III. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES

LA PENSÉE DE L'ENFANT ET LA GÉOMÉTRIE *

par P.-H. van Hiele

La didactique est une rencontre de trois éléments : le professeur, l'élève et la matière à enseigner. Puisqu'il est très difficile d'embrasser d'un coup d'œil ces trois composantes de la situation didactique, on a tendance à en négliger une, ce qui donne une image incorrecte de la situation. Car si l'on néglige la matière, on ne voit que les rapports entre le professeur et l'élève, si l'on perd de vue l'élève, on ne voit que la structure de la matière. Parfois on ne réalise pas suffisamment qu'il y a le professeur pour diriger les études de l'enfant.

Admettons cependant que l'on tienne compte des trois aspects mentionnés plus haut sans en omettre un seul pour les besoins de la cause. Il reste tout de même un grand danger et il me paraît qu'on ne l'a pas suffisamment reconnu. La difficulté qui se présente, c'est que les matières, telles que l'élève les rencontre, sont d'une toute autre structure que celles qui sont connues par le professeur.

Si nous admettons comme un but de notre enseignement que l'élève sache prouver des théorèmes, il est hautement improbable que la pensée de l'élève vise directement vers ce but. Improbable parce que l'élève ne pourra saisir dans son sens intrinsèque la notion de *prouver un théorème*. En effet, s'il avait cette notion, il n'aurait pas besoin de l'apprendre. Comprendre les Mathématiques revient à ceci : connaître les rapports entre les théorèmes qu'on étudie. Dès qu'on comprend le sens de ces théorèmes, on connaît en même temps leurs rapports.

Tout cela est très simple et nous montre clairement pourquoi les Mathématiques sont tellement difficiles pour les élèves. Le professeur connaît les relations entre les théorèmes, mais il les connaît autrement que l'élève. Son exposé de ces relations ne suffit pas à les rendre intelligibles à l'élève. Ce que l'élève doit comprendre en premier lieu, c'est qu'il y a quelque chose comme des théorèmes. C'est tout ce qu'on est en droit d'attendre de l'élève débutant. L'exemple suivant pourra illustrer ce que je veux dire.

Un professeur veut enseigner la planimétrie aux élèves débutants. Il se sert de la symétrie par rapport à une droite pour les informer des relations entre l'égalité de segments ou d'angles, la perpendicularité, etc... Il leur apprend que les points de l'axe de symétrie sont invariants, que les segments symétriques ont même longueur, que les droites symétriques se coupent sur l'axe de symétrie. Pour savoir si les élèves ont bien compris ce qu'il a enseigné, il leur donne le problème suivant : « soit un triangle ABC dont les prolongements des côtés rencontrent la droite L. Il faut construire le triangle symétrique par rapport à la droite L. » Le professeur imagine la solution suivante : « les droites AB et AC rencontrent l'axe L en deux points que nous nommerons P et Q. Ces points sont invariants pour la symétrie. Puis les dis-

---

M. P.-M. van Hiele, professeur au Lycée de Bilthoven (Pays-Bas), est l'auteur d'une thèse sur le problème de l'intuition (en particulier sur le rôle de l'intuition dans l'enseignement de la géométrie). Cette thèse a été soutenue devant l'Université d'Utrecht le 4 juillet 1957.

M. van Hiele a prononcé la conférence, que l'on va lire ci-dessous, devant le « cours pilote sur l'enseignement des Mathématiques », organisé par l'O.E.C.E. à Sèvres, du 17 au 27 novembre 1957. Nous le remercions vivement de nous avoir autorisés à publier cette remarquable étude sur les problèmes de l'initiation.

tances AP et AQ sont invariantes, de sorte qu'on peut construire le point symétrique A'. De pareille façon on trouve les points B' et C'. »

Tout ce raisonnement, toute cette façon de concevoir la matière, c'est le raisonnement du professeur qui connaît tous les rapports. L'élève, lui, est tout à fait incapable de développer un pareil cheminement de la pensée sans l'aide du professeur. Le professeur a pris pour base de son raisonnement que les longueurs de segments symétriques sont invariants. Une telle thèse est stérile pour les élèves, parce qu'ils n'ont pas encore rencontré le contraire : ils n'ont pas encore vu des transformations qui font changer la longueur des segments.

Mais il y a une raison plus importante pour nous opposer à la méthode d'enseignement dont nous avons donné un exemple : on exige que les élèves raisonnent à l'aide d'un réseau de relations entre des notions dont ils ignorent le sens même. Il est question de « points », « axe de symétrie », « segments » « rencontrer «, « invariant », « changer de longueur », « triangle », « prolongement ». Evidemment, le professeur a expliqué ces expressions, il a montré les points et les segments. Il a démontré au tableau noir ce que signifie le prolongement d'un segment. Il se peut qu'il ait demandé aux élèves de formuler la définition d'angles opposés par le sommet. Il se peut même que la définition n'ait pas été trouvée tout à fait correcte et que, par conséquent, il ait montré cela au moyen d'un contre-exemple. Il faut réaliser pourtant que c'est le professeur qui donne le contre-exemple. Les élèves échoueraient puisque pour être en état de donner un contre-exemple, il faut disposer du réseau de relations, et ils n'en disposent pas.

J'espère que les considérations que je viens de vous donner auront montré clairement que le professeur raisonne au moyen d'un réseau de relations que lui seul possède. En partant de ce réseau, il fait voir des relations mathématiques que les élèves finissent par manipuler par habitude. Ou bien l'élève apprend, par habitude, à opérer avec des relations, dont il ignore, dont il n'a jamais vu, la naissance.

En apparence, la chosé est tout à fait en règle : les élèves finiront par disposer du même réseau que le professeur. La possession d'un réseau de relations, identique pour tous ceux qui s'en servent, propre à exprimer les raisonnements, un réseau dans lequel les relations sont liées d'une façon logique et déductive, n'est-elle pas le but propre de l'enseignement des Mathématiques ?

Ne soyons pas trop optimiste. D'abord un réseau de relations ainsi constitué n'est pas fondé sur les expériences sensorielles de l'étudiant. Quoiqu'il soit possible que le réseau de relations lui-même a inspiré des expériences chez l'élève, les expériences mathématiques que l'élève a bien pu avoir se basent justement sur ce réseau imposé par le professeur. Ce réseau imposé, et non pas compris, forme la base de ses raisonnements. Un réseau de relations, qui n'est pas fondé sur des expériences précédentes, risque, on le sait, d'être oublié en peu de temps.

Ensuite, le réseau de relations est une construction autonome, il n'a pas de rapports avec les autres expériences de l'enfant. Cela signifie que, précisément, l'élève ne sait que ce qu'on lui a enseigné et ce qui y est lié déductivement. Il n'a pas appris à établir les rapports entre le réseau de relations et le monde sensible. Il ne saura pas appliquer ce qu'il a appris dans des situations nouvelles.

Enfin, l'enfant a appris à appliquer un réseau de relations qu'on lui a offert tout prêt, il a appris à l'appliquer dans certaines situations spécialement désignées pour lui. Mais il n'a pas appris à se construire un tel réseau lui-même dans un domaine encore inexploité. Si, au contraire, nous réussissions à obtenir comme résultat de notre enseignement que les élèves soient capables de se construire un réseau relationnel déductif dans un domaine nouveau, nous aurions obtenu une formation mathématique optimale.

En général, le professeur et l'élève parlent un langage fort différent. Nous pouvons exprimer ceci en disant : ils pensent sur un niveau différent. L'analyse de la géométrie rend visibles à peu près cinq de ses niveaux.

Au *niveau de base* (niveau zéro) de la géométrie, les figures sont jugées d'après leur apparence. Un enfant reconnaît un rectangle à sa forme et un rectangle lui semble différent d'un carré. Quand on a montré à un enfant de six ans ce qu'est un losange, un rectangle, un carré, un parallélogramme, il est capable de reproduire ces figures sans erreur sur un géoplan de Gattégno, même dans des dispositions difficiles. Nous avons employé le géoplan de Gattégno dans nos recherches pour que l'enfant ne soit pas gêné par les difficultés résultant du dessin des figures. Au niveau de base, un enfant ne reconnaît pas un parallélogramme en un losange. A ce niveau le losange n'est pas un parallélogramme : le losange lui apparaît comme quelque chose de bien différent.

Au *premier niveau* de la géométrie, les figures sont porteuses de leurs propriétés. Qu'une figure est un rectangle, signifie qu'elle a quatre angles droits, que les diagonales sont égales et que les côtés opposés sont égaux. Les figures se reconnaissent à leurs propriétés. Si l'on nous dit que la figure tracée au tableau possède quatre angles droits, c'est un rectangle, même si la figure n'est pas tracée avec soin. Mais, à ce niveau, les propriétés ne sont pas encore ordonnées de sorte qu'un carré n'est pas nécessairement identifié comme étant un rectangle.

Au *deuxième niveau*, les propriétés s'ordonnent. Elles se déduisent les unes des autres : une propriété précède ou suit une autre propriété. A ce niveau, la signification intrinsèque de la déduction n'est pas comprise par les élèves. Le carré est reconnu comme étant un rectangle, parce qu'à ce niveau les définitions des figures entrent en jeu.

Au *troisième niveau*, la pensée s'occupe de la signification de la déduction, de la réciproque d'un théorème, d'un axiome, de la condition nécessaire et suffisante.

On peut probablement distinguer ainsi cinq niveaux de pensée en géométrie. Ce nombre est d'ailleurs de moindre importance pour la compréhension de ce qu'est un niveau de pensée.

Ces niveaux — nous l'avons dit — sont inhérents à l'élaboration de la pensée ; ils sont indépendants de la méthode d'enseignement suivie. Il se peut cependant que certaines méthodes d'enseignement ne permettent pas d'atteindre des niveaux supérieurs, de sorte que les façons de penser employées à ces niveaux restent inaccessibles aux élèves. Les points suivants peuvent contribuer à préciser les niveaux de pensée :

a) A chaque niveau apparaît de façon extrinsèque ce qui était intrinsèque au niveau précédent. Au niveau de base, les figures étaient en fait aussi déterminées par leurs propriétés, mais celui qui pense à ce niveau ne prend pas conscience de ces propriétés.

b) Chaque niveau a ses propres symboles linguistiques et son propre réseau de relations unissant ces signes. Une relation « exacte » à un niveau peut se révéler inexacte à un autre. Qu'on songe, par exemple, à la relation entre le rectangle et le carré. De nombreux symboles linguistiques apparaissent à deux niveaux successifs : ils établissent d'ailleurs la liaison entre les divers niveaux et assument la continuité de la pensée dans ce domaine discontinu. Mais leur signification est différente : elle se manifeste par d'autres relations entre ces symboles.

c) Deux personnes qui raisonnent à deux niveaux différents ne peuvent se comprendre. C'est ce qui arrive souvent pour le professeur et l'élève. Aucun d'eux ne parvient à saisir le cheminement de la pensée de l'autre et leur dialogue ne peut se poursuivre que parce que le professeur essaye de se faire une idée des pensées de l'élève et s'y conforme. Certains professeurs font un exposé à leur propre niveau tout en invitant les élèves à répondre à leurs questions. Il ne s'agit là, en fait, que d'un monologue, car le professeur est amené à considérer toutes les réponses qui n'appartiennent pas à son réseau de relations comme stupides ou déplacées. Le véritable dialogue doit s'établir au niveau des élèves. Dans ce cas, le professeur devra

souvent, après la classe, s'interroger sur les intentions de ses élèves et s'efforcer de les comprendre.

d) La maturation qui mène à un niveau supérieur se déroule d'une façon particulière. On peut y déceler plusieurs phases (cette maturation doit être considérée surtout comme un processus d'apprentissage et non comme un mûrissement d'ordre biologique). Il est donc possible et souhaitable que le professeur la favorise et l'accélère. C'est précisément le but de la didactique de poser la question de savoir comment ces phases sont parcourues et comment une aide effective peut être fournie à l'élève.

Examinons maintenant *les phases qui,* dans le processus d'apprentissage, *mènent à un niveau supérieur de pensée.*

La *première phase* est celle de l'*information :* l'élève apprend à connaître le champ d'investigation au moyen du matériel qui lui est présenté. Ce matériel lui fait découvrir une certaine structure. On pourrait dire que la base de la connaissance humaine consiste en ceci : l'homme paraît en mesure de déceler une structure dans tout matériel, aussi désordonné soit-il, et cette structure est ressentie de la même façon par plusieurs personnes, ce qui résulte de la conversation qu'elles peuvent engager à ce sujet.

Dans la *deuxième phase,* celle de l'*orientation dirigée,* l'élève explore le champ d'investigation au moyen du matériel. Il sait donc déjà dans quelle direction l'étude est dirigée, le matériel est choisi de telle sorte que les structures caractéristiques lui apparaissent au fur et à mesure.

Au cours de la *troisième phase* l'*explication* a lieu. Les expériences acquises sont liées aux symboles linguistiques exacts et les élèves apprennent à se prononcer sur les structures observées au cours d'échanges de vues qui ont lieu en classe. Le professeur veille à ce que ces derniers aient lieu en employant les termes habituels. C'est au cours de cette troisième phase que se forme partiellement le réseau de relations.

La *quatrième phase* est celle de l'*orientation libre.* Le champ d'investigation est en grande partie connu, mais l'élève doit encore y trouver rapidement son chemin. Cela se réalise en donnant des tâches qui peuvent être exécutées de différentes façons. Toutes sortes de signaux sont placés dans le champ d'investigation : ils montrent la voie à suivre vers les symboles.

La *cinquième phase* est celle de l'*intégration :* l'élève s'est orienté, mais il doit encore acquérir une vue d'ensemble des moyens qui sont à sa disposition. Il essaye donc de condenser en un tout le domaine que sa pensée a exploré. A ce moment, le professeur peut favoriser ce travail en fournissant des aperçus globaux. Il importe que ces aperçus n'apportent rien de nouveau à l'élève : ils doivent être uniquement un résumé de ce que l'élève sait déjà.

A l'issue de cette cinquième phase le nouveau niveau de pensée est atteint. L'élève dispose d'un réseau de relations qui se rapportent à la totalité du domaine exploré. Ce nouveau domaine de pensée, qui a acquis sa propre intuition, s'est substitué au domaine de pensée antérieur qui possédait une toute autre intuition.

L'objectivité des Mathématiques repose sur le fait que les nouveaux réseaux de relations se correspondent chez des personnes différentes. Les nouveaux symboles sont liés par les mêmes relations chez plusieurs personnes. Si l'on fixait comme but de l'éducation l'unicité du réseau relationnel, on pourrait se borner à faire apprendre celui-ci. Et l'élève alors semblerait comprendre parfaitement les raisonnements, car il aboutirait à des conclusions exactes en se basant sur son réseau relationnel. Mais cela ne voudrait pas dire qu'il y attache la même signification que son interlocuteur. Cette signification ne peut être dégagée uniquement du langage employé, elle dépend aussi des expériences qui ont conduit à la formation du réseau relationnel, c'est-à-dire qu'elle dépend de ce qui s'est déroulé au niveau de pensée inférieur.

Si l'on ne prend pas le contenu des symboles en considération, mais uniquement

leurs relations, on peut dire que, du point de vue mathématique, tout est parfait. L'élève est capable de manier le réseau relationnel de la déduction sans se tromper. Mais au point de vue pédagogique et didactique, au point de vue social, on a lésé l'élève ! On a commis une faute pédagogique, car on a enlevé à l'élève l'occasion de prendre conscience de son pouvoir créateur. Au point de vue didactique, on a négligé de laisser découvrir par l'élève comment s'explorent de nouveaux domaines de pensée. On a, enfin, lésé la société, parce qu'on a mis entre les mains de l'élève un outil qu'il ne peut manier que dans les cas qu'il a étudiés.

La théorie des niveaux de pensée conduit aux importantes conclusions suivantes :

1° On a pu voir que les niveaux de pensée sont inhérents à la pensée elle-même ; ils n'intéressent donc pas seulement les personnes qui s'occupent de didactique. Les niveaux de pensée ont, par exemple, une certaine importance pour les Mathématiques elles-mêmes. On ne pourra s'exprimer de façon claire en Mathématiques que lorsqu'on se sert de symboles appartenant au niveau auquel on se place. Si l'on manipule des fonctions, il importe peu que celles-ci soient définies par l'expression $f(x)$ ou par l'équation $y = f(x)$. On apprend à connaître la fonction en la maniant et de cette activité découle le contenu de la notion de fonction. Si l'on se pose, à un niveau supérieur, la question de savoir ce qu'est une fonction, *ce que l'on a réellement fait,* on aboutira à la conclusion qu'il s'agit d'un appariement d'éléments x et d'éléments $f(x)$. La fonction n'est définie, ni par $f(x)$, ni par $y = f(x)$, mais par le symbole d'appariement que l'on pourrait représenter — si on le désirait — par f. L'erreur résulte de ce que l'on a essayé de donner une définition à un niveau de pensée inférieur, d'exploiter une structure contenue implicitement dans une activité avant que celle-ci ne soit devenue suffisamment familière. Parce que cette tentative est vouée à l'échec, on se borne, ou bien à représenter le résultat de cette action — $f(x)$ — ou bien l'action elle-même — $y = f(x)$. La faute n'est pas seulement d'ordre didactique, mais aussi théorique. (Cet exemple est tiré d'une conversation avec M. le Professeur Freudenthal).

On commet une erreur analogue lorsqu'on essaye de construire un système d'axiomes au moyen de symboles appartenant à un niveau de pensée trop bas. Les systèmes d'axiomes sont du ressort du quatrième niveau où ne se pose plus en fait la question : que sont des points, des lignes, des surfaces, etc... A ce quatrième niveau les figures sont uniquement définies par des symboles liés par des relations. Pour trouver leur contenu propre, il faudra retourner aux niveaux inférieurs où le contenu de ces symboles peut être aperçu. Mais, avec ce contenu, ces symboles appartiennent à un réseau relationnel qui ne peut être axiomatisé parce qu'il ne peut avoir de liaisons directes avec la logique.

2° De même qu'un enfant n'apprend pas sa langue maternelle en appliquant des règles grammaticales (celles-ci sont déduites de l'usage courant), il n'apprend les Mathématiques qu'en appliquant des règles mathématiques. Ces règles ne prennent consistance, c'est-à-dire ne deviennent explicitement discursives, que lorsqu'on s'interroge sur les activités déployées au niveau inférieur. C'est ainsi que naissent toutes les règles mathématiques, jusqu'aux règles de la logique formelle. L'application des règles a son importance, mais le rôle de l'application réside avant tout dans l'exploration de domaines nouveaux, voisins de celui où les règles et les lois ont été développées.

3° Deux ou plusieurs personnes peuvent se comprendre dans un domaine de pensée déterminé quand elles disposent d'un langage dans lequel elles ressentent les mêmes relations entre les signes linguistiques. La certitude des Mathématiques repose sur la façon infaillible avec laquelle le langage mathématique peut être employé. Le « mathématicien à tout prix » peut s'en contenter : le LANGAGE est tout pour lui et il ne se soucie guère de ce qu'un symbole représente pour autrui.

(Qu'on songe à la dualité point-droite dans le plan projectif !). Il n'y a pas de problème du point de vue algorithmique. Mais si l'on se préoccupe aussi de savoir si la concordance aura encore lieu lorsque le champ d'investigation sera étendu, il est souhaitable d'examiner si les symboles employés par l'interlocuteur sont issus d'un même fond. Il ne suffira plus alors d'apprendre les signes linguistiques et leurs liaisons, mais il faudra partir du même matériel au niveau inférieur et examiner si l'on parviendra à partir de là, à développer les mêmes domaines de symboles supérieurs.

L'élaboration d'un cours de géométrie.

La première partie d'un cours de géométrie doit permettre d'atteindre le premier niveau de pensée, que nous intitulerons celui de l'*aspect de la géométrie*. Le but de l'enseignement est le suivant : les figures géométriques telles que le cube, le carré, le losange, le rectangle, le cercle, etc... doivent devenir des porteurs de leurs propriétés. Un losange n'est plus reconnu à son apparence, mais, par exemple, au fait que les côtés sont égaux ou que les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu, ou à ces deux propriétés réunies.

On emploie un ensemble de figures géométriques concrètes et des matériaux grâce auxquels les élèves réaliseront eux-mêmes ces figures. *Les manipulations que les élèves effectueront* avec ce matériel seront la base du nouveau réseau relationnel en voie de formation.

La deuxième partie du cours doit permettre d'atteindre le deuxième niveau de pensée, que nous intitulerons l'*essence de la géométrie* ou l'*aspect des Mathématiques*. Le but de l'enseignement est maintenant d'apprendre les relations qui lient les propriétés des figures. Par exemple : la somme des angles d'un triangle vaut 180° ; les angles alternes-internes, formés par deux droites parallèles et une sécante, sont égaux. De plus, on commence, durant cette période, à ordonner logiquement les propriétés des figures. La première propriété citée plus haut devient antécédente de la suivante : la somme des angles d'un quadrilatère convexe vaut 360°.

Le matériel peut être constitué d'une série de triangles ou de quadrilatères égaux au moyen desquels les élèves essayeront de construire un pavage. Ici encore, les élèves apprennent à déceler une structure en manipulant le matériel. Ils *voient* apparaître dans le pavage réalisé au moyen de triangles égaux des systèmes de droites parallèles, des parallélogrammes, des trapèzes, des hexagones ayant des centres de symétrie, etc... Ce matériel fournit plus tard, de façon naturelle, la droite de construction qui permet de démontrer au moyen d'angles alternes-internes que la somme des angles d'un triangle vaut 180°.

La troisième partie du cours doit permettre d'atteindre le troisième niveau, celui du *discernement en géométrie*, de *l'essence des Mathématiques*.

Le but de l'enseignement est maintenant de comprendre ce que signifie ordonner logiquement (qu'entendons-nous par : Telle propriété « précède » telle autre propriété ?).

Le matériel est constitué par les théorèmes de géométrie eux-mêmes. En ordonnant ces théorèmes apparaîtra le lien entre un théorème et ses réciproques, pourquoi des axiomes et des définitions sont indispensables, quand une condition est nécessaire et quand elle est suffisante. Les élèves pourront essayer maintenant d'ordonner logiquement de nouveaux domaines, par exemple, lorsqu'ils étudieront pour la première fois le cylindre. L'analyse de ce qu'ils perçoivent leur apprendra que la surface cylindrique contient des droites et des circonférences. Après avoir énoncé une définition, ils pourront essayer de démontrer l'existence de droites et de circonférences.

Si le cours pouvait être poursuivi plus avant (mais cela sera généralement impossible dans l'enseignement moyen), il atteindrait le quatrième niveau, celui du *discernement en Mathématiques*. Le but de l'enseignement serait, à ce niveau, d'analyser en quoi consiste l'activité du mathématicien et en quoi elle diffère de l'activité

déployée dans d'autres disciplines. Quelqu'un ne peut atteindre ce quatrième niveau que lorsqu'il est tellement familiarisé avec les démarches du mathématicien, qu'il exécute celles-ci automatiquement. Il s'est formé chez lui des valences telles qu'une démarche entraîne les autres. Et ce n'est qu'alors qu'une intégration de ces démarches est possible, permettant à l'homme d'embrasser la structure de l'activité en Mathématiques.

Mais une pareille intégration se produit déjà lors de la transition d'un niveau de pensée à un niveau supérieur. Au cours du passage du niveau de base au premier niveau, c'est la manipulation des figures qui fait naître une structure. Celle-ci alimente la pensée au premier niveau. Ainsi les figures deviennent de nouveaux symboles définis par leurs relations avec d'autres symboles.

Au premier niveau le contexte diffère de celui du niveau de base. L'action développée dans ce nouveau contexte fournit une intégration qui rend possible l'accès au deuxième niveau et ainsi de suite.

Le professeur qui, délibérément, s'efforce d'amener ses élèves d'un niveau à l'autre, les met en mesure de développer eux-mêmes un système déductif et de déceler des fautes dans un raisonnement déductif. En agissant ainsi, le professeur n'impose pas les domaines où la pensée s'exercera, mais aide ses élèves à les préciser eux-mêmes. Cela ne signifie pas, comme il a été signalé déjà plus haut, qu'il laissera à l'élève le soin de tout découvrir, mais qu'il exigera de lui une activité particulière qui, dans chacune des cinq phrases, est autrement dirigée. Une application des principes énoncés ici n'entraîne sûrement pas un allégement de la tâche du professeur. Mais il aura la satisfaction de savoir ce qu'il fait et de mieux comprendre les réactions des élèves.

L'enseignement d'un système déductif exige avant tout de la patience. Ce système n'existe qu'au troisième niveau de pensée, son essence n'est perçue qu'au quatrième niveau. Il peut paraître tentant d'édifier la géométrie à partir des transformations du plan, mais alors on se fixe à nouveau comme but de construire un système déductif. On ne peut confondre cette édification avec l'élaboration de la pensée géométrique. Si l'on prend les transformations comme point de départ, on suppose déjà l'existence d'un domaine de pensée préexistant. Quiconque est trop pressé, réduit son propre domaine de symboles, chez les enfants, à des symboles intuitifs qui se situent à un niveau bien inférieur et qui n'ont pas la signification qu'il leur confère. En l'occurrence, on forme des types algorithmiques, c'est-à-dire des esprits capables d'appliquer les algorithmes de façon satisfaisante sans que, pour autant, ils connaissent suffisamment leur contenu. On enseigne dans ce cas de la matière sans valeur formative suffisante.

Quand on dirige trop vite l'enseignement vers le réseau relationnel mathématique, parce qu'on dédaigne d'enseigner le réseau de relations géométriques, on risque de manquer les Mathématiques pour jamais. Ce qu'on atteint, c'est un réseau de relations verbales dans lequel de nouvelles opérations sont impossibles. On trouve l'exemple d'une telle erreur dans l'enseignement des fractions en Hollande. Par cet enseignement, on constitue un réseau relationnel verbal. Pour la plupart des élèves, les opérations avec les fractions sont tout à fait incompréhensibles. Que les professeurs réalisent profondément que dans l'enseignement le réseau relationnel des élèves vaut mieux que celui des professeurs !

L'essentiel de la notion de niveau de pensée réside dans la constatation que, dans chaque discipline scientifique, il est possible de penser et de raisonner à différents niveaux et que ce raisonnement fait appel à des langages différents. Ces langages usent parfois des mêmes signes linguistiques, mais ceux-ci n'ont pas alors la même signification et sont reliés de façon différente aux autres signes linguistiques. Cette circonstance constitue une entrave à l'échange de vues qui s'établit entre le professeur et l'élève à propos de la matière enseignée. Elle peut être considérée comme le problème fondamental de la didactique.