THÉORIE DE L'INTÉGRATION (III)

par A. Revuz

Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers *

Troisième partie

L'intégrale comme forme linéaire

Nous avons reconnu dans la 1re et la 2e partie que l'intégrale apparaissait toujours comme une forme linéaire continue sur un espace vectoriel topologique.

La question que nous allons étudier est maintenant la suivante : dans quelle mesure cette propriété est-elle caractéristique de l'intégrale, et dans quelle mesure la théorie de l'intégration peut-elle être présentée comme une théorie de prolongement de formes linéaires ?

I. Le théorème de Riesz.

C'est, historiquement, la première réponse aux questions posées ci-dessus, et elle semble bien être restée théoriquement la plus importante.

Sur l'anneau $\mathcal{M}$ des réunions finies de semi-segments $]\alpha, \beta]$ et de segments $[0, x]$, la donnée d'une étendue m de signe quelconque, différence de deux étendues positives, est équivalente à celle d'une fonction à variation bornée g liée à m par $g(x) = m([0, x])$. Les fonctions de $\mathcal{C}[0, 1]$ sont intégrables par rapport à m et $I(f) = \int_0^{+1} f dg = \int_0^{+1} f dm$ est une forme linéaire et continue sur $\mathcal{C}$.

Le théorème de Riesz énonce la réciproque. Plus précisément :

Théorème : Il y a correspondance biunivoque entre les formes linéaires continues I sur $\mathcal{C}[0, 1]$ et les fonctions à variation bornée g sur $[0, 1]$ continues à droite (1).

On a : $$I(f) = \int_0^{+1} f dg.$$

---

* Conférence prononcée le 27 mars 1958 à l'Institut H.-Poincaré, et organisée par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

(1) On vérifie aisément qu'en un point de discontinuité de g, n'intervient dans le calcul de $\int f dg$, où f *est continue*, que $g(x + 0) - g(x - 0)$. Il y a une infinité de fonctions g qui donnent la même valeur $\int f dg$. Imposer la continuité à droite a donc pour but d'assurer la biunivocité de la correspondance entre g et I : elle est choisie, d'autre part, de telle sorte que l'étendue déduite de g soit σ-additive. (Cf. 2e partie).

1° Nous démontrons d'abord que si I est continue, elle est la différence de deux formes linéaires positives ($I(f) \geqslant 0$ si $f \geqslant 0$).

a) Soit $\mathcal{C}^+$ l'ensemble des fonctions positives de $\mathcal{C}$.

Pour $f \in \mathcal{C}^+$, posons $J(f) = \sup \{ I(h) ; 0 \leqslant h \leqslant f \}$.

Comme $|I(f)| \leqslant \|I\| \|f\|$, on a $J(f) < +\infty$ et évidemment $0 \leqslant J(f)$. $J(\lambda f) = \lambda J(f)$ pour $\lambda > 0$ est évident.

Montrons que si $f, g \in \mathcal{C}^+$, on a $J(f+g) = J(f) + J(g)$.

α) Soit $h \in \mathcal{C}^+$ telle que $0 \leqslant h \leqslant f$ et $I(h) > J(f) - \varepsilon$,

$k \in \mathcal{C}^+$ telle que $0 \leqslant k \leqslant g$ et $I(k) > J(g) - \varepsilon$.

On a : $0 < h + k < f + g$, d'où $J(f+g) > J(f) + J(g) - 2\varepsilon$, et ε étant arbitraire: $J(f+g) \geqslant J(f) + J(g)$.

β) Soit $l \in \mathcal{C}^+$ et $0 \leqslant l \leqslant f + g$.

Posons $h = \inf(l, f)$ et $k = l - h$.

On a d'une part $0 < h < f$, d'autre part, si $l(x) \leqslant f(x)$, on a $h(x) = l(x)$, d'où $k(x) = 0$, et si $l(x) > f(x)$, $k(x) = l(x) - h(x)$, c'est-à-dire $k(x) \leqslant f(x) + g(x) - f(x) = g(x)$, donc $0 \leqslant k \leqslant g$.

Or, $J(f+g) = \sup \{ I(l) ; 0 < l < f + g \}$ et $I(l) = I(h) + I(k)$, h et k sont *des* fonctions vérifiant $0 \leqslant h \leqslant f$ et $0 \leqslant k \leqslant g$; *a fortiori*, si on considère *toutes* les fonctions vérifiant ces conditions, aura-t-on :

$$\sup I(l) \leqslant \sup I(h) + \sup I(k),$$

c'est-à-dire : $J(f+g) \leqslant J(f) + J(g)$.

J est donc additive et positivement homogène sur $\mathcal{C}^+$.

b) Définissons alors J sur $\mathcal{C}$, en posant :

$$J(f) = J(f^+) - J(-f^-),$$

où $f^+ = \sup(f, 0) \in \mathcal{C}^+$ et $f^- = \inf(f, 0)$, d'où $-f^- \in \mathcal{C}^+$.

De $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$, $(\lambda f)^- = \lambda f^-$ si $\lambda > 0$,

$(\lambda f)^+ = \lambda f^-$, $(\lambda f)^- = \lambda f^+$ si $\lambda < 0$,

et de $J(\lambda f) = \lambda J(f)$ pour $f \in \mathcal{C}^+$ et $\lambda > 0$, on déduit :

$J(\lambda f) = \lambda J(f)$ pour $f \in \mathcal{C}$ et λ quelconque.

D'autre part :

$f^+ + g^+ \geqslant f + g$ et $f^+ + g^+ \geqslant 0$, donc $f^+ + g^+ \geqslant (f+g)^+$, c'est-à-dire $h = f^+ + g^+ - (f+g)^+ \in \mathcal{C}^+$

En outre :

$$f + g = (f+g)^+ + (f+g)^- = f^+ + g^+ + f^- + g^-,$$

d'où $-f^- - g^- + (f+g)^- = h$.

L'additivité de J sur $\mathcal{C}^+$ entraîne :

$$J[(f+g)^+] = J(f^+) + J(g^+) - J(h),$$

$$J[-(f+g)^-] = J(-f^-) + J(-g^-) - J(h),$$

ce qui implique l'additivité de J sur $\mathcal{C}$.

J étant une forme linéaire, $K = J - I$ en est une autre ; or, si $f \in \mathcal{C}^+$, $J(f) \geqslant I(f)$, donc $K(f) \geqslant 0$, K est aussi une forme linéaire positive, et la décomposition annoncée de I est obtenue.

2° Nous montrons alors que si I est linéaire et positive, il existe g croissante continue à droite telle que $I(f) = \int_0^1 f dg$.

Posons $g(x) = \inf \{ I(f),\ f \in \mathcal{C},\ f > \chi_x \}$, où χ_x est la fonction caractéristique du segment $[0, x]$.

La croissance de g est évidente.

La continuité à droite résulte de ce que :

$$I(f) \leqslant I(f + \varepsilon) \leqslant I(f) + \|I\|\varepsilon$$

et qu'il existe par suite, $\forall\ \varepsilon > 0$, f telle que :

$$g(x) < I(f) < g(x) + \varepsilon \qquad \text{avec } f(t) > 1 \text{ pour } t \in [0, x].$$

Il en résulte que sur un intervalle $(x, x + \eta)$, on a encore $f(t) > 1$, et par suite $g(x) < g(t) < g(x) + \varepsilon$.

Ceci étant, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe pour une fonction $f \in \mathcal{C}$ un découpage Δ de $[0, 1]$, tel que :

$$\left| \int_0^1 f dg - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(x_{i+1}) - g(x_i)] \right| < \varepsilon.$$

Ceci est vrai pour tout découpage plus fin que Δ.

On peut en particulier supposer que Δ est assez fin pour que l'oscillation de f sur les segments $[x_i, x_{i+2}]$ soit inférieur à ε. Pour chaque valeur de i, on peut d'autre part choisir une fonction f_i égale à 1 sur $[0, x_i]$ et décroissant linéairement de 1 à 0 sur $[x_i, t_i]$ où $x_i < t_i < x_{i+1}$ et telle que, $\forall\ \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g x_{i+1}) - g(x_i)] - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [I(f_{i+1}) - I(f_i)] \right| < \varepsilon.$$

Considérons alors la fonction :

$$\varphi = f - \sum_{n-1}^{i=0} f(\xi_i) [f_{i+1} - f_i].$$

Pour $x \in [x_i, t_i]$, elle vaut :

$$\varphi(x) = f(x) - f(\xi_{i-1}) [f_i(x) - f_{i-1}(x)] - f(\xi_i) [f_{i+1}(x) - f_i(x)]$$

Or, l'oscillation de f sur $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ est inférieure à ε, on en déduit que $\varphi(x)$ diffère de moins de ε de :

$$f(\xi_i)[1 - [f_i(x) - f_{i-1}(x)] - [f_{i+1}(x) - f_i(x)] = f(\xi_i) [1 - f_{i+1}(x)] = 0.$$

Pour $x \in [t_i, x_{i+1}]$, on a :

$$\varphi(x) = f(x) - f(\xi_i).$$

Donc $\forall\ x \in [0, 1] \quad |\varphi(x)| < \varepsilon$,
et par suite : $\quad |I(\varphi)| \leqslant \|I\varepsilon\|$.

En rapprochant toutes les inégalités, on a :

$$\left| \int_0^{+1} f dg - \mathrm{I}(f) \right| < (\|\mathrm{I}\|) + 2\varepsilon,$$

ce qui prouve l'égalité annoncée, ε étant arbitraire.

Le résultat précédent est vrai dans des circonstances beaucoup plus générales que nous indiquons ci-dessous :

X localement compact ; $\mathcal{M}$ σ-anneau sur X contenant tous les compacts ; μ : mesure positive sur $\mathcal{M}$ telle que :

1° $A \subset \mathcal{M}$, $\mu A = 0$; $B \subset A \Rightarrow B \subset \mathcal{M}$, $\mu B = 0$ (mesure complète),

2° $\forall K \subset X$, K compact

$$\mu K = \inf \{ \mu K_1 \; ; \; K \subset \overset{\circ}{K}_1 \}$$

K_1 : compact, $\overset{\circ}{K}_1$ intérieur de K_1.

La différence de deux telles mesures est dite une mesure de Radon.

$\mathcal{C}$ (X) : espace des fonctions continues sur X à supports compacts.

I : forme linéaire sur $\mathcal{C}$ (X), continue en ce sens que, pour tout compact K, sa restriction à $\mathcal{C}$ (X, K) (fonctions dont le support est inclus en K) est continue pour la norme :

$$\|f\| = \sup \{ |f(x)|, x \in K \}.$$

Dans ces conditions, on a le

THÉORÈME : Il y a correspondance biunivoque entre les mesures de Radon sur X, et les formes linéaires continues sur $\mathcal{C}$ (X) ; on a :

$$\int_x^{\cdot} f d\mu = \mathrm{I}(f),$$

et si I est positive, $\mu(K) = \inf \{ \mathrm{I}(f) \; ; \; \chi_K < f \}$.

II. ESSAI DE PRÉSENTATION « PUREMENT FONCTIONNELLE » DE L'INTÉGRALE DE RIEMANN.

Nous avons trouvé que $\mathcal{M}$ étant un anneau sur X, et m une étendue sur $\mathcal{M}$, $\mathcal{J}$ (X, $\mathcal{M}$, m) était un espace vectoriel réticulé. Cette propriété était déjà possédée par l'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ des combinaisons linéaires finies des fonctions caractéristiques des ensembles de $\mathcal{M}$, I étant définie pour ces fonctions par :

$$\mathrm{I}(\Sigma \lambda_i \chi_{A_i}) = \Sigma \lambda_i m A_i.$$

On peut alors songer à refaire la théorie de l'intégrale de Riemann de la manière suivante :

Sont donnés au départ :

1° un espace vectoriel réticulé V d'applications de X dans R qui ou bien contient des constantes (c'est le cas de $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ si $X \in \mathcal{M}$), ou bien avec f contient inf (1, f) ;

2° une application linéaire positive I de V dans R.

A partir de là, on peut considérer l'espace $\widehat{V}$ des fonctions f telles que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, g, h \in V$, avec :

$$g \leqslant f \leqslant h \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I}(h - g) < \varepsilon.$$

On vérifie immédiatement que $\widehat{V}$ a les mêmes propriétés algébriques que V et que I se prolonge en une forme linéaire sur $\widehat{V}$.

A-t-on l'équivalent exact de l'intégration de Riemann ? Autrement dit, peut-on trouver un anneau $\mathcal{M}$ et une étendue positive m sur $\mathcal{M}$, telle que $\widehat{V} = \mathcal{J}(X, \mathcal{M}, m)$ et $I(f) = \int f dm$?

Si $\mathcal{M}$ existe, c'est l'anneau des ensembles dont les fonctions caractéristiques appartiennent à $\widehat{V}$: il est immédiat que ces ensembles constituent bien un anneau et que $I(\chi_A)$ est une étendue positive sur cet anneau. Mais, on a en général l'inclusion stricte $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, m) \subset \widehat{V}$, la restriction de I à $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, m)$ étant bien alors $\int f dm$. Quant à V et $\mathcal{J}$, ils peuvent ne pas être comparables.

Exemple : V est l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ nulles en 0 et dérivables en 0. On prend $I(f) = f'(0)$. On vérifie aisément que $\mathcal{M}$ est l'anneau des complémentaires des voisinages de 0, que m est nulle, que $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, m)$ est constitué des fonctions bornées nulles sur un voisinage de 0. $\widehat{V}$ est constitué des fonctions bornées nulles en 0, et dérivable en 0.

On voit donc que les hypothèses faites donnent une théorie « analogue » à celle de l'intégration de Riemann, mais ne s'y ramenant pas complètement.

Il est cependant intéressant d'étudier les relations entre les espaces $\mathcal{J}$ et $\widehat{V}$.

Proposition 1. — Si $f > 0$, $f \in \widehat{V}$, on a $f^{-1}(]\lambda, \infty[) \in \mathcal{M}$, sauf pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs exceptionnelles de λ.

En effet, soit $\Phi\lambda = f^{-1}(]\lambda, \infty[)$.

Posons $f_\lambda = f - \inf(f, \lambda)$, on a $Q_\lambda = f^{-1}{}_\lambda(]0, \infty[)$, et pour $\varepsilon > 0$, $k > 0$,

$$\inf\left\{\frac{f_\lambda}{\varepsilon}, 1\right\} \leqslant \chi_{Q_\lambda} \leqslant \inf\left\{\frac{f_\lambda - k}{k}, 1\right\}$$

Posons :

$$\mathcal{J}(\lambda) = \sup_\varepsilon I\left[\inf\left\{\frac{f_\lambda}{\varepsilon}, 1\right\}\right]$$

$$K(\lambda) = \inf_k I\left[\inf\left\{\frac{f_\lambda - k}{k}, 1\right\}\right]$$

On a $\mathcal{J}(\lambda) \leqslant K(\lambda)$, et l'égalité implique $Q_\lambda \in \mathcal{M}$.

Or, $\lambda < \mu \implies K(\mu) \leqslant \mathcal{J}(\lambda)$,

car, si $k < \mu - \lambda$,

$$f_{\mu - k} < f_\lambda \text{ et } \inf\left\{\frac{f_{\mu - k}}{k}, 1\right\} < \inf\left\{\frac{f_\lambda}{k}, 1\right\}$$

Les intervalles $]\mathcal{J}_\lambda, K_\lambda[$ sont donc deux à deux disjoints et par suite l'ensemble de ceux qui ne sont pas vides est au plus dénombrable.

Remarque : La proposition précédente donne immédiatement la réciproque du théorème sur l'identité entre les fonctions mesurables bornées et $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu)$. ($\mathcal{M}$: σ-anneau, μ : mesure).

Dans cette situation, en effet, $V = \mathcal{G}(\mathcal{M})$ où $\mathcal{M}$ est un σ-anneau. Or, $Q_\lambda = \bigcap_n Q_{\lambda - \varepsilon_n}$, où ε_n est une suite décroissante, tendant vers 0. Mais on peut choisir ε_n de manière que $Q_{\lambda - \varepsilon_n} \in \mathcal{M}$, il en sera alors de même de Q_λ.

Appelons ici mesurables les fonctions telles que :

$f^{-1}(]\alpha, \beta] - \{0\}) \in \mathcal{M}$, sauf pour un ensemble dénombrable D de valeurs de α et β. On a alors la

Proposition 2. — $\mathcal{J}$ est constitué des fonctions f mesurables bornées ; nulles hors d'un ensemble $A_f \in \mathcal{M}$.

Condition nécessaire. — C'est évident pour $f > 0$, en vertu de la proposition 1. Mais $\sup(f, 0)$ et $-\inf(f, 0)$ sont intégrables en même temps que f et sont positives.

Condition suffisante. — Il suffit d'utiliser les sommes de Lebesgue, en choisissant les l_i hors de l'ensemble D.

III. Présentation purement fonctionnelle de l'intégrale de Lebesgue.

Adjoignons aux hypothèses faites dans le paragraphe précédent sur l'espace V, et sur la forme linéaire I, la condition suivante :

$$|f| \leqslant \sum_{n \in N} |f_n| \implies I(f) \leqslant \sum_{n \in N} I(|f_n|).$$

Le sens de cette hypothèse est d'introduire une certaine continuité pour I. On voit qu'elle est satisfaite si V est l'espace vectoriel sur R engendré par les fonctions caractéristiques d'un anneau et si I est défini sur V à partir d'une étendue positive σ-additive [et *a fortiori* si on part d'un σ-anneau et d'une mesure positive]. Elle l'est également si V est l'espace $\mathcal{C}(X)$ des fonctions continues à support compact défini sur X localement compact et si I est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(X)$.

Cette fois, il est possible de reconstituer assez rapidement la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue et de mettre en lumière celles de ses propriétés qui à l'expérience se sont révélées les plus importantes.

Le premier point est la définition pour toute fonction $f \in \mathcal{G}(X, \bar{R})$ [application de X dans $\bar{R}$, valeurs $+\infty$ et $-\infty$ admises] de la quantité :

$$N(f) = \inf \left\{ \sum_1^\infty I(|f_n|) ; \ |f| \leqslant \sum_1^\infty |f_n| ; \ f_n \in V \right\}$$

on a $0 \leqslant N(f) \leqslant +\infty$

et $N\left(\sum_{i \in N} f_i\right) \leqslant \sum_{i \in N} N(f_i)$.

On remarquera l'analogie (qui est profonde) avec la mesure extérieure.

Soit G l'ensemble des f pour lesquelles $N(f) < +\infty$. Il est clair que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$, qu'il contient V et que N est une semi-norme pour G.

Le résultat fondamental est le suivant :

THÉORÈME : G est complet.

On dira qu'une partie de X est de mesure nulle si, pour sa fonction caractéristique χ, $N(\chi) = 0$.

Soit $\{f_n\}$ une suite de Cauchy dans G. De $N(f_n) < \infty$, il résulte que l'ensemble des points où f_n n'est pas fini est de mesure nulle et qu'on ne modifie pas $N(f_n)$ en supposant f_n partout finie.

On peut, en prenant une sous-suite de $\{f_n\}$, supposer qu'on a :

$$N(f_{n+1} - f_n) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Considérons alors :

$$g = |f_1| + \sum_1^\infty |f_{n+1} - f_n|.$$

$$\text{On a } N(g) \leqslant N(f_1) + \sum_1^\infty N(f_{n+1} - f_n) = N(f_1) + 1.$$

Il en résulte que $g \in G$, que par suite g est finie presque partout (1) et que la série $|f_{n+1} - f_n|$ converge presque partout, donc que la suite f_n converge presque partout.

Soit $f = \overline{\lim} f_n$, on a donc en fait $f(x) = \lim f_n(x)$ presque partout et en tous cas $|f| \leqslant g$.

D'où $N(f) \leqslant N(g)$, c'est-à-dire $f \in G$.

D'autre part :

$$|f - f_k| \leqslant \sum_{n=k}^\infty |f^{n+1} - f^n|$$

$$N(f - f_k) = \sum_{n=k}^\infty (f_{n+1} - f_n) < \frac{1}{2^{k-1}}$$

Donc, la suite f_n (et par conséquent la suite de Cauchy initialement donnée) converge vers f.

---

(1) C'est-à-dire sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle.

On peut définir l'application $\mathcal{J}$ de G dans R par la formule :

$$\mathcal{J}(f) = N(f^+) - N(f^-) ;$$

sa restriction à V est I.

$\mathcal{J}$ n'est pas linéaire sur G en général, mais elle est continue. En effet :

$$\mathcal{J}(f) - \mathcal{J}(g) = N(f^+) - N(f^-) - N(g^+) + N(g^-),$$

$$\mathcal{J}(f) - \mathcal{J}(g) \leqslant |N(f^+) - N(g^+)| + |N(f^-) - N(g^-)| \leqslant 2N(f-g)$$

(conséquence de l'inégalité triangulaire).

Mais puisque I est linéaire sur V, la restriction de $\mathcal{J}$ à l'adhérence $\overline{V}$ de V dans G sera une forme linéaire et continue sur $\overline{V}$.

N n'étant en général qu'une semi-norme sur $\overline{V}$, on passe au quotient (relation d'équivalence $N(f-g) = 0$), pour obtenir un espace vectoriel normé complet L^1 (qui contient un sous-espace isomorphe à V, lorsque « $N(f) = 0$ pour $f \in V$ », entraîne $f = 0$, ce qui est souvent le cas pratiquement).

Comme $N(f-g) = 0$ implique $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(g)$, $\mathcal{J}$ prend la même valeur pour toutes les fonctions d'une même classe et fournit sur $\overline{V}$ une forme linéaire continue.

Nous n'allons pas étudier ici toutes les propriétés de $\overline{V}$ et $\mathcal{J}$, mais uniquement établir que $\mathcal{J}$ est sur $\overline{V}$. une intégrale de Lebesgue (au sens de la 2° partie de cet exposé).

Désignons par V^+ l'ensemble des fonctions positives de $\overline{V}$.

THÉORÈME 1 : La somme f d'une série de fonctions $f_n \in \overline{V}^+$ appartient elle-même à $\overline{V}^+$, si et seulement si la série $\mathcal{J}(f_n)$ converge. On a alors :

$$\mathcal{J}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{J}(f_n).$$

1) *Condition nécessaire :* Soit $f \in \overline{V}$ et $f = \sum_{n-1}^{\infty} f_n$, $f_n \in \overline{V}$.

De $f_n > 0$, on déduit $\mathcal{J}(f_n) = N(f_n)$.

Mais $N\left(\sum_{m}^{1} f_n\right) \leqslant N(f) < +\infty$.

La série de terme général $\mathcal{J}(f_n)$ est donc convergente. D'autre part, $\sum_{1}^{\infty} N(f_n) \leqslant N(f)$, ce qui entraîne l'égalité, en vertu de la sous-additivité dénombrable de N. On a bien $\mathcal{J}(f) = \sum_{1}^{\infty} \mathcal{J}(f_n)$

2) *Condition suffisante :* De $f = \sum_1^\infty f_n$, et de $\mathcal{J}(f_n) = N(f_n)$, on déduit :

$$N(f) \leqslant \sum_1^\infty N(f_n) = \sum_1^\infty \mathcal{J}(f_n) < +\infty. \text{ D'où } f \in G.$$

Mais $N(f - \sum_1^m f_n) \leqslant \sum_{m+1}^\infty N(f_n) = \sum_{m+1}^\infty \mathcal{J}(f_n)$, donc $\sum_1^m f_n$ converge vers f, par suite $f \in V$ et $\mathcal{J}(f) = \lim \sum_1^m \mathcal{J}(f_n)$.

THÉORÈME 2 : Si f et g sont des fonctions de $\bar{V}+$, il en est de même de $\inf fg$.

Soient, en effet, des fonctions f_n et g_n de V+ qui convergent (suivant N) vers f et g. On sait que $\inf f_n g_n \in V+$.

Or, $|\inf fg - \inf f_n g_n| \leqslant \sup \{ |f - f_n|, |g - g_n| \}$.

Par suite, $N(\inf fg - \inf f_n g_n) \leqslant \sup (N(f_n - f_n), N(g - g_n))$, ce qui prouve que $\inf fg \in V$.

Remarque : On démontrerait de même que si $\lambda \in R+$ et $f \in \bar{V}+$, $\inf(f, \lambda) \in \bar{V}+$.

Soit $\mathcal{C}$ la famille des ensembles dont les fonctions caractéristiques appartiennent à $\bar{V}$. On a le

THÉORÈME 3 : La famille $\mathcal{C}$ est un σ-anneau.

C'est une conséquence immédiate des deux théorèmes précédents.

THÉORÈME 4 : Si $f \in \bar{V}$, $E_\lambda = f^{-1}([\lambda, \infty[) \in \mathcal{C} - (\lambda > 0)$.

En effet, $\varphi_\lambda = \inf(f+, \lambda) \in \bar{V}+$, et si χ_λ est la fonction caractéristique de E_λ, on a :

$$\psi_\varepsilon = \inf\left[\frac{\varepsilon}{1}\varphi_\lambda, 1\right] \leqslant \chi_\lambda$$

et ψ_ε tend en croissant vers χ_λ quand ε tend vers 0.

Or, $\lambda \chi_\lambda \leqslant f^+$, par suite $N(\chi_\lambda) < +\infty$. Le théorème 1 permet de conclure.

Corollaire : Si $0 \notin [\lambda, \mu[$, et si $f \in \bar{V}$, on a :
$f^{-1}([\lambda, \mu[) \in \mathcal{C}$, pour $\lambda, \mu \in R$.

THÉORÈME 5 : Si l'on pose $I(\chi_E) = \mu E$ pour $E \in \mathcal{C}$, $\mathcal{J}(f)$ est obtenu comme sommes de Lebesgue relativement à μ.

Soit, en effet, $l_i[- \infty < i < + \infty]$, une suite croissante, vérifiant $l_0 = 0$, et $l_{i+1} - l_i = \varepsilon$.

Soit $E_i = f^{-1}([l_i, l_{i+1}])$ pour $i \neq 0$ $\quad \mu E_i = \mu_i$

$E_0 = f^{-1}(]l_0, l_1[)$ $\quad \mu E_0 = \mu_0$

On a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} l_i \chi_{Ei} < f^+, \text{ d'où } \sum_{i=0}^{\infty} l_i \mu_i < \mathcal{H}(f^+)$$

$$-\sum_{i=-1}^{-\infty} l_i \chi_{Ei} < f^-, \quad -\sum_{i=-1}^{-\infty} l_i \mu_i < \mathcal{H}(f^-).$$

La série $\sum_{-\infty}^{+\infty} l_i \mu_i$ est absolument convergent et vérifie

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} l_i \mu_i < \mathcal{H}(f) < \sum_{-\infty}^{+\infty} l_{i+1} \mu_i < \sum_{-\infty}^{+\infty} l_i \mu_i + \varepsilon \mathcal{H}(f)$$

ce qui établit le théorème.

Conclusion

Nous pensons avoir montré que les théories « modernes » de l'intégration ne s'opposent pas aux théories antérieures : la Science Mathématique ne se renie jamais, mais elle met l'accent sur ce qui n'était qu'inconscient ou implicite dans la Mathématique antérieure : ici, la linéarité et la continuité de l'intégrale. Il semble donc raisonnable de souhaiter que tout exposé actuel de la question — fût-ce au stade le plus élémentaire — mette en lumière ces propriétés fondamentales et, entre les diverses voies possibles, choisisse celles qui font intervenir le plus directement l'aspect linéaire du problème.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

H. Lebesgue. — *Leçons sur l'intégration*, Paris, 1928.
P. Halmos. — *Measure Theory*, New-York, 1950.
M. H. Stone. — Notes on Integration. *Proc. Mat. Ac. Sc. U.S.A.*, 34, 1948, et 35, 1949.
L. H. Loomis. — Linear functionals and content. *Amer. J. Math.*, t. 76, 1954, p. 168-182.
N. Bourbaki. — *Fonctions d'une variable réelle*, Paris, 1949. *Intégration*, Paris, 1952.
M. Zamansky. — *Introduction à l'algèbre et à l'analyse moderne*, 1958.
R. Deheuvels. — L'intégrale de Lebesgue. *Annales de l'Institut Fourier*, t. VII, 1957, p. 383-393.