38e Année — N° 198 Mars 1959

BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

I. ÉTUDES

THÉORIE DE L'INTÉGRATION (II)

par A. REVUZ
Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers *

Les mesures dénombrablement additives et l'intégrale de Lebesgue

I. LES σ-ANNEAUX ET LES MESURES σ-ADDITIVES

1) *Idée initiale. Position du problème.*

Etant donné un anneau $\mathcal{M}$ et une étendue positive m sur $\mathcal{M}$, nous avons vu que le principe d'Eudoxe ne pouvait être appliqué avec profit qu'une seule fois, et qu'il pouvait exister des ensembles non quarrables. Par exemple, sur le segment $[0, 1]$, partant des intervalles et de leur longueur, on trouve que l'ensemble des rationnels n'est pas quarrable. Il est cependant dénombrable, et chaque point, comme segment dont les extrémités sont confondues, a une longueur nulle : la série de terme général nul a une somme nulle. Il est « naturel » alors d'attribuer zéro comme « longueur » à l'ensemble des rationnels, et également d'attribuer comme « longueur » à tout ouvert O inclus dans $[0, 1]$, la somme s, inférieure ou égale à 1, de la série à termes positifs dont les termes sont les longueurs des intervalles deux à deux disjoints dont l'ouvert est réunion et d'attribuer $1 - s$ comme longueur au fermé $[0, 1] - O$.

Mais il ne peut être question d'étendre la « longueur » à certains ensembles particuliers seulement, s'il s'agit de créer une théorie utilisable.

L'idée à dégager des exemples précédents est la suivante : une réunion dénombrable d'ensembles quarrables A_i deux à deux disjoints doit recevoir une mesure, somme de la série dont les termes sont les étendues mA_i.

Pour préciser, donnons deux définitions :

Un σ-anneau sur un ensemble X est une partie $\mathcal{M}$ de $\mathfrak{p}(X)$ telle que, N étant l'ensemble des entiers positifs :

* Conférence prononcée le 20 mars 1958, à l'Institut Henri-Poincaré, et organisée par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

$$A_i \in \mathcal{M},\ i \in N, \implies \bigcup_{i \in N} A_i \in \mathcal{M}$$

$$A, B \in \mathcal{M} \implies A - B \in \mathcal{M}$$

Une mesure (ou pour préciser une mesure dénombrablement additive ou σ-additive) est une application μ de $\mathcal{M}$ dans R telle que :

si $A_i \cap A_j = \emptyset$ quand $i \neq j$

on ait $\mu\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right) = \sum_{i \in N} \mu A_i$.

Nous nous limiterons d'abord à des mesures positives, mais nous accepterons la valeur $+\infty$ pour une mesure.

Avec ces définitions, nous pouvons poser les problèmes :

α) Existe-t-il des σ-anneaux ?

β) Existe-t-il des mesures ?

γ) Un anneau $\mathcal{M}_0$ et une étendue m sur $\mathcal{M}_0$ étant donnés, existe-t-il un σ-anneau $\mathcal{M}$ contenant $\mathcal{M}_0$ et une mesure μ sur m dont la restriction à $\mathcal{M}_0$ soit m ?

La réponse à la question α) est immédiate : $\mathfrak{p}(X)$ est un σ-anneau. De plus, l'intersection d'une famille quelconque de σ-anneaux est un σ-anneau ; étant donné une partie $\mathcal{Y} \neq \emptyset$ quelconque de $\mathfrak{p}(X)$, il existe donc un plus petit σ-anneau non vide contenant $\mathcal{Y}$: ensemble non vide (il contient $\mathcal{Y}$), intersection des σ-anneaux contenant $\mathcal{Y}$.

Les réponses aux questions β) et γ) que nous allons donner maintenant sont nettement moins aisées.

2) *Mesure extérieure. Ensembles mesurables.*

Partons d'un anneau $\mathcal{M}_0$ et d'une étendue positive m sur $\mathcal{M}_0$. On peut essayer de remédier aux insuffisances du principe d'Eudoxe en substituant des réunions dénombrables aux réunions finies :

Nous considérerons donc les ensembles A inclus dans au moins une réunion dénombrable d'ensembles $\alpha_i \in \mathcal{M}_0$, soit $H(\mathcal{M}_0)$ l'ensemble de ces A.

Les ensembles $\bigcup_{i \in N} \alpha_i$ joueront pour A le rôle des α du principe d'Eudoxe [cf. 1re partie].

Nous sommes donc conduits à définir une application :

m^* de $H(\mathcal{M}_0)$ dans $\bar{R}_+$ ($[0, +\infty]$) par

$$m^* A = \inf \left\{ \sum_{i \in N} m\alpha_i ;\ A \subset \bigcup_{i \in N} \alpha_i,\ \alpha_i \in \mathcal{M} \right\}^{(1)}$$

m^* sera dite une mesure extérieure.

(1) A noter qu'on a toujours $m^* \emptyset = 0$.

Sa propriété fondamentale est sa *sous-additivité ;*

il est clair que $A_i \in H(\mathcal{M}_0)$, $i \in N \Longrightarrow \bigcup_{i \in N} A_i \in H(\mathcal{M}_0)$ (1)

et on a alors $m^*\left(\bigcup_{i \in N} A_i\right) \leqslant \sum_{i \in N} m^* A_i$.

Exemple : La mesure extérieure de l'ensemble des rationnels de [0, 1] est nulle (prendre pour α_i un intervalle de longueur $\frac{\varepsilon}{2^i}$ contenant le $i^{\text{ème}}$ des points rationnels rangés dans une suite).

Mais, on ne peut en général trouver d'ensembles jouant le rôle des ensembles β du principe d'Eudoxe. [Par exemple, pour un fermé F de [0, 1] et l'ouvert complémentaire O, on trouve $m^*O = s$, $m^*F = 1 - s$; mais tandis qu'il existe en O des réunions finies d'intervalles dont la borne supérieure des étendues est précisément s, le seul ensemble de $\mathcal{M}_0$ contenu en F est $\emptyset$ si F est totalement discontinu].

A l'origine, étudiant des ensembles E contenus dans [0, 1], Lebesgue remplaça le sup $m\beta$ défaillant du principe d'Eudoxe, par ce qu'il appela la mesure intérieure de E, $m_* E = 1 - m^*E'$ (E' complémentaire de E par rapport à [0, 1]), et définit comme mesurables ceux pour lesquels $m_* E = m^*E$, soit $m^*E + m^*E' = 1$.

Dans la situation plus générale où nous nous sommes placés, on définira comme m^*-mesurables les ensembles $E \in H(\mathcal{M}_0)$ tels que $\forall\ A \in H(\mathcal{M}_0)$, on ait (si E' est le complémentaire de E) :

$$m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E') \quad (2).$$

On peut établir que la mesurabilité s'exprime aussi par (3) : Si $m^*A < \infty$,

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \alpha, \alpha' \in H(\mathcal{M}_0) \text{ avec } A \cap E \subset \alpha \quad A \cap E' \subset \alpha'$$
$$\text{et } m^*(\alpha \cap \alpha') < \varepsilon.$$

Le résultat fondamental de la théorie est énoncé par le

Théorème : *La famille des ensembles m^*-mesurables est un σ-anneau. La restriction μ de m^* à $\mathcal{M}$ est une mesure.*

1° Supposons E et F mesurables.

Mesurabilité de E : $m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E') \quad \forall\ A \in H(\mathcal{M}_0)$.

Nous écrivons la mesurabilité de F, en prenant pour ensemble A : $A \cap E$ et $A \cap E'$; cela donne :

$$m^*(A \cap E) = m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap E \cap F')$$
$$m^*(A \cap E') = m^*(A \cap E' \cap F) + m^*(A \cap E' \cap F')$$

On en déduit : $\forall\ A \in H(\mathcal{M}_0)$.

---

(2) En vertu de la sous-additivité de m^*, on a toujours $m^*\ A \leqslant m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E')$. Il suffit donc de vérifier $m^*\ A \geqslant \ldots$ pour obtenir la mesurabilité de E.

Si $X \in H(\mathcal{M}_0)$ et $m^*X < \infty$, la mesurabilité peut être définie par $m^*E + m^*E' = m^*X$. (La démonstration de cette équivalence utilise la deuxième définition de la mesurabilité).

(3) Ce second énoncé est plus intuitif et plus proche des idées de Lebesgue. Le premier, plus moderne (Caratheodory), conduit à des démonstrations plus simples.

(1) $m^*A = m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap E \cap F') + m^*(A \cap E' \cap F) + m^*(A \cap E' \cap F')$

On remarque que $A \cap E' \cap F' = A \cap (E \cup F)'$ et que si l'on remplace dans (1) A par :

$$A \cap (E \cup F),$$

on obtient :

(2) $m^*[A \cap (E \cup F)] = m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap E \cap F') + m^*(A \cap E' \cap F)$.

D'où finalement :

$$m^*A = m^*[A \cap (E \cup F)] + m^*[A \cap (E \cup F)']$$

$E \cup F$ est mesurable.

2° Remarquant que $E - F = E \cap F'$ et que $(E - F)' = E' \cup F$, on voit en remplaçant dans (1) A par $A \cap (E' \cup F)$ que :

$$m^*(A \cap (E - F)') = m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap E' \cap F) + m^*(A \cap E' \cap F')$$

d'où :

$$m^*A = m^*[A \cap (E - F)] + m^*[A \cap (E - F)']$$

$E - F$ est mesurable.

3° Si E_1 et E_2 sont mesurables et disjoints :

$m^*(A \cap E_1 \cap E_2) = m^*\emptyset = 0$, et (2) donne :

$$m^*[A \cap (E_1 \cup E_2)] = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2).$$

Soient alors E_i, $i \in N$, mesurables avec $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

On a :

$$m^*(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i).$$

Posons : $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. F_n est mesurable et

$$m^*A = m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F'_n) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap F'_n).$$

Si $E = \bigcup_{i \in N} E_i$, $E' \subset F'_n$ et on a : $m^*A \geqslant \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E')$

d'où :

$$m^*A \geqslant \sum_{i \in N} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E') \geqslant m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E')$$

la dernière conclusion étant due à la sous-additivité de m^*. Elle prouve la mesurabilité de E et les égalités :

$$m^*A = \sum_{i \in N} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E') = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E').$$

Remplaçant A par E, on obtient :

$$m^*(E) = \sum_{i \in N} m^*(E_i).$$

REMARQUE : On montre aisément que si $E \in \mathcal{M}$ et $m^*(E) = 0$, alors $\forall F \subset E$, on a $F \in \mathcal{M}$ et $m^*F = 0$. La mesure μ obtenue est alors dite complète (i.e. tout ensemble inclus dans un ensemble mesurable de mesure nulle possède la même propriété).

L'existence d'une mesure σ-additive ne résulte du théorème précédent que si on établit que $\mathcal{M}$ est non vide, ce qui résulte du *théorème :* "$\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$".

Soit, en effet, $E \in \mathcal{M}_0$, $A \in H(\mathcal{M}_0)$ et $\alpha_i \in \mathcal{M}_0$ tels que :

$$A \subset \bigcup_{i \in N} \alpha_i \quad \text{et} \quad \sum_{i \in N} m\alpha_i \leqslant m^*A + \varepsilon$$

on a : $m(\alpha_i \cap E) + m(\alpha_i \cap E') = m\alpha_i$.

D'où :

$$m^*A + \varepsilon \geqslant \sum_{i \in N} m(\alpha^i \cap E) + m\alpha^i \cap E') \geqslant m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E')$$

ce qui, ε étant arbitraire, établit la mesurabilité de E.

La réponse à la question γ est fournie par le théorème.

THÉORÈME : *m est la restriction de μ à $\mathcal{M}_0$, si et seulement si*

$$i \in N, \quad E_i \in \mathcal{M}_0,\ E_i \cap E_j = \emptyset \text{ si } i \neq j,\ \bigcup_{i \in N} E_i = E \in \mathcal{M}_0$$

implique $mE = \sum_{i \in N} mE_i$.

La nécessité de la condition est évidente.

La réciproque résulte de la proposition précédente et du fait que si la condition de l'énoncé est satisfaite, on a $m^*E = mE$ pour $E \in \mathcal{M}_0$.

Soit en effet : $\alpha_i \in \mathcal{M}_0$, $i \in N$ et $E \subset \bigcup_{i \in N} \alpha_i$.

Posons : $\beta_i = \alpha_i \cap E$, on a $\beta_i \in \mathcal{M}_0$ et $E = \bigcup_{i \in N} \beta_i$ et $m\beta_i \leqslant m\alpha_i$.

Posons $E_i = \beta_i - \bigcup_{j<i} \beta_j$, on a $E_i \in \mathcal{M}_0$, $mE_i \leqslant m\beta_i$

et $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$. D'où :

$$mE = \sum mE_i \leqslant \sum m\beta_i \leqslant \sum m\alpha_i$$

ce qui implique $mE \leqslant m^*E$.

L'égalité résulte de ce que E est à lui seul un recouvrement de lui-même.

Une étendue satisfaisant aux conditions de la proposition précédente est dite σ-additive.

Exemple d'étendue non σ-additive :

Prenons pour X le semi-segment $]0, 1]$ et pour $\mathcal{M}_0$ l'anneau des réunions finies de demi-segments $]\alpha, \beta]$. On pose $m(]0, x]) = x + 1$, ce qui permet de définir m sur $\mathcal{M}_0$. On a en particulier :

$$m(]\alpha, \beta]) = \beta - \alpha \text{ si } \alpha \neq 0.$$

On a $m]0, 1] = 2$, mais on remarque que :

$$\left]0, 1\right] = \bigcup_{n \in N} \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$$

$$\text{Or} \quad \sum_{n \in N} m\left(\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) = 1 \neq 2$$

La conclusion subsiste si $X = [0, 1]$ et si on adjoint à $\mathcal{M}_0$ l'ensemble $\{0\}$ avec la mesure 0.

On démontre aisément par contre que pour $X = [0, 1]$ et l'anneau précédent, si l'on pose $m([0, x]) = g(x)$, la condition nécessaire et suffisante pour que m soit σ-additive est que g soit continue à droite.

INTÉGRALE DE LEBESGUE. FONCTIONS MESURABLES BORNÉES.

Nous reprenons exactement la théorie faite dans le cas général pour l'intégrale de Riemann, mais en supposant que $\mathcal{M}$ est un σ-anneau, et en remplaçant l'étendue m par une mesure sur $\mathcal{M}$: soit $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu)$ (4) l'ensemble des fonctions intégrables [au sens de Riemann par rapport à $(\mathcal{M}, \mu)$]. Il est possible de caractériser simplement ces fonctions.

DÉFINITION : Une fonction réelle définie sur X est dite mesurable (par rapport à $\mathcal{M}$) si, quel que soit le semi-segment $]\alpha, \beta]$, on a $f^{-1}(]\alpha, \beta] - \{0\}) \in \mathcal{M}$. (Il est clair qu'on peut remplacer dans cette définition $]\alpha, \beta]$, par $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta[$, $]\alpha, \beta[$, et prendre α, (ou β) infini, car les réunions dénombrables et les différences d'ensemble de $\mathcal{M}$ sont dans $\mathcal{M}$).

THÉORÈME : Il y a identité entre les fonctions mesurables bornées et les fonctions de $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Nous établirons ci-dessous que toute fonction mesurable bornée est intégrable. Soit $[A, B]$ un segment à l'intérieur duquel f prend ses valeurs. Considérons avec LEBESGUE un découpage :

$$l_0 = A < l_1 < \dots l_i < l_{i+1} < \dots < l_n = B \text{ de } [A, B]$$

et les sommes (dites sommes de Lebesgue) :

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} l_i \, m(f^{-1}(]l_i, l_{i+1}])) \qquad \Sigma = \sum_{i=0}^{n-1} l_{i+1} \, m(f^{-1}(]l_i, l_{i+1}]))$$

en remplaçant éventuellement un des ensembles par :

$$f^{-1}(]l_i, l_{i+1}] - \{0\})$$

si $0 \in [A, B]$.

On remarque que les ensembles $f^{-1}(]l_i, l_{i+1}])$ (avec la réserve que l'on vient de faire) constituent une partition de l'ensemble A_f sur lequel f prend des valeurs non nulles, et que si l'on désigne par σ' et Σ' les sommes de Riemann relatives à cette partition, on a :

$$\sigma \leqslant \sigma' \leqslant \Sigma' \leqslant \Sigma$$

---

(4) $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, m)$, dans le cas où m est une étendue, est un sous-espace de l'ensemble des fonctions bornées f nulles hors d'un ensemble $A_f \in \mathcal{M}$ et on avait $mA_f < \infty$, comme pour tout ensemble de $\mathcal{M}$.

Pour une mesure, la restriction $\mu A < \infty$, $\forall A \in \mathcal{M}$ peut être inopportune, aussi est-ce l'ensemble des fonctions considérées *a priori* que nous restreindrons : fonctions bornées f nulles hors d'un ensemble $A_f \in \mathcal{M}$ et de *mesure finie* : $\mu A_f < \infty$.

Or, si $l_{i+1} - l_i < \varepsilon$ pour $i = 1, ..., n-1$, on a :

$$0 < \sum - \sigma < \varepsilon\mu(A),$$

ce qui établit l'intégrabilité de f.

La réciproque que nous établirons dans la 3e partie de cet exposé fait intervenir la structure de σ-anneau de $\mathcal{M}$.

L'intégrale définie sur $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu)$ est dite intégrale de Lebesgue :

$$I(f) = \int_X f \, d\mu.$$

Le théorème précédent a l'intérêt de montrer que l'originalité essentielle de l'intégrale de Lebesgue est de s'appuyer sur un σ-anneau et une mesure σ-additive et que la substitution d'un découpage de l'espace des valeurs de f à une partition de A_f n'affecte que la présentation de l'intégrale et n'a pas l'importance qu'on semble lui avoir d'abord attribuée.

Il est clair que toutes les propriétés démontrées pour $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}_0, m)$ et pour l'intégrale de Riemann sont valables pour $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu)$ et l'intégrale de Lebesgue, ainsi que le fait que si $(\mathcal{M}, \mu)$ est l'extension de $(\mathcal{M}_0, m)$, on a $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu) \supset \mathcal{J}(X, \mathcal{M}_0, m)$, et que l'intégrale de Riemann est la restriction à $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}_0, m)$ de l'intégrale de Lebesgue, forme linéaire sur $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Le fait que l'inclusion soit stricte, résulte d'une remarquable propriété de $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu)$ et de l'intégrale de Lebesgue.

THÉORÈME : Si la suite f_n est constituée de fonctions mesurables bornées avec $|f_n(x)| < K$, $\forall n \in N$; $A(f_n) \subset A \in \mathcal{M}$, avec $\mu A < \infty$ et si la suite converge simplement vers une fonction f, celle-ci est mesurable et bornée et $I(f) = \lim_n I(f_n)$.

La mesurabilité de f résulte de l'égalité :

$$\varphi = \overline{\lim} f_n = \inf_m \sup_{n>m} f_n$$

et de $\overset{-1}{\varphi}([\alpha, \infty[) = \bigcap_m \bigcup_{n>m} \overset{-1}{f_n}([\alpha, \infty[)$.

Pour établir la propriété relative à I, on peut, en remplaçant f_n par $f_n - f$, se ramener au cas où $f = 0$.

Soit alors $F_n = \{x ; x \in A, \exists\, m \geqslant n \, |f_n(x)| > \varepsilon\}$ on a $F_n \in \mathcal{M}$, $F_n \supset F_{n+1}$ et $\bigcap_n F_n = \emptyset$, puisque la suite f_n converge simplement.

Par suite, $\forall\, \varepsilon\ \exists\ n$ tel que $\mu(F_n) < \varepsilon$.

Le théorème de la moyenne permet alors d'écrire :

$$|I(f_n)| < K\mu(F_n) + \varepsilon\mu(A - F_n) < K\varepsilon + \varepsilon\mu A.$$

Pour situer l'importance de ce résultat, remarquons que si $X \in \mathcal{M}$, l'intégrale de Riemann est continue si $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, m)$ reçoit la topologie de la convergence uniforme, tandis que l'intégrale de Lebesgue l'est si $\mathcal{J}$ reçoit la topologie de la convergence simple, topologies qui sont res-

pectivement la plus fine et la moins fine des topologies naturelles que l'on peut définir sur un espace de fonctions numériques.

FONCTIONS SOMMABLES.

On peut plonger $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu)$ dans un espace plus grand auquel I est prolongeable.

Soit $\widehat{\mathcal{J}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ l'ensemble comprenant :

a) les fonctions f positives telles que :

$I(f) = \sup \{ I(g) \; ; \; g \in \mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu), \; 0 < g < f \} < \infty$;

b) les fonctions négatives telles que $-f$ satisfasse à *a*) avec $\widehat{I}(+f) = -\widehat{I}(-f)$;

c) les fonctions de signe quelconque telles que $f^+ = \sup(f, 0)$ et $\inf(f, 0) = f^-$ satisfassent à *a*) et *b*) pour lesquelles on pose :

$\widehat{I}(f) = \widehat{I}(f^+) + I(f^-)$.

On vérifie aisément que $\widehat{\mathcal{J}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ (ensemble des fonctions *sommables*) a toutes les propriétés algébriques de $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu)$ qu'il contient.

Pour $f \in \widehat{\mathcal{J}}(X, \mathcal{M}, \mu)$, il existe encore $A_f \in \mathcal{M}$ tel que f soit nulle hors de A_f, mais on ne peut plus garantir que $\mu A_f < \infty$. Mais, on peut définir $\hat{I}(f)$ par des sommes de Lebesgue en faisant varier les nombres l_i de $-\infty$, à $+\infty$, σ et $\sum$ étant alors des sommes de séries absolument convergentes. On peut de manière équivalente définir $\widehat{I}(f)$ à partir de sommes (généralisant les sommes de Riemann) définies à partir de partitions dénombrables de A_f en ensembles A_i telles que les séries $\sum_i \sup \{ f(x) \; ; \; x \in A_i \} \mu A_i$ et $\sum_i \inf \{ f(x) \; ; \; x \in A_i \} \mu A_i$ soient absolument convergentes.

Les propriétés de linéarité et de croissance de $\widehat{I}$ (dont la restriction à $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, \mu)$ est I) sont conservées. Sa « continuité » est décrite par les théorèmes suivants, que nous énoncerons sans démonstration :

I. Si $f_n, g \in \widehat{\mathcal{J}}(X, \mathcal{M}, \mu)$, si $|f_n| < g$, et si f_n converge simplement vers f, $f \in \widehat{\mathcal{J}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ et

$$\widehat{I}(f) = \lim \widehat{I}(f_n).$$

II. Si $f_n \in \widehat{\mathcal{J}}(X, \mathcal{M}, \mu)$, si $f_n < f_{n+1}$ et si $\lim \widehat{I}(f_n)$ existe, il existe une fonction $f \in \widehat{\mathcal{J}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ telle $\lim f_n(x) = f(x)$, sauf peut-être pour $x \in A_0$, $A_0 \in \mathcal{M}$ et $\mu A_0 = 0$, et $\lim \widehat{I}(f_n) = I(f)$.

III. $\widehat{I}(|f|)$ est une semi-norme pour $\widehat{\mathcal{J}}(X, \mathcal{M}, \mu)$.

L'espace normé correspondant est complet : espace $L_1(X, \mathcal{M}, \mu)$.

CAS DES MESURES DE SIGNES QUELCONQUES.

On démontre que toute mesure μ prenant les deux signes peut s'écrire :

$\mu = \mu_1 - \mu_2$, où μ_1 et μ_2 sont toutes deux positives. Pour toute fonction telle que $\int f d\mu_1$ et $\int f d\mu_2$ existe, on pose :

$$\int f d\mu = \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2.$$

Les propriétés des fonctions intégrables et des intégrales s'étendent sans difficulté.
