THÉORIE DE L'INTÉGRATION

par A. Revuz

Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers (*)

La théorie de l'intégration est une des plus vieilles théories mathématiques : on peut la faire remonter à Archimède (calcul de l'aire du segment de parabole), et elle plonge ses racines dans la théorie de la mesure des aires qui est encore plus vieille. Ses progrès ont toujours été des progrès décisifs pour l'Analyse tout entière et ils se sont poursuivis jusqu'à nos jours. Mais ils l'ont fait dans des directions diverses : des définitions de plus en plus générales ont été données de l'intégrale, mais si chacune est poussée à son point extrême de généralités, il n'y a pas une théorie de l'intégration qui contienne rigoureusement toutes les autres.

Il n'est bien sûr pas question d'en faire ici un inventaire exhaustif : nous voudrions seulement rappeler les définitions qui ont été historiquement et sont encore théoriquement les plus importantes, dégager les points de vue principaux, différents quant à l'aspect, mais foncièrement identiques quant aux résultats, où l'on peut se placer pour édifier la théorie, et mettre en lumière les structures sur lesquelles elle est fondée.

Première partie

De la mesure des aires à l'intégrale de Riemann

1. Mesure des aires. Anneaux de Boole. Etendues.

L'aire des ensembles plans répond aux conditions suivantes (intuitivement senties, sinon explicitement exprimées dans les exposés les plus élémentaires) :

a) L'aire d'un ensemble A est un nombre positif ou nul mA.

b) Elle est « additive », en ce sens que $m(A \cup B) = mA + mB$, si $A \cap B = \emptyset$.

c) Les aires de deux ensembles égaux (par déplacement) sont égales.

d) L'aire du carré de côté 1 est 1 (plus précisément : l'aire du carré ouvert de côté 1, celle du carré fermé de côté 1, et celle de tout ensemble contenant le premier et contenu dans le second est 1).

Ces exigences suscitent les questions :

α) Existe-t-il une telle aire ? et plus précisément :

β) Est-il possible de la définir pour tous les ensembles du plan ?

γ) Sinon, quelle est la nature de la famille de ceux qui ont une aire ?

---

* Conférence prononcée le 6 mars 1958, à l'Institut Henri-Poincaré, et organisée par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

Les réponses sont obtenues par « construction ». Faisons tout d'abord abstraction de *c*) sous sa forme générale. Choisissons dans le plan deux axes rectangulaires *ox, oy,* et attribuons des aires égales aux carrés égaux dont les côtés sont parallèles à *ox* et *oy,* et ont des coordonnées rationnelles. L'application de *b*) et *d*) conduit alors à attribuer une aire mR égale au produit des longueurs de ses côtés à tout rectangle R dont les côtés sont parallèles à O*x* et O*y* et ont des coordonnées rationnelles (en désignant par rectangles R aussi bien le rectangle ouvert que le rectangle fermé et que tout ensemble contenant le premier et contenu dans le second).

Des rectangles R, (*b*) nous conduit aux ensembles A, réunions finies disjointes de tels rectangles (c'est-à-dire aux ensembles obtenus par $A = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$, $R_i \cap R_j = \emptyset$ pour $i \neq j$), en attribuant pour aire à A le nombre $mA = \sum_{i=1}^{n} mR_i$.

Mais ici deux questions se posent :

1) La première, de logique : Obtiendra-t-on la même aire pour le même ensemble A à partir de deux partitions différentes en rectangles R ? La réponse est positive : il suffit de le vérifier d'abord lorsque A est un rectangle R (on le fait en décomposant les rectangles des deux partitions de A en carrés de côtés parallèles à *ox* et *oy* et égaux, ce qui est possible à cause de la rationalité des coordonnées ; l'égalité des deux aires traduit alors l'associativité et la commutativité de l'addition des entiers) ; de là, on passe au cas d'un ensemble A quelconque en considérant une troisième partition de A dont les éléments soient $R_i \cap R_j$, si R_i décrit la première partition et R_j la seconde ; l'égalité des aires est alors dérivée de l'associativité et de la commutativité de l'addition des rationnels.

2) La seconde se rattache à la question γ. *A priori,* plus gratuite, elle éclaire cependant la théorie et ouvre la voie à la généralisation :

Quelle est la structure de l'ensemble $\mathcal{M}_0$ des ensembles A ?

On voit aisément que $\mathcal{M}_0$ possède la propriété suivante :

$$A, B \in \mathcal{M}_0 \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{M}_0 \text{ et } A - B(1) \in \mathcal{M}.$$

Sur un ensemble E quelconque, une partie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}(E)$ possédant cette propriété est appelée un anneau (de Boole). On montre que la propriété est équivalente à :

$$A, B \in \mathcal{M} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{M} \text{ et } A \Delta B = A \cup B - A \cap B \in \mathcal{M}$$

et pour ces deux opérations, $\cap$ et Δ, $\mathcal{M}$ a une structure d'anneau

(1) La différence A-B est égale à $A \cap \complement B$, elle est définie quels que soient A et B.

commutatif (où Δ est l'addition et $\cap$ la multiplication). On le vérifie aisément en associant à tout A sa fonction caractéristique χ_A dans le corps des entiers modulo 2 :

$$\chi_{A\,\Delta\,B} = \chi_A + \chi_B$$
$$\chi_{A\,\cap\,B} = \chi_A \cap \chi_B$$

L'aire mA se présente alors comme une application de $\mathcal{M}_0$ dans R qui est :

a) additive, c'est-à-dire vérifiant :

$$m(A \cup B) = mA + mB \qquad \text{si } A \cap B = \emptyset,$$

ou, énoncé équivalent.

$$\begin{cases} mA + mB = m(A \cup B) + m(A \cap B) \\ m\emptyset = 0. \end{cases}$$

Une application additive d'un anneau $\mathcal{M}$ dans R sera dite une « *étendue* » (2) sur $\mathcal{M}$;

b) positive, c'est-à-dire vérifiant $mA \geqslant 0$ ou, énoncé équivalent, croissante, c'est-à-dire vérifiant :

$$A \subset B \Rightarrow mA \leqslant mB.$$

Nous avons donc une réponse partielle à nos questions : il est possible de définir une aire satisfaisant *a, b, d* sur l'anneau $\mathcal{M}_0$ des réunions finies de rectangles R, mais *c* n'est pas satisfaite (les carrés dont les côtés ont une direction quelconque ne figurent pas dans $\mathcal{M}_0$!).

Il est donc souhaitable de définir l'aire pour d'autres ensembles que ceux de $\mathcal{M}_0$. C'est ce qui va être réalisé par l'application de ce que M. Denjoy a appelé le « principe d'Eudoxe », et que j'expose pour une étendue positive m définie sur un anneau donné $\mathcal{M} \subset \mathcal{G}(E)$ où E est un ensemble quelconque.

On considère les ensembles $A \subset E$ inclus dans au moins un ensemble de $\mathcal{M}$ [ensembles bornés du plan pour $\mathcal{M}_0$], et pour chaque A de cette nature tous les éléments α, β de $\mathcal{M}$ tels que :

$$\beta \subset A \subset \alpha.$$

L'ensemble des α n'est pas vide par hypothèse, et, parmi les β, il y a au moins l'ensemble vide.

On a alors : $m\beta \leqslant m\alpha$, et par suite : $\sup m\beta \leqslant \inf m\alpha$.

Un ensemble A sera dit quarrable pour l'étendue m si :

$$\sup m\beta = \inf m\alpha.$$

Le résultat fondamental est alors le suivant :

La famille des ensembles quarrables est un anneau $\overline{\mathcal{M}}$ contenant $\mathcal{M}$. Si l'on pose $\overline{m}A = \sup m\beta = \inf m\alpha$ pour $A \in \overline{\mathcal{M}}$, $\overline{m}A$ est une étendue sur $\overline{\mathcal{M}}$ dont la restriction à $\mathcal{M}$ est m.

---

(2) Désignée aussi dans la littérature par « mesure simplement additive », en allemand « Inhalt », en anglais « content ».

Il est clair que tout élément $A \in \mathcal{M}$ est quarrable, et que pour lui $\overline{m}A = mA$.

La condition de quarrabilité s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \alpha\beta \in \mathcal{M} \text{ avec } \beta \subset A \subset \alpha \text{ et } m(\alpha - \beta) < \varepsilon.$$

Soient alors A et $A' \subset \mathcal{M}$

Si $\beta \subset A \subset \alpha \qquad \beta' \subset A' \subset \alpha' \qquad \beta, \alpha', \beta', \alpha \in \mathcal{M}$

on a :

$$\beta \cup \beta' \subset A \cup A' \subset \alpha \cup \alpha' \qquad \beta \cup \beta', \alpha \cup \alpha' \in \mathcal{M}$$
$$\beta - \alpha' \subset A - A' \subset \alpha - \beta' \qquad \beta - \alpha', \alpha - \beta' \in \mathcal{M}$$

D'autre part :

$$\alpha \cup \alpha' - (\beta \cup \beta') = (\alpha \cup \alpha') \cap \complement(\beta \cup \beta') = (\alpha \cup \alpha') \cap (\complement\beta \cap \complement\beta')$$
$$= (\alpha \cap \complement\beta \cap \complement\beta') \cup (\alpha' \cap \complement\beta \cap \complement\beta') \subset (\alpha - \beta) \cup (\alpha' - \beta')$$

De même :

$$(\alpha - \beta') - (\beta - \alpha') = (\alpha \cap \complement\beta') \cap \complement(\beta \cap \complement\alpha')$$
$$= (\alpha \cap \complement\beta') \cap (\complement\beta \cup \alpha') = (\alpha \cap \complement\beta' \cap \complement\beta) \cup (\alpha \cap \complement\beta' \cap \alpha') \subset (\alpha - \beta) \cup (\alpha' - \beta')$$

Donc, si $m(\alpha - \beta) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad m(\alpha' - \beta') < \frac{\varepsilon}{2}$, on a :

$m[\alpha \cup \alpha' - (\beta \cup \beta')] < \varepsilon \qquad m[\alpha - \beta' - (\beta - \alpha')] < \varepsilon,$

c'est-à-dire que $A \cup A'$ et $A - A'$ sont quarrables quand A et A' le sont. $\mathcal{M}$ est un anneau.

L'additivité de $\overline{m}$ résulte de ce que si $A \cap A' = \emptyset$, on a aussi $\beta \cap \beta' = \emptyset$, d'où $m(\beta \cup \beta') = m\beta + m\beta'$, il en résulte :

$$m\beta + m\beta' \leqslant \overline{m}(A \cup A') \leqslant m(\alpha \cup \alpha') \leqslant m\alpha + m\alpha'$$

d'autre part :

$$m\beta + m\beta' \leqslant \overline{m}A + \overline{m}A' \leqslant m\alpha + m\alpha'$$

et on peut choisir α, β, α', β', de telle sorte que :

$m\alpha - m\beta + m\alpha' - m\beta' < \varepsilon$, d'où l'égalité :

$$\overline{m}(A \cup A') = \overline{m}A + \overline{m}A'.$$

La théorie classique des aires s'en tient à l'anneau $\overline{\mathcal{M}}_0$ complété de $\mathcal{M}_0$ par le principe d'Eudoxe. Il est à remarquer que :

1° $\overline{\mathcal{M}}$ n'est pas $\mathcal{P}(R^2)$ entier. Si A est l'ensemble des points à coordonnées rationnelles du carré unité, $\beta = \emptyset$, et il existe un plus petit $\alpha \in \mathcal{M}_0$ contenant A, le carré unité lui-même ; on a :

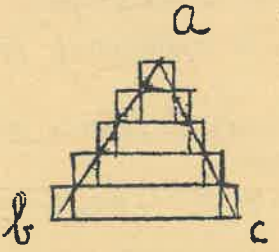
$$\sup m\beta = 0 < \inf m\alpha = 1 ;$$

2° qu'il n'y a pas à espérer obtenir un anneau plus grand $\overline{\overline{\mathcal{M}}}$ par application à $\overline{\mathcal{M}}$ et $\overline{m}$ du principe d'Eudoxe. On voit aisément que

$\overline{\overline{\mathcal{M}}} = \overline{\mathcal{M}}$. Ceci permet d'introduire la définition : $\overline{\mathcal{M}}$ sera dit le complété de $\mathcal{M}$ pour l'étendue m ;

3° que dans le cas de $\overline{\mathcal{M}_0}$ et de l'aire sur $\overline{\mathcal{M}_0}$, l'exigence c) est satisfaite.

Il suffit, en vertu du 2°, de vérifier que tout rectangle, quelles que soient les directions de ses côtés, appartient à $\overline{\mathcal{M}_0}$ et a pour aire le produit des longueurs de ses côtés. Ceci résulte du fait que tout triangle ayant un côté parallèle à Ox est quarrable (démonstration suggérée par la figure ci-contre !), et a même aire que tout triangle qui en est déduit par translation. Or, en ajoutant et retranchant deux fois de tels couples de triangles, on transforme, sans changer le produit des longueurs de ses côtés, un rectangle quelconque en un rectangle de même aire et dont les côtés sont parallèles à Ox et Oy.



Etendues de signe quelconque.

Le principe d'Eudoxe a été utilisé pour une étendue positive. Il est aisé de le transposer au cas d'une étendue négative.

Si on s'est donné sur $\mathcal{M}$ une étendue m prenant les deux signes, on peut se ramener au cas précédent si m est bornée, c'est-à-dire si :

$$\sup \{|mA| \; ; \; A \in \mathcal{M}\} < +\infty.$$

On démontre alors en effet qu'une telle étendue peut s'écrire $m = m_1 - m_2$, où m_1 et m_2 sont deux étendues positives. On étendra alors m_1 en $\overline{m}_1$ sur le complété $\overline{\mathcal{M}}_1$ de $\mathcal{M}$ pour m_1, et m_2 en $\overline{m}_2$ sur le complété $\overline{\mathcal{M}}_2$ de $\mathcal{M}$.

L'intersection (3) $\overline{\mathcal{M}}_1 \cap \overline{\mathcal{M}}_2 = \overline{\mathcal{M}}$ est un anneau contenant $\mathcal{M}$ auquel m pourra être prolongée.

2. Intégrale de Riemann.

L'intégration selon Riemann est étroitement liée à la mesure des aires par application du principe d'Eudoxe. Toutes les intégrations de Riemann sont des cas particuliers du schéma suivant :

---

(3) On voit aisément que l'intersection d'une famille quelconque d'anneaux est toujours un anneau.

Sont donnés au départ : un ensemble X ; un anneau de Boole $\mathcal{M}$ de parties de X ; une étendue positive m sur $\mathcal{M}$. R désignant la droite réelle, on considère dans le produit cartésien $X \times R$ les ensembles (4) :

$$(A, k_1, k_2) = \{ (x, y) \; ; \; x \in A, \; 0 \leqslant k_1 \leqslant y \leqslant k_2 \} .$$

On vérifie aisément que la famille des réunions finies disjointes d'ensembles (A, k_1, k_2), où A décrit $\mathcal{M}$ et $k_1 \leqslant k_2$ décrivent R^+, est un anneau $\mathcal{M}^+$, sur lequel on obtient une étendue positive m^+, en posant :

$$m^+(A, k_1, k_2) = (k_2 - k_1) . mA,$$

et en attribuant pour étendue à une réunion finie disjointe de tels ensembles la somme des étendues des composants.

Si l'on se donne une fonction f sur X, à valeurs réelles positives, bornée, et nulle hors d'un ensemble $Af \in \mathcal{M}$, Af variable avec f, on dira que f est intégrable $(\mathcal{M}, m)$ si l'ensemble :

$$A^+(f) = \{ (x, y) \; ; \; x \in Af, \; 0 \leqslant y \leqslant f(x) \}$$

est quarrable $(\mathcal{M}^+, m^+)$, et l'intégrable $\int_X f dm$ est alors l'étendue de cet ensemble.

On peut également considérer l'anneau $\mathcal{M}^-$, constitué des réunions finies disjointes d'ensembles :

$$(A, k_1, k_2) = \{ (x, y) \; ; \; x \in A, \; A \in \mathcal{M}, \; 0 \geqslant k_1 \geqslant y \geqslant k_2 \} ,$$

l'étendue $\overline{m}$ valant :

$$\overline{m}(A, k_1, k_2) = (k_2 - k_1) . mA$$

et étant définie par additivité sur les autres éléments de $\mathcal{M}^-$.

Définition analogue de $\int_X f dm$ pour les fonctions à valeurs réelles négatives, bornées et nulles hors d'un ensemble $Af \in \mathcal{M}$. Pour une fonction prenant les deux signes, on pose :

$$f^+ = \sup (f, 0) \qquad f^- = \inf (f, 0).$$

f est dite intégrable si f^+ et f^- le sont, et on pose :

$$\int_X f dm = \int_X f^+ dm + \int_X f^- dm$$

L'exposé classique, que nous rappelons ci-dessous, ne fait pas intervenir explicitement les anneaux $\mathcal{M}^+$ et $\mathcal{M}^-$, mais il consiste en fait à n'utiliser pour encadrer l'ensemble $A^+(f^+)$ [resp. $A^-(f^-)$] que des éléments de $\mathcal{M}^+$ [resp. $\mathcal{M}^-$] du type :

$$\bigcup_{i=1}^{n} (A_i, 0, k_i) \text{ avec } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j$$

et en prenant k_i aussi grand, ou aussi petit que possible, suivant l'encadrement cherché. Ceci conduit à la situation suivante :

---

(4) Généralisation des rectangles R du début.

f étant donnée [réelle, bornée, nulle hors de Af], on considère l'ensemble $\mathcal{P}$ des partitions finies P de Af en un ensemble $A_i \in \mathcal{M}$; $i = 1, ..., n$; n dépendant de P. [On a $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = Af$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$].

A chaque P, on associe les sommes (de Cauchy-Riemann) :

$$\sigma(P, f) = \sum_{i=1}^{n} \inf \{ f(x) \; ; \; x \in A_i \} \, mA_i$$

$$(P, f) = \sum_{i=1}^{n} \sup \{ f(x) \; ; \; x \in A_i \} \, mA_i.$$

On peut alors raisonner sur ces sommes (5), en faisant abstraction de $\mathcal{M}^+$ et $\mathcal{M}^-$.

P_1 et P_2 étant deux partitions finies de Af, on dit que P_1 est plus fine que P_2, $P_1 \succ P_2$, si tout ensemble A_i de P_1 est inclus dans un ensemble A_j de P_2. Pour l'ordre ainsi défini sur $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ est un treillis : l'important ici est l'existence de sup (P_1, P_2), partition constituée des ensembles $A_i \cap A_j$.

D'autre part :

$$P_1 \succ P_2 \Longrightarrow \sigma(P_2) \leqslant \sigma(P_1) \leqslant \sum (P_1) \leqslant \sum (P_2).$$

---

(5) On voit aisément comment les cas classiques suivants 1) $\int_a^b f(x)dx$; 2) $\int_a^b f dg$, g croissante ; 3) $\int\int_D f(x, y)d\omega$ sont contenues dans le cas général.

Il faut cependant signaler que les segments $[x_i, x_{i+1}]$ habituellemetn utilisés dans la définition de 1) et 2) ne forment pas une partition de $[a, b]$, non plus que les mailles quarrables compactes utilisées pour 3) n'en constituent une de D. En fait, on ne change rien au cas 1) en remplaçant les segments par des semi-segments $]x_i, x_{i+1}]$ par exemple. $\mathcal{M}$ est alors l'anneau des réunions finies de tels semi-segments et m la longueur. De même dans le cas 3), on peut attribuer les frontières communes à deux mailles à une seule d'entre elles, en prenant par exemple pour $\mathcal{M}$ l'anneau $\mathcal{M}_0$ entier.

Dans le cas 3), par contre, si l'usage de définir $\int_a^b f \, dg$ à partir des sommes telles que $\sum_{i=0}^{n-1}$ inf. $\{ f(x) \; ; \; x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1} \} [g(x_{i+1}) - (g(x_i)]$ au lieu de $\sum_{i=0}^{n-1}$ inf. $\{ (f(x) \; ; \; x_i < x \leqslant x_{i+1} \} [g(x_{i+1}) - g(x_i)]$ par exemple, conduit au même résultat dans le cas — très important — où g est continue, il est maladroit dans les autres cas, et il est préférable de considérer $g(x_{i+1}) - g(x_i)$ comme l'étendue du semi-segment $]x_i, x_{i+1}]$ (même anneau que pour le cas 1), ce qui permettra, pour g continue à droite, l'accord avec l'intégrale de Lebesgue.

Ceci tient au fait qu'à chaque terme $\inf\{f(x)\ ;\ x\in A_j\}\, mA_j$ de $\sigma(P_2)$ par exemple, correspond dans P_1 une somme de termes de la forme :

$$\sum_i \inf\{f(x)\ ;\ x\in A_i\}\, mA_i,$$

avec $\bigcup_i A_i = A_j$ et $A_i \cap A_k = \emptyset$ si $i \neq k$.

Or, de $A_i \subset A_j$ résulte $\inf\{f(x)\ ;\ x\in A_i\} \geqslant \inf\{f(x)\ ;\ x\in A_j\}$, et utilisant $mA_i \geqslant 0$ et $mA_j = \sum_i mA_i$, on en déduit :

$$\inf\{f(x);\ x\in A_j\}\, m(A_j) \leqslant \sum_i \inf\{f(x);\ x\in A_i\}\, mA_i.$$

D'où, quelles que soient $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$:

$$\sigma(P_1) \leqslant \sigma(\sup(P_1, P_2)) \leqslant \sum [(\sup(P_1, P_2)] \leqslant \sum (P_2),$$

et enfin :

(1) $\qquad \sup\{\sigma(P);\ P\in\mathcal{P}\} \leqslant \inf\{\Sigma(P);\ P\in\mathcal{P}\}$

f est intégrable, si les deux nombres sont égaux, et l'intégrale $\int_X fdm$ est alors leur valeur commune. La condition d'intégrabilité peut s'énoncer :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad P_0 \in \mathcal{P} \text{ telle que : } 0 \leqslant \Sigma(P_0) - \sigma(P_0) < \varepsilon$$

ou, de manière équivalente :

$$0 \leqslant \sum_i \Omega\,[f, A_i]\, mA_i < \varepsilon,$$

les A_i étant les éléments de P_0, et $\Omega(f, A_i)$ étant l'oscillation de f sur A_i.

On remarque :

1° que si ceci a lieu pour P_0, ceci a lieu *a fortiori* pour $P \succ P_0$ et que lorsque P_0 décrit $\mathcal{P}$, les ensembles $S(P_0) = \{P\ ;\ P \succ P_0\}$ décrivent la base d'un filtre $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{P}$;

2° que si $\xi_i \in A_i$, on a :

$$\sigma(P, f) \leqslant \sum_{A_i \in P} f(\xi_i) m(A_i) \leqslant \sum (P, f)$$

et que par suite l'intégrale peut être écrite comme limite suivant le filtre $\mathcal{F}$, on a :

$$(2) \qquad I(f) = \int_X fdm = \lim_{\mathcal{F}} \sum_{A_i \in P} f(\xi_i) m(A_i).$$

Propriétés de l'ensemble $\mathcal{J}(X, \mathcal{M}, m)$ des fonctions intégrables.

On vérifie aisément que :

1° Les fonctions caractéristiques des ensembles de $\mathcal{M}$ et aussi de $\overline{\mathcal{M}}$ sont intégrables.

A ce propos, on constate que $\mathcal{J}(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{m}) = \mathcal{J}(X, \mathcal{M}, m)$. Il est d'autre part évident que $\mathcal{J}$ croît avec $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ implique $\mathcal{J}(\mathcal{M}_1, m_1) \subset \mathcal{J}(\mathcal{M}_2, m_2)$ si m_1 est la restriction de m_2 à $\mathcal{M}_1$), mais l'extension de $(\mathcal{M}, m)$ en $(\overline{\mathcal{M}}, \overline{m})$ par le principe d'Eudoxe ne donne rien de nouveau. Une véritable extension de l'intégration devra donc utiliser un autre procédé.

2° Si f est intégrable, λ réel, λf est intégrable, et on a :

$$I(\lambda f) = \lambda I(f).$$

3° Si f et g sont intégrables, $f + g$ l'est.

Conséquence de $A_{f+g} \subset A_f \cup A_g$
et de

$$\sup \{(f+g)(x); x \in A\} \leqslant \sup \{f(x); x \in A\} + \sup_{x \in A} g(x);\}$$
$$\inf \{(f+g)(x); x \in A\} = \inf \{f(x); x \in A\} + \inf g(x); x \in A\}$$

En outre :

$$I(f + g) = I(f) + I(g) \qquad \text{(conséquence de (2)).}$$

4° Si f et g sont intégrables, $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ le sont, car :

$$\sup \{\sup(f,g)(x); x \in A\} = \sup [\sup \{f(x); x \in A\}, \sup \{g(x); x \in A\}]$$
$$\inf \{\sup(f,g)(x); x \in A\} \geqslant \sup [\inf \{f(x); x \in A\}, \inf \{g(x); x \in A\}]$$

5° Si f et g sont intégrables, fg est intégrable.

En effet, si m est le minimum de f sur A_f, μ le minimum de g sur A_g et χ la fonction caractéristique de $A_f \cup A_g$, les fonctions $f - m\chi$, $g - \mu\chi$ sont intégrables et positives, et

$$(f - m\chi)(g - \mu\chi) = fg - m\chi g - \mu\chi f - m\mu\chi.$$

Or, $m\chi g = mg$ et $\mu\chi f = \mu f$ qui sont intégrables.

On est donc ramené au cas des fonctions positives f et g pour lesquelles on a :

$$\sup \{fg(x); x \in A\} \leqslant \sup \{f(x); x \in A\} \sup \{g(x); x \in A\}$$
$$\inf \{fg(x); x \in A\} \geqslant \inf \{f(x); x \in A\} \inf \{g(x); x \in A\}$$

Utilisant alors l'égalité $a_1a_2 - b_1b_2 = a_1(a_2 - b_2) + b_2(a_1 - b_1)$, on conclut aisément.

L'ensemble $\mathcal{J}$ apparaît donc comme une algèbre réticulée sur R.

6° Limitons-nous à l'ensemble $\mathcal{J}_A$ des fonctions intégrables dont les ensembles A_f sont contenus dans un même $A_0 \in \mathcal{M}$.

Sur $\mathcal{J}_A$, $\sup \{|f(x)|\ ;\ x \in A_0\}$ est une norme.
$\mathcal{J}_A$ est complet pour cette norme.

Une suite de Cauchy de fonctions f_n de $\mathcal{J}$ converge vers une fonction bornée f. Montrons que f est intégrable.

On a $\|f - f_n\| < \varepsilon$ si $n > N(\varepsilon)$, d'où :

$$\sup \{f(x); x \in A\} \leqslant \sup \{f_n(x); x \in A\} + \varepsilon \quad \text{si } A \subset A_0$$
$$\inf \{f(x); x \in A\} \geqslant \inf \{f_n(x); x \in A\} + \varepsilon \quad \text{si } A \subset A_0$$

Or, n étant fixé, il existe une partition P de A_0 telle que :

$$0 \leqslant \sum (P, f_n) - \sigma(P, f_n) < \varepsilon, \text{ on en déduit :}$$

$$0 \leqslant \sum (P, f) - \sigma(P, f) \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon m A_0.$$

On remarque en même temps que :

$$|I(f) - I(f_n)| < \varepsilon m A_0.$$

Propriétés de I.

I est une application de $\mathcal{J}$ dans R, qui est :

1° *linéaire :*

$$I(\lambda f) = \lambda I(f),$$
$$I(f + g) = I(f) + I(g).$$

I est donc une forme linéaire sur $\mathcal{J}$;

2° elle est croissante, car $I(f) > 0$ pour $f > 0$, ce qui est équivalent à $f \succ g \Rightarrow I(f) \geqslant I(g)$;

3° sa restriction à $\mathcal{J}_{A_0}$ est continue.

C'est une conséquence de 2° exprimée par le théorème de la moyenne :

$$\inf \{ f(x) \ ; \ x \in A_f \} \, mA_f \leqslant I(f) = \sup \{ f(x) \ ; \ x \in A_f \} \, mA_f.$$

D'où, si $A_f \subset A_0$:

$$|I(f)| \leqslant \|f\| m A_0,$$

et on a bien $mA_0 = \sup \dfrac{I(f)}{\|f\|}$ (prendre $f = \chi_{A_0}$).

I est donc sur $\mathcal{J}_{A_0}$ une forme linéaire continue de norme mA_0. Sur $\mathcal{J}$ entier, I est continue, si $\mathcal{J}$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles $A \in \mathcal{M}$.

Cas d'une étendue de signe quelconque.

m est alors la différence de deux étendues positives m_1 et m_2. Par définition :

$$\int_X f\,dm = \int_X f\,dm_1 - \int_X f\,dm_2$$

Toutes les propriétés sont conservées, et on a pour $\mathcal{J}_A$:

$$|I(f)| \leqslant \|f\| (m_1 A + m_2 A),$$

mais on a $\|I\| \leqslant (m_1 A + m_2 A)$, et l'égalité n'est en général pas assurée.

Intégrabilité des fonctions continues.

La théorie de l'intégration est dans son essence indépendante de l'existence d'une topologie sur X, mais s'il en existe une, et c'est « pratiquement » presque toujours le cas, il est souhaitable que les fonctions continues sur X, ou certaines d'entre elles, particulièrement importantes, au moins, soient intégrables.

On a le résultat capital suivant, qui contient les cas élémentaires classiques :

Si X est localement compact, si pour tout $x \in X$, les ensembles A de l'anneau $\mathcal{M}$ qui contiennent x en constituent une base de voisinages, les fonctions continues réelles sur X à support compact [le support d'une fonction est l'adhérence de l'ensemble des points en lesquels elle prend une valeur non nulle] sont intégrables par rapport à toute étendue sur $\mathcal{M}$.

En effet, tout point $x \in S_f$ (support de f) possède, puisque f est continue, un voisinage V_x tel que $\Omega[f, V_x] < \varepsilon$. Il existe, par hypothèse, un $A_x \in \mathcal{M}$ tel que $x \in \mathring{A}_x \subset V_x$.

Les ensembles A_x forment un recouvrement ouvert du compact S_f, il existe donc un recouvrement fini de S_f constitué de tels ensembles : soient A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

On a : $S_f \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathring{A}_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $\Omega[f, A_i] < \varepsilon$.

L'ensemble $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ peut être pris comme ensemble A_f, dont les ensembles $A'_i = A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$ constituent une partition finie.

On a : $\Omega[f, A'_i] \leqslant \Omega[f, A_i] < \varepsilon$.

D'où : $\sum_{i=1}^{n} \Omega[f, A'_i]\, mA'_i \leqslant \varepsilon m A_f$,

ce qui établit l'intégrabilité de f.

Remarque 1. — L'hypothèse sur $\mathcal{M}$ sera en particulier satisfaite si $\mathcal{M}$ contient tous les compacts de X.

Remarque 2. — Il n'est pas question de donner de conditions nécessaires pour que des fonctions entières soient intégrables. Mais les observations suivantes montrent que le théorème précédent ne semble pas pouvoir être utilement généralisé :

Une condition suffisante d'intégrabilité d'une fonction f nulle hors d'un ensemble $A_f \in \mathcal{M}$, et qui, *a priori*, semble bien adaptée aux fonctions continues, est la suivante :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ P (partition finie de A_f en $A_i \in \mathcal{M}$) telle que :
$\Omega(f, A_i) < \varepsilon$.

Ce sera le cas, si la topologie de X dérive d'une structure uniforme (plus particulièrement, si X est un espace métrique), si f est uniformément continue, et si pour tout entourage V($\forall \varepsilon > 0$, pour X métrique), il existe une partition finie de A_f en ensembles $A_i \in \mathcal{M}$, petits d'ordre V (de diamètre inférieur à ε, pour X métrique).

On peut toujours supposer que X est complet (les fonctions uniformément continues se prolongeant en fonctions uniformément continues sur le complété). La condition sur les ensembles A_f entraîne alors qu'ils

soient relativement compacts, et puisque $S \subset \overline{A_f}$, que les fonctions considérées soient à support compact.

Il faut encore remarquer qu'une fonction sur X à support compact est identiquement nulle si son support a un intérieur vide. On aboutit donc à la situation suivante :

X est un espace uniforme complet, contenant des compacts d'intérieur non vide. L'anneau $\mathcal{M}$ est constitué d'ensembles relativement compacts et chacun d'eux admet une partition finie en ensembles de l'anneau petits d'ordre V, donné *a priori ;* tout compact d'intérieur non vide est contenu dans un ensemble de l'anneau.

Cette situation est réalisée par les hypothèses du théorème précédent qui en fournissent, sans doute, la réalisation la plus « raisonnable » actuellement.