un mot qui évoque l'histoire des Mathématiques ; on pourrait dire, par exemple : *nombres indiens*, en hommage à l'importance du rôle des mathématiciens de l'Inde ancienne dans l'élaboration de la notion de nombre. Le principal inconvénient de cette tournure artificielle est qu'il n'existe en fait aucune autorité ayant un poids suffisant pour la faire adopter.

3° Choisir un mot dont le sens habituel soit suffisamment vague pour qu'aucun conflit ne soit à craindre ; on pourrait dire, par exemple : *nombres qualifiés* (cf. Marcel Boll.). Même inconvénient, probablement rédhibitoire, que pour « nombres indiens ».

Dans l'état actuel des choses, il semble que, seule, une expression du type « nombres orientés » pourrait avoir assez de force pour s'imposer. Les collègues qui voudraient bien donner leur avis sur ce point de vocabulaire et présenter des suggestions, rendraient un important service à l'enseignement des Mathématiques.

H. SCHAEFFER.

II. — Le nouveau programme pour la classe de Quatrième parle de « mesure algébrique » d'une grandeur orientée. L'on peut penser qu'il s'agit d'un lapsus, puisque le terme de « nombre relatif » remplace celui, devenu impropre, de « nombre algébrique ». Il faudrait lire « mesure relative d'une grandeur, un sens étant choisi », ou, mieux, « mesure d'une grandeur relative à un sens choisi ».

Cette correction nécessaire montre bien qu'il faut, durant un certain temps, une tolérance pour un vocabulaire en évolution. Profitons de cette occasion pour repenser la question et justifier le mot nouveau :

Le mot « relatif » ne peut évidemment pas être employé d'une manière... absolue ! Il ne faut pas, dans un enseignement élémentaire, sous-entendre trop vite les idées essentielles. On ne saurait trop souligner et rappeler qu'une convention de sens doit *précéder* tout emploi des nombres relatifs et que nos habitudes ne s'imposent pas aux enfants et ne nous lient pas nous-même strictement. On peut dire « plus tard » ou « plus tôt », plus haut ou plus bas, plus à droite ou plus à gauche, plus chaud ou plus froid.

En géométrie, l'emploi des formules générales, indépendantes des cas de figure, telles que la formule de Chasles, ne peuvent être utilisées qu'après avoir précisé des conventions de signes et avoir traduit les données de l'énoncé en termes relatifs à ces conventions.

Disons donc, aussi longtemps qu'il le faut pour que la notion soit acquise, « nombres relatifs à tel sens positif », « mesure relative à telle convention », par opposition à « nombre absolu », « mesure absolue », un nombre relatif ayant une valeur absolue indépendante de la convention qui précise le signe.

Henri DUPIN.

Le bloc-notes de l'A.P.M.

● **Les écrits restent...** (*suite*).

Du journal « La Croix », à propos de l'inauguration d'une église à Villeparisis :

« Nous avons pu, depuis lors, nous familiariser avec cette voûte en selle de cheval, qui fut l'une des trouvailles de construction de l'ingénieur L... La voûte est *une* paraboloïde hyperbolique à doubles directrices paraboliques. Ces directrices transmettent au sol la poussée des voûtes dont les courbures sont dans un sens des paraboles, de l'autre des hyperboles. »

Hélas ! au moment où l'Ecole Polytechnique supprime l'étude géométrique du paraboloïde hyperbolique, voilà que les ingénieurs se mettent à en construire...

● **Erratum à l'article de A. Magnier** (n° 194, page 25).

Lire à la 10e ligne : $M = 16 \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{239}$.

(Merci à M. Rivet de m'avoir signalé l'erreur).

● **Demande de Bulletins.**

Les numéros 187, 189, 190, nous manquent totalement, même pour les archives. Nous serions heureux si quelque collègue pouvait se défaire d'un de ces *Bulletins*, et l'envoyer à :

M. Tournade, Institut Pédagogique National, 29, rue d'Ulm, Paris, 5e.

● **Conférences.**

Nos collègues Itard et Taton font régulièrement des conférences à l'Ecole pratique des Hautes Etudes (6e section, Sorbonne, Escalier E, 1er étage) :

J. Itard : Les éléments arithmétiques d'Euclide (tous les mardis, de 17 heures à 18 heures).

R. Taton : L'œuvre de Lagrange (vendredi de 16 h. à 18 h., pendant le premier semestre).

Séminaire d'Histoire des Mathématiques (Institut Henri-Poincaré, 1er étage, salle 116).

Jeudi 15 janvier 1959 à 16 heures : R. Taton : L'œuvre mathématique de Stévin.

Jeudi 29 janvier à 16 heures : J.-P. Flad : L'horloge à calculs de Chicard (1623).

Jeudi 5 février à 16 heures : J. Itard : Le Tractatus de Proportionibus de Bradwardine.

● **Le théorème de Bachet.**

Un collègue demande dans quel ouvrage (en français) il peut trouver une démonstration de la propriété dite « théorème de Bachet », relative à la décomposition d'un entier en une somme de quatre carrés.

● **Rapport « Grandes Ecoles ».**

Notre collègue Chazal, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Charlemagne, rue Saint-Antoine, Paris, 4e, a bien voulu accepter de reprendre ce rapport,

qu'il rédigeait autrefois. Mais il est *essentiel* que tous ceux qui ont des remarques à présenter à propos des concours des Grandes Ecoles les communiquent à CHAZAL, pour qu'il puisse rédiger son rapport en temps utile, c'est-à-dire pour l'Assemblée générale.

- **Stages régionaux de recherche pédagogique** consacrés à l'enseignement des Mathématiques.

En 1959, ces stages auront lieu dans les Académies de Caen, Clermont-Ferrand, Grenoble, Nancy, Strasbourg et Toulouse. Ils porteront sur les questions que peut poser l'application des nouveaux programmes du premier cycle.

Les stagiaires assisteront à des exposés et discussions, et à des leçons faites dans une classe du premier cycle.

Le stage se terminera par la mise au point des conclusions auxquelles donneront lieu les exposés et leçons. Il comportera la visite d'une exposition de livres et de matériel.

Notices d'histoire des Mathématiques

par Henri LEBESGUE

Henri LEBESGUE aurait peut-être protesté si on lui avait donné le titre d'historien. Et, pourtant, les notices que rassemble cette monographie montrent de quel talent il fait preuve lorsqu'il œuvre en historien. D'une part, sa sensibilité, son esprit de justice et sa bonté excellent à faire revivre les hommes et les époques, d'autre part, le mathématicien parvient à déceler au travers d'une tradition figée la pensée naïve, confuse, tâtonnante mais pleine d'éclairs de génie des créateurs ; c'est du passé qu'il dégage la manière profonde, toujours actuelle, dont se posent les grands problèmes mathématiques qui s'engendrent avec continuité les uns les autres ; c'est là qu'il trouve la clef des méthodes permettant d'aller de l'avant.

Pour LEBESGUE, l'histoire des Sciences joue un rôle important dans la formation du mathématicien ; mais il ne s'agit pas là d'une histoire de faits et de dates, mais de l'histoire des courants d'idées et des grandes découvertes, qui ont levé les difficultés devant lesquelles les plus grands esprits ont été autrefois arrêtés, et qui inspirent aussi bien le chercheur que le professeur.

TABLE DES MATIERES : Introduction de Mlle L. FÉLIX. — Commentaires sur l'œuvre de F. VIÈTE. — L'œuvre mathématique de VANDERMONDE. — Notice sur la vie et les travaux de Camille JORDAN. — Notice sur René-Louis BAIRE. — Un travail mathématique de André-Marie AMPÈRE. — Les professeurs de mathématiques du Collège de France : HUMBERT et JORDAN, ROBERVAL et RAMUS. — Extraits de la correspondance de H. LEBESGUE.

Bien que ce volume constitue la monographie n° 4 de l'*Enseignement mathématique*, sa distribution en France est assurée, comme pour tous les ouvrages du même auteur, par la Librairie Gauthier-Villars.

Structures algébriques et structures topologiques

Sous ce titre se trouvent rassemblés les textes des conférences parues dans le *Bulletin* de l'A.P.M., du n° 176 (mars 1956) au n° 191 (mars 1958). Rappelons-en les titres :

I. *Structures algébriques :* CARTAN (H.) : Structures algébriques. — DUBREIL (P.) : Anneaux, congruences, idéaux. — CHOQUET (G.) : Espaces vectoriels, formes et équations linéaires. — LICHNÉROWICZ (A.) : Applications linéaires et matrices. — LELONG (P.) : Formes quadratiques et hermitiennes. — LESIEUR (L.) : Groupes classiques. — REVUZ (A.) : Espaces projectifs.

II. *Structures topologiques :* CHOQUET (G.) : La droite numérique. — REVUZ (A.) : Espaces euclidiens et espaces métriques. — CHOQUET (G.) : Notions liées à la structure d'espace métrique. — DIXMIER (J.) : Espaces de fonctions et modes de convergence. — PISOT (Ch.) : Notions de topologie générale. — PISOT (Ch.) : Espaces compacts et localement compacts. — GODEMENT (R.) : Groupes et espaces vectoriels topologiques. — CARTAN (H.) : Sur la notion de dimension. — SERRE (J.-P.) : Revêtements, groupe fondamental. — SCHWARTZ (L.) : Eléments d'homologie.

Le volume constitue la monographie n° 7 de l'*Enseignement mathématique*. Pour cette réédition, les textes ont été soigneusement revus et un index terminologique facilite l'utilisation du livre qui se présente comme une introduction à la lecture des traités spécialisés.

Les collègues, même ceux qui conservent la collection du *Bulletin*, pourront désirer posséder ce volume qui témoigne en faveur de la coopération des divers degrés d'enseignement pour la rénovation de l'enseignement des Mathématiques.

Pour se procurer l'ouvrage, s'adresser à G. WALUSINSKI, 26, parc de la Bérengère, Saint-Cloud (S.-et-O.), dépositaire pour la France des monographies de l'*Enseignement mathématique*. Prix du volume, 2 000 F français (pour les membres de l'A.P.M., réduction de 25 %, soit 1 500 F auxquels on est prié d'ajouter les frais d'envoi, 100 F). Virement au C.C.P. G. WALUSINSKI, Paris 14 584-50.

Rappelons que les collègues de l'A.P.M. peuvent bénéficier de la même réduction de 25 % sur l'abonnement à l'*Enseignement mathématique* (1 500 F au lieu de 2 000 F) en virant la somme à G. WALUSINSKI (adresse ci-dessus), C.C.P. Paris 14 584-50, qui transmettra à l'administration de la revue.

Printed in France

Le Gérant : G. WALUSINSKI.

Cahors, Imp. A. Coueslant. — 93.537. — Dépôt légal : I-1959

FERNAND NATHAN-ÉDITEUR

Les ouvrages de MATHÉMATIQUES les plus répandus

C. LEBOSSÉ et C. HÉMERY
Agrégés de Mathématiques

COURS DE MATHEMATIQUES

NOUVEAUX PROGRAMMES :

ARITHMÉTIQUE ET TRAVAUX PRATIQUES

CLASSE DE SIXIEME

Tout en conservant sa présentation antérieure, l'ouvrage a été profondément remanié dans l'esprit des programmes actuels. Les notions nouvelles ont permis de varier et d'augmenter considérablement le nombre des exercices proposés. Chaque leçon est d'autre part accompagnée d'un choix de travaux pratiques en plus de ceux qui pourront être puisés dans la partie « Dessin géométrique ».

Un volume cartonné (vert) ..... **460 F**

Le CORRIGÉ de la classe de Sixième ..... **325 F**

ARITHMÉTIQUE ET GÉOMÉTRIE

CLASSE DE CINQUIEME

La partie arithmétique suit l'ordre du nouveau programme avec l'étude des nombres entiers, des fractions et l'application à la résolution littérale des problèmes. Des planches de dessin géométrique et des notions d'Astronomie complètent l'ouvrage en vue des séances de travaux pratiques.

Un volume cartonné (vert) ..... **490 F**

Le CORRIGÉ de la classe de Cinquième ..... **En préparation**

Pour paraître très prochainement

ALGÈBRE — ARITHMÉTIQUE et GÉOMÉTRIE

CLASSE DE QUATRIEME

TRAVAUX PRATIQUES D'ARITHMÉTIQUE ET D'ASTRONOMIE

Ce fascicule complémentaire est destiné à la mise à jour du manuel de 6e de la précédente édition (Lycées et Collèges) (gris) ..... **130 F**

TRAVAUX PRATIQUES D'ARITHMÉTIQUE

Fascicule destiné à la mise à jour du manuel de 6e de la précédente édition pour les Cours complémentaires (rose) ..... **85 F**

Catalogue complet sur simple demande

RAPHOPLEX

21, rue de Montsouris
Paris, XIVe
Tél. : Por. 38-10

REGLES A CALCULS

Longueurs : 12,5 - 25 - 50 cm.

Systèmes : Rietz, Electric Log-Log (Darmstadt améliorée), Rolinéa, Géomètre, Géopolytechnique, Electro.

INSTRUMENTS DE DESSIN

Règles divisées, Echelles de réductions, Equerres, Rapporteurs, Pistolets.

RAPPORTEUR-RECTIFICATEUR permettant la division des angles, le développement du cône, du cylindre, la construction des courbes cycloïdes, épicycloïdes, etc...

Notices et catalogue sur demande

J.-B. BAILLIERE et Fils, Editeurs, 19, rue Hautefeuille, Paris-VIe

VIENT DE PARAITRE :

NOUVEAU COURS
de
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

par **Robert DELTHEIL**

Recteur honoraire de l'Académie de Toulouse
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse

(Programme de 1958)

ALGÈBRE et GÉOMÉTRIE

Un ouvrage, format 18 × 22,5, 276 pages, 63 figures. Prix ..... **2 500 F**
Franco de port ..... **2 630 F**

A l'usage des candidats à la licence ès sciences et des élèves des écoles d'ingénieurs

NOUVEAUTÉS

P. DEDRON
Inspecteur général de l'Instruction publique

E. ANGLADE
Professeur agrégé au lycée Lakanal

LA QUESTION DE COURS DE MATHÉMATIQUES AU BACCALAURÉAT

CLASSE DE PREMIERE ..... **290 F**

CLASSE DE MATHEMATIQUES :

Fascicule 1. — **Géométrie, Géométrie descriptive, Cosmographie** .... **450 F**

Fascicule 2. — **Algèbre, Trigonométrie, Mécanique, Arithmétique** ... **450 F**

RAPPELS :

J. DESBATS
Professeur agrégé au lycée Saint-Louis

LE PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES AU BACCALAURÉAT

CLASSES DE SECONDE ET DE PREMIERE **550 F**

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET GÉOMÉTRIE COTÉE

CLASSE DE MATHEMATIQUES ..... **400 F**

GEOMETRIE - CLASSE DE MATHEMATIQUES

Broché : **650 F** Relié : **800 F**

CATALOGUE COMPLET SUR DEMANDE

MAGNARD, 122, Boulevard Saint-Germain, Paris 6e

DELAGRAVE

MATHEMATIQUES H. SCHAEFFER-J. LEBAILE

Ce Cours, **dont le succès confirme la valeur,** était déjà celui des Professeurs acquis aux nouvelles tendances de l'enseignement des mathématiques. Les ouvrages de 6e et de 5e sont parfaitement conformes aux programmes. Ceux de 4e et de 3e recevront des compléments, actuellement en préparation, pour être harmonisés avec les dispositions de l'arrêté du 31 juillet 1958.

Nouvelle édition :

ARITHMETIQUE cl. de 6e
un volume (15,5 × 22) Br. **460 F** - Cart. **600 F**
Le complément seul ..... **120 F**

MATHEMATIQUES cl. de 5e
un volume (14,5 × 21) Br. **650 F** - Cart. **790 F**
Le complément seul ..... **120 F**

MATHEMATIQUES cl. de 4e
un volume (14,5 × 21) Br. **740 F** - Cart. **880 F**

Nouveauté :

MATHEMATIQUES cl. de 3e
un volume (15,5 × 22) Br. **840 F** - Cart. **990 F**

GAUTHIER-VILLARS

55, Quai des Gds-Augustins

PARIS VI^e^ — DANton 05-10

L. FLAVIEN

Professeur Honoraire de Mathématiques Spéciales
au Lycée Louis-le-Grand

NOUVELLES TABLES NUMERIQUES POUR LES FONCTIONS USUELLES DE L'ANALYSE

rédigées conformément au programme du 27 juin 1956
pour les classes préparatoires aux Grandes Ecoles Scientifiques

In-8° (13-20,5), 63 pages, 1958 ..... Relié toile 400 F

De dimensions modestes, ce petit livre rassemble un grand nombre de résultats qui interviennent constamment dans les calculs. Il a tenu à conserver son caractère scolaire et didactique, mais son usage peut déborder considérablement la préparation des concours et l'ingénieur sera souvent heureux de pouvoir s'y reporter.

M. CAZIN

Professeur à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures

et **Mlle N. DEQUOY**

Ancienne Elève de l'Ecole Normale Supérieure de Jeunes Filles de Sèvres

COURS DE MECANIQUE

Pour les classes de préparation aux Grandes Ecoles (Nouveau Programme). (Collection du Traité de Physique théorique et de Physique mathématique, volume IX). In-8° (16-25) de 200 pages avec 49 figures, 1958. Broché ..... 1 700 F

Cartonné ..... 2 000 F

VIENNENT DE REPARAITRE :

G. JULIA

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

EXERCICES D'ANALYSE

Tome II, fascicule I

FONCTIONS ANALYTIQUES - DEVELOPPEMENTS EN SERIE - RESIDUS
TRANSFORMATIONS ANALYTIQUES - REPRESENTATION CONFORME

Deuxième édition. In-8° (16-25), IV-344 pages, 86 figures. Nouveau tirage 1958 ..... 3 500 F

Tome III, fascicule I

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Deuxième édition. In-8° (16-25), VI-287 pages, 37 figures. Nouveau tirage 1958 ..... 3 000 F

LIBRAIRIE CLASSIQUE EUGÈNE BELIN
8, rue Férou - PARIS VI[e]

La classe de mathématiques

par M. MONGE et M. GUINCHAN

★

PROGRAMMES 1957-1958

1[er] cycle

Classe de sixième : cartonné 560 F broché 430 F

Classe de cinquième : cartonné 620 F broché 480 F

Classe de quatrième : mai 1959

Classe de troisième : été 1959

Cours de mathématiques spéciales

par G. CASANOVA

★

I. Nombres. Vecteurs. Algèbre linéaire. .. 900 F

II. Algèbre et analyse. .. .. 2000 F

III. Géométrie analytique. .. .. 2000 F

En préparation :

IV. Mécanique. Calcul numérique. Géométrie descriptive.

MASSON & Cie, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6e

NOUVEAUTES :

COURS DE MATHÉMATIQUES G. CAGNAC ET L. THIBERGE

PROGRAMMES 1957

ARITHMÊTIQUE

CLASSE DE 6e

Nouvelle édition, entièrement refondue

par

L. THIBERGE
Inspecteur général
de l'Education Nationale

E. GILET
Censeur des Etudes
du Lycée J.-B.-Say

Un volume avec nombreuses figures, exercices, problèmes et **Travaux Pratiques**, cartonné ..... **980 F**

GÉOMÉTRIE
ET
ARITHMÉTIQUE

CLASSE DE 5e

Nouvelle édition, entièrement refondue

par

L. THIBERGE **E. GILET**

Un volume avec nombreuses figures, exercices et problèmes, cart. .... **1 050 F**

MAISON D'EDITIONS AD. WESMAEL-CHARLIER, S.A.
NAMUR (Belgique)

Correspondant en France :

Éditions WESMAEL-CHARLIER

Capital : 3.500.000 F — S.A.R.L. — R.C. Seine 57.B.8613

30, rue de Gramont

PARIS 2e

Extrait du

Catalogue général

Collection HERBIET

Leçons de Trigonométrie
118 pages, 74 figures

Trigonométrie Rectiligne
246 pages, 123 figures

Trigonométrie Sphérique
56 pages, 33 figures

Exercices de Trigonométrie
752 pages, 327 figures

dernière nouveauté

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR R. MAILLARD, INSPECTEUR GÉNÉRAL DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

UN COURS NOUVEAU, CONFORME AUX DERNIERS PROGRAMMES, ET QUI SE PROPOSE DE RENOUVELER LA MATIÈRE TRADITIONNELLEMENT OFFERTE.

CHAQUE OUVRAGE SE RECOMMANDE PAR DES SUJETS DE TRAVAUX PRATIQUES, DES PROBLÈMES INTÉRESSANT LES ÉLÈVES PAR L'ACTUALITÉ DES SUJETS, UNE BELLE TYPOGRAPHIE.

Déjà paru :

Classe de 6e, PAR R. CAHEN, PROFESSEUR AU LYCÉE CHAPTAL.

Pour paraître en 1959 :

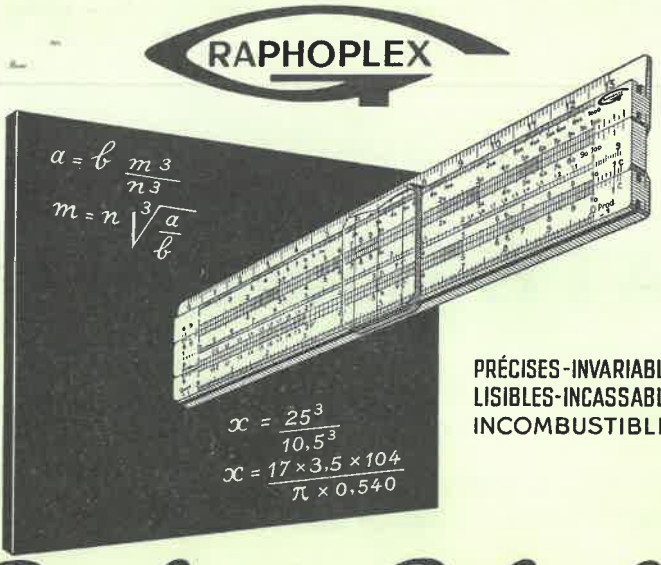
Classe de 5e, PAR R. CAHEN.

Classe de 4e, PAR R. MAILLARD ET E. CARALP, PROFESSEUR AU LYCÉE MONTAIGNE.

UN FASCICULE DE **géométrie dans l'espace** CONFORME AU PROGRAMME NOUVEAU DE LA CLASSE DE 3e SERA ADRESSÉ AUX PROFESSEURS A LA RENTRÉE DE PAQUES 1959.

Classiques HACHETTE 79 BD SAINT-GERMAIN PARIS 6

RAPHOPLEX



PRÉCISES - INVARIABLES
LISIBLES - INCASSABLES
INCOMBUSTIBLES

Règles à Calculs

INSTRUMENTS DE DESSIN

Pochettes de compas. Qualité supérieure

Equerres et Règles en plexiglas transparent

☆ ☆ ☆

Tarifs spéciaux pour commandes groupées

Catalogue sur demande

SEREB

148, rue de Noisy-le-Sec, Bagnolet
AVRon 11-83 - 18-65

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD

GRENOBLE (Isère)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU

Professeurs au Lycée de Grenoble

PROGRAMMES DU 18 AVRIL 1947

TARIF JUIN 1958

	Taxe locale comprise
ARITHMÉTIQUE 6e *(Jusqu'à épuisement)*	**224 F**
ARITHMÉTIQUE 6e — Nouvelle édition mise à jour	**336 »**
Corrigé des exercices de 6e (correspondant à l'ancienne édition)	**305 »**
DESSIN GÉOMÉTRIQUE 6e et 5e	**188 »**
GEOMÉTRIE 5e et 4e	**545 »**
ARITHMÉTIQUE 5e *(jusqu'à épuisement)*	**356 »**
ARITHMÉTIQUE 5e. — Nouvelle édition mise à jour	**458 »**
Corrigé des exercices de 5e (correspondant à l'ancienne édition)	**305 »**
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 4e	**336 »**
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 3e	**432 »**
GÉOMÉTRIE 3e	**387 »**
GÉOMÉTRIE 5e, 4e, 3e	**895 »**
(pour les Lycées, Collèges et Cours Complémentaires. Fort volume de 420 pages **cartonné).**	
COMPLÉMENTS d'ALGÈBRE et de GÉOMÉTRIE 3e MODERNE COURT.	**102 »**
ALGÈBRE 2e A.B.C.M.	**560 »**
GÉOMÉTRIE 2e A.B.C.M.	**550 »**
ALGÈBRE 1re A.B.	**295 »**
ALGÈBRE et TRIGONOMÉTRIE 1re C.M.	**560 »**
GÉOMÉTRIE 1re A.B.C.M.	**509 »**

POUR LES EXAMENS :

QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT, 1re partie, A.B.C.M.	**427 »**
LES MATHÉMATIQUES AU B.E.P.C., 156 PAGES, NOMBREUX CLICHÉS	**458 »**