38e Année — N° 196 Janvier 1959

BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

I. ÉTUDES

APERÇU HISTORIQUE SUR LE DÉVELOPPEMENT DE L'ALGÈBRE *

par M. Paul DUBREIL
Professeur à la Sorbonne

L'extraordinaire épanouissement de l'Algèbre depuis un quart de siècle a, entre autres raisons, des raisons historiques. Il apparaît presque fatal lorsqu'on étudie certains courants d'idées qui se manifestent au long du XIXe siècle.

L'un de ces courants d'idées, issu de la résolution des équations algébriques, fait surgir les notions de groupe et de corps, il aboutit à ce qu'on appelle la théorie de Galois : c'est celui qui retiendra notre attention aujourd'hui. Il représente probablement un des chapitres les plus connus de l'histoire de l'Algèbre et même de l'histoire des Mathématiques. J'espère cependant que, même chez ceux pour lesquels il n'aurait rien de nouveau, son évocation éveillera quelque intérêt et même quelque émotion.

Si vous le voulez bien, nous nous limiterons par deux dates extrêmes : 1770-1910. 1770-71, c'est le moment où LAGRANGE publie, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, un travail d'environ deux cents pages intitulé « Réflexions sur la résolution algébrique des équations ». En 1910, le tome 137 du *Journal de Crelle* fait connaître un mémoire de E. STEINITZ intitulé « Algébraische Théorie des Körper ». STEINITZ pose là les bases de la théorie des corps dans l'esprit même de l'Algèbre moderne et sous une forme qu'on peut, à quelques détails près, qualifier de définitive.

*
**

Quand il écrit ses « Réflexions sur la résolution algébrique des équations », LAGRANGE, âgé de 34 ans, est un des mathématiciens les plus célèbres de l'Europe. Quatre ans plus tôt, il a quitté Turin, sa ville

* Conférence prononcée le 22 mai 1958, à l'Institut Henri-Poincaré, et organisée par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

natale, pour Berlin, où le grand Frédéric l'a appelé pour prendre à la présidence de l'Académie la succession d'EULER, retourné à St-Pétersbourg. Cela moyennant une pension annuelle de 1.500 écus de Prusse (ce qui équivaut, paraît-il, à 6.000 francs français... de 1867 !). Le père de Lagrange, de souche française, comme sa mère née Marie-Thérèse Gros, s'était ruiné. Lagrange disait : « Si j'avais été riche, je n'aurais probablement pas fait mon état des Mathématiques. » Son séjour à Berlin se prolongera jusqu'en 1787, date à laquelle M. de Breteuil, ministre de Louis XVI, l'appellera à Paris, à la demande de l'Abbé Marie. A Paris, Lagrange sera membre de l'Académie des Sciences, professeur à l'Ecole Normale Supérieure et à Polytechnique, où il enseignera l'Analyse. C'est à Paris qu'il mourra, en 1815.

« Je me propose, écrit-il au début de son mémoire, d'examiner les différentes méthodes que l'on a trouvées jusqu'à présent pour la résolution algébrique des équations, de les réduire à des principes généraux et de faire voir *a priori* pourquoi ces méthodes réussissent pour le 3e et le 4e degré et sont en défaut pour les degrés ultérieurs. Cet examen aura un double avantage : d'un côté, il servira à répandre une plus grande lumière sur les résolutions connues du troisième et du quatrième degré ; de l'autre, il sera utile à ceux qui voudront s'occuper de la résolution des degrés supérieurs en leur fournissant différentes vues pour cet objet et en leur épargnant surtout un grand nombre de pas et de tentations inutiles. »

Lagrange, on le voit, présente lui-même son travail comme un bilan et insiste volontairement sur l'aspect négatif de ce bilan. « On n'est guère plus avancé que du temps de Cardan. » Il faut reconnaître qu'au XVIe siècle, en Italie, Scipion del Ferro, Tartaglia, Cardan, Bombelli, Ferrari ont fait faire à l'Algèbre un progrès énorme par la résolution des équations des troisième et quatrième degré (1) et surtout par l'invention des imaginaires. Sans doute, au siècle suivant, Descartes et Tschirnhaus, ami de Leibniz, perfectionnent notablement la théorie des équations algébriques. Puis, les mathématiciens du XVIIIe siècle étudient l'équation binôme $x^n = 1$ (Moivre), précisent les relations entre les coefficients et les racines d'une équation quelconque (Girard) et le calcul des fonctions symétriques des racines (Newton, Waring), énoncent et entreprennent de démontrer le « théorème fondamental » : une équation algébrique de degré n a toujours n racines (d'Alembert, Euler, de Foncenex). Notons que ce théorème ne sera vraiment démontré que par Lagrange lui-même (« Sur la forme des racines imaginaires des équations », *Œuvres*, t. 3, p. 479-516) et par Gauss (« Démonstratio nova théoremetis omnem fonctionem algébricam rationalem intégram unius

---

(1) La formule de Cardan donnant les solutions de l'équation $x^3 + px + q = 0$ s'écrit :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

où les déterminations des radicaux doivent être convenablement associées.

variabilis in factores reales primi nel secundi gradues revolvi posse », thèse, 1799).

Et, cependant, le problème de la résolution des équations de degré supérieur au quatrième est resté entier ; les efforts dépensés en vain amènent à penser qu'à partir du cinquième degré, seules les équations de type particulier sont résolubles par radicaux. Il n'a pas été possible à Lagrange de trancher la question : « Le problème de la résolution des équations des degrés supérieurs au quatrième est un de ceux dont on n'a pas encore pu venir à bout, quoique d'ailleurs rien n'en démontre l'impossibilité... Il est très douteux que les méthodes dont nous venons de parler puissent donner la résolution complète des équations du cinquième degré. »

A défaut de résultats tout à fait décisifs, les travaux de Lagrange apportent des idées fort importantes. L'art de résoudre les équations, dit-il à peu près, consiste essentiellement à trouver *des fonctions des racines* de l'équation proposée telles :

1° que l'équation ou les équations par lesquelles elles seront données soient d'un degré moindre que celui de la proposée ou soient au moins décomposables en d'autres équations d'un degré moindre que celui-là ;

2° que l'on puisse en déduire aisément les valeurs des racines cherchées.

Pour l'équation du deuxième degré, une telle fonction sera la différence $\theta = x' - x''$ des racines qui vérifie l'équation *décomposée* $\theta^2 = \Delta$. Pour une équation de degré n, Lagrange utilise les *résolvantes* qui portent son nom :

$$y_k = x' + \alpha_k x'' + \alpha_k^2 x''' + \ldots + \alpha_k^{n-1} x^{n)},$$

où les α_k sont les racines n^{es} de l'unité. La seconde condition est bien remplie. En ce qui concerne la première, Lagrange étudie le degré de l'équation vérifiée par les y_k : si n est premier, on est conduit à une équation de degré $n - 1$ dont les coefficients dépendent rationnellement d'une racine d'une équation de degré $(n - 2)$! ayant elle-même des coefficients qui s'expriment rationnellement en fonction de ceux de l'équation donnée.

Mais Lagrange s'élève aussi à un plus haut degré de généralité en considérant des fonctions rationnelles quelconques des racines. Il étudie le nombre ν des valeurs distinctes que peut prendre une telle fonction pour toutes les permutations des racines : ν *est un diviseur de* n *!* Lagrange appelle *semblables* deux fonctions qui « varient en même temps ou demeurent les mêmes lorsqu'on y fait les mêmes permutations des variables », disons, qui restent invariantes par les mêmes permutations. Alors, *chacune s'exprime rationnellement au moyen de l'autre et des coefficients de l'équation.*

Ce dernier résultat est un cas particulier d'un des théorèmes fondamentaux de Galois ; le précédent, pour nous, se rattache immédiatement au fait que l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe (l'ordre du groupe symétrique S_n, c'est-à-dire le nombre de toutes les

substitutions portant sur les n racines, est précisément n !). Lagrange a réellement frôlé la notion de groupe de substitutions. Il a écrit lui-même : « Tout se réduit, comme on voit, à *une espèce de calcul des combinaisons,* par lequel on trouve *a priori* les résultats auxquels on doit s'attendre. Il serait à-propos d'en faire l'application aux équations du cinquième degré et des degrés supérieurs... mais cette application demande un trop grand nombre de recherches et de combinaisons, dont le succès est encore d'ailleurs fort douteux, pour que nous puissions quant à présent nous livrer à ce travail ; nous espérons pourtant pouvoir y revenir dans un autre temps et nous nous contenterons ici d'avoir posé les fondements d'une théorie qui nous paraît nouvelle et générale... »

Peut-être un peu déçu par l'aridité du problème, accaparé certainement par ses travaux d'Analyse et de Mécanique, Lagrange n'est jamais revenu à l'Algèbre.

A la même époque que lui, et indépendamment, Vandermonde a publié à Paris un mémoire sur la résolution des équations. Lui aussi cherche des fonctions des racines prenant le plus petit nombre de valeurs distinctes quand on permute les racines. En outre, il se livre à une étude approfondie des équations binômes et il obtient des résultats qui seront plus tard confirmés et largement développés par Gauss.

*
**

Dans la ligne des travaux de Lagrange et de Vandermonde, un Italien, Ruffini, et un Norvégien, Abel, vont maintenant reconnaître et établir l'impossibilité de résoudre par radicaux l'équation *générale* du cinquième degré. Par équation générale, ils entendent (très clairement chez Abel) une équation dont les coefficients $a_0, a_1, ..., a_n$ sont regardés comme des indéterminés, ou, si l'on préfère, des paramètres variables. Résoudre par radicaux une telle équation, ce sera exprimer ses racines en fonction des coefficients en utilisant les seules opérations rationnelles ($\pm$, $\times$, :) et des extractions de racines (on peut se ramener au cas où chaque radical est d'indice premier). Les démonstrations de Ruffini, longues et confuses, n'ont jamais été satisfaisantes. A ce sujet, Abel écrit en 1826 : « Le premier et, si je ne me trompe, le seul qui avant moi ait cherché à démontrer l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales est le géomètre Ruffini ; mais son mémoire est tellement compliqué qu'il est très difficile de juger de la justesse de son raisonnement. Il me paraît que son raisonnement n'est pas toujours satisfaisant... » Cependant, Ruffini eut le grand mérite de définir et d'utiliser, avant Cauchy, le produit de deux substitutions (un type important de *loi de composition* apparaît ici en Algèbre). Ruffini constitue ainsi les premiers éléments de la théorie des groupes. Il établit ce point, fondamental aussi dans la démonstration d'Abel qui, à ce sujet, renvoie à Cauchy : il n'existe pas de fonction des cinq racines de l'équation qui prenne trois ou quatre valeurs distinctes pour toutes les permutations des racines.

La démonstration d'Abel a le double mérite d'être correcte et de s'appuyer sur une analyse très lucide des diverses opérations et des types correspondants de fonctions. Abel précise avec soin ce qu'il entend par polynôme, par fonction rationnelle ; en considérant, comme le fera aussi Galois, les éléments qui se déduisent des données par des *opérations rationnelles,* il introduit implicitement le *corps* formé par ces éléments, le « corps fondamental » ou le « corps de base » de Steinitz. Le langage n'a pas la commodité actuelle, mais il a la même sûreté et Abel définit correctement un polynôme ou une équation *irréductible sur un corps donné.* Ces considérations nouvelles et fondamentales constituent le début de son mémoire « Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré » (*Journal de Crelle,* t. 1, 1826).

Auparavant, à l'âge de 19 ans (en 1821), Abel avait cru résoudre l'équation générale du cinquième degré. Son travail fut envoyé par son maître Hansteen à Degen, professeur à Copenhague. Degen y reconnut l'œuvre d'un esprit exceptionnel, mais demanda une démonstration plus complète. Entre-temps, Abel, de lui-même, avait découvert son erreur et avait repris la question.

Sa vie d'étudiant était difficile malgré l'affectueux dévouement de ses maîtres Holmboe et Hansteen, parfaitement conscients de son génie. Mais, à l'âge de 18 ans, Abel avait perdu son père. Deux ans plus tard, il écrit au Collège Académique : « Comme j'ai un frère qui se destine à l'étude, mais que les subsides qu'il peut obtenir ne lui permettent pas de vivre ici à Christiania (Oslo), je me permets de demander au Collège la permission de prendre avec moi mon frère dans ma chambre à la Fondation universitaire. Mon compagnon de chambre donne son accord comme l'atteste sa signature de sa propre main. » L'autorisation fut accordée.

Les efforts d'Abel aboutissent : il établit l'impossibilité de la résolution par radicaux de l'équation générale du cinquième degré et publie chez Grondhal, à Christiania, à ses frais et sous forme abrégée, son « Mémoire sur les équations algébriques où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré ». Par l'intermédiaire d'un mathématicien allemand, Schumacher, cette brochure, malheureusement trop concise par raison d'économie, parvint entre les mains de Gauss. D'après Hansteen, Gauss se serait écrié en la recevant : « Encore une de ces monstruosités ! » Le fait n'a rien de certain ; il paraît probable que Gauss rangea le mémoire d'Abel sans le lire. Toujours est-il qu'Abel n'enregistra aucune réaction du « Prince des Mathématiciens ». Ce fut pour lui une grande désillusion.

Abel, qui se sentait isolé à Christiania, faisait démarches sur démarches pour obtenir une bourse qui lui permît d'aller travailler en Allemagne et en France. En août 1825, la bourse tant désirée lui est accordée. En septembre, il gagne Copenhague, puis Altona, près d'Hambourg, où il est accueilli par Schumacher. Il lui fait l'impression d'un mathématicien exceptionnel et d'un homme fort sympathique.

Renonçant à son projet primitif qui était de se rendre à Göttingen, près de Gauss, Abel va à Berlin où il se présente à Crelle. Crelle était

un ingénieur éminent et sa situation en Prusse était importante ; il dirigea la construction du premier chemin de fer allemand. Très actif, il s'intéressait « en amateur éclairé » aux Mathématiques. Lui aussi sut reconnaître les dons magnifiques d'Abel ; malgré les différences d'âge et de situation, les deux hommes se lièrent d'amitié.

Dans une conversation avec Crelle, Abel s'étonne un jour que l'Allemagne ne possède pas de périodique mathématique comme il en existe en France. « Je songe depuis longtemps à en créer un », lui répond Crelle. La réalisation vint très vite et c'est, comme nous l'avons vu, dans le premier tome du *Journal de Crelle*, que paraît, sous sa forme définitive, le mémoire sur l'équation du cinquième degré. Abel en écrivit plusieurs autres pour ce journal, toujours en français, car il maniait mieux notre langue que l'allemand. Crelle les traduisait en allemand. Le séjour à Berlin représente pour Abel une intense et fructueuse période de travail, mais traversée plus d'une fois par le spleen et les préoccupations d'avenir.

Ne pouvant se résoudre à se rendre à Göttingen, Abel quitte Berlin au printemps de 1826, en compagnie de camarades norvégiens, pour un voyage de trois mois qui le conduit à Dresde, Vienne, Trieste, Venise, pour aboutir en Suisse d'où, après quelques courses en montagne, il gagne seul Paris.

Il devait y poursuivre la série de ses découvertes : équations algébriques, séries, fonctions elliptiques, intégrales abéliennes. Sur ce dernier sujet, il écrit un mémoire qui contient son célèbre théorème : il le soumet à l'Académie, mais une nouvelle déception l'attend. Peut-être dérouté par l'extrême nouveauté du sujet, surchargé sans doute de tâches multiples, Cauchy retarde son jugement et finit par perdre de vue ce mémoire. Celui-ci sera retrouvé en 1830 et l'Académie non seulement le publiera, mais décernera à Abel le Grand Prix de Mathématiques ; malheureusement, ce sera à titre posthume.

Au point de vue scientifique, le séjour d'Abel à Paris lui a été cruel. Il y a trouvé plus d'une fois un accueil courtois, mais jamais un appui véritable. Excédé, il finit par écrire à Holmboe : « Bien que je sois dans la ville la plus bruyante du continent, je suis comme dans un désert, je ne connais presque personne. » « Il est difficile d'attirer l'attention, surtout pour un débutant... » A Paris, comme partout, sa meilleure distraction fut le théâtre : « Je ne connais pas de plus grand plaisir que voir une pièce de Molière dans laquelle joue Mlle Mars ; elle a quarante ans, mais elle joue des rôles très jeunes... »

Revenons à l'Algèbre. Le nouveau problème qu'Abel s'est posé est celui de trouver les équations résolubles par radicaux. Il n'en obtient pas la solution complète, mais, suivant son expression, « donne des moyens sûrs pour y parvenir ». La théorie des fonctions elliptiques lui fournit précisément d'intéressants exemples d'équations résolubles par radicaux. Il les étudie par une méthode inspirée de celle que Gauss avait appliquée aux équations de la division du cercle. Gauss, en effet, après avoir établi l'irréductibilité du polynôme $\Phi_n(x) = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ quand n est un nombre premier impair, avait étudié complètement la résolution de

l'équation $\Phi_n(x) = 0$ et obtenu par cette voie son célèbre théorème : les polygones à m côtés, où m est un nombre premier de la forme $2^{2^k} + 1$, peuvent être construits par la règle et le compas.

Mais Abel, poussant plus loin sa généralisation, considère une autre classe d'équations résolubles par radicaux auxquelles Kronecker devait donner le nom d'équations abéliennes (2).

En 1829, la mort, due à une tuberculose à évolution rapide, empêche Abel de poursuivre ses recherches. Certaines de ses lettres témoignent qu'il avait obtenu des résultats proches de ceux de Galois sur la caractérisation des équations résolubles par radicaux.

*
**

Evariste Galois naquit à Bourg-la-Reine le 25 octobre 1811. Il devait mourir à l'hôpital Cochin d'une blessure au ventre reçue en duel, le 31 mai 1832, âgé de moins de 21 ans. Sa vie, plus courte encore que celle d'Abel, fut aussi plus douloureuse, plus tragique.

Il fait de bonnes études au lycée Louis-le-Grand où il a Richard comme professeur de Mathématiques. Il échoue une première fois à Polytechnique, mais, à 17 ans, il fait ses premières découvertes sur la théorie des équations. Cauchy devait présenter à l'Académie une note résumant ces premiers résultats, mais il l'oublia et le texte ne put être retrouvé au Secrétariat de l'Académie. « Le peu d'attention donné par l'Institut au premier travail soumis à son jugement par Galois, écrit Paul Dupuy dans sa biographie (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 3e série, tome 13, 1896), commença pour lui des douleurs qui, jusqu'à sa mort, devaient se succéder de plus en plus vives. »

Après un deuxième échec à Polytechnique, suivi de la mort tragique de son père, Galois se résigne à entrer à l'Ecole Préparatoire (c'était à l'époque le nom de l'Ecole Normale Supérieure). Il y poursuit ses recherches et présente à l'Académie, en janvier 1830, un mémoire pour concourir au Grand Prix de Mathématiques. Le manuscrit fut remis à Fourier, Secrétaire perpétuel ; mais Fourier mourut avant de l'avoir examiné et ce travail, lui aussi, ne fut jamais retrouvé.

Mis à la porte de l'Ecole Normale (par suite de l'incident de la « Gazette des Ecoles »), Galois ouvre chez Caillot, libraire, 5, rue de la Sorbonne, un cours public d'Algèbre supérieure « destiné aux jeunes gens qui, sentant combien est incomplète l'étude de l'Algèbre dans les collèges, désirent approfondir cette science. Le cours se composera de théories dont quelques-unes sont neuves et dont aucune n'a jamais été exposée dans les cours publics. Nous nous contenterons de citer une théorie nouvelle des imaginaires, la théorie des équations qui sont solubles par radicaux, la théorie des nombres et les fonctions elliptiques

(2) Ce sont celles dont le groupe est « formé par les puissances d'une seule substitution circulaire ». Jordan étendra plus tard (*Traité des Substitutions*, p. 287) cette dénomination aux « équations dont le groupe ne contient que des substitutions échangeables entre elles » (groupe commutatif abélien).

traitées par l'Algèbre pure ». Mais Galois manque d'élèves. Finalement, il s'engage dans l'artillerie de la Garde nationale.

Cependant, Poisson s'intéresse à lui et l'invite à récrire le manuscrit remis à Fourier. Il présente ce manuscrit à l'Académie des Sciences. Malheureusement, quatre mois plus tard, il le rend à Galois : le mémoire, intitulé « Questions de la résolution générale des équations », a été jugé incompréhensible. Il sera publié et commenté élogieusement par Liouville... en 1846.

Alors, suivant l'expression même de Galois, « son cœur se révolte contre sa tête ». Il se donne tout entier à la politique, il atteint les limites de l'exaltation : « S'il fallait un cadavre pour ameuter le peuple, je donnerais le mien », dit-il. Le 9 mai 1831, au banquet « Vendanges de Bourgogne », il porte un toast régicide ; on l'arrête chez sa mère, il est mis en prison préventive à Ste-Pélagie, puis relâché après acquittement.

Moins d'un mois après, il est arrêté une deuxième fois, sur le Pont-Neuf, pour port illégal d'uniforme et d'armes chargées (son corps d'artillerie a été dissous). On le tient pour « radical dangereux ». Il doit faire cette fois six mois de prison à Ste-Pélagie. Le 16 mars 1832, on le transfère à l'hôpital, rue de Lourcine.

D'obscures provocations l'amènent à se battre en duel le 30 mai 1832. Dans la nuit qui précède, il écrit la *Lettre à tous les républicains*, une lettre à deux amis et la célèbre *Lettre à Auguste Chevalier*, dans laquelle il résume à grands traits sa théorie des équations algébriques, ainsi que des résultats sur les intégrales abéliennes, leur classification et leurs périodes, résultats que Riemann devait établir vingt-cinq ans plus tard.

Dans la préface des œuvres de Galois, Picard rend ce jugement : « La théorie des équations doit à Lagrange, Gauss et Abel des progrès considérables, mais aucun d'eux n'arriva à mettre en évidence l'élément fondamental dont dépendent toutes les propriétés de l'équation ; cette gloire était réservée à Galois qui montra qu'à chaque équation algébrique correspond un groupe de substitutions dans lequel se reflètent les caractères essentiels de l'équation... ».

Enonçons les principaux résultats de Galois. Etant donnée une équation $f(x) = 0$, sans racines multiples, dont les coefficients appartiennent à un certain corps K (contenu dans le corps des nombres complexes), on peut construire une fonction rationnelle V des racines x_i telle qu'aucune des valeurs que prend V quand on y permute les racines ne soit égale à une autre. Toutes les racines de l'équation proposée s'expriment rationnellement en fonction de V, disons, d'une façon un peu plus précise, appartiennent au corps K(V). On a donc :

$$K(x_1, x_2, ..., x_n) = K(V).$$

Si $\Phi(V) = 0$ est l'équation irréductible sur K satisfaite par V, si V', ... sont ses autres racines et si $x = \psi(V)$ est une racine de l'équation proposée, $\psi(V')$ en est une également.

Le *groupe* G de l'équation proposée — nous disons maintenant le groupe de Galois — est l'ensemble des permutations des racines $x = x_1, x_2, ...$ que l'on obtient en remplaçant, dans les expressions

$x_i = \psi_i(V)$, V par les racines V, V', ... de l'équation *irréductible* $\Phi(V) = 0$. Les fonctions des racines dont la valeur appartient au corps K sont celles qui restent invariantes par toutes les substitutions du groupe G.

Si le corps $K' = K(V) = K(x_1, x_2, ..., x_n)$ contient le corps des racines $L = K(y_1, ..., y_r)$ d'une autre équation (dont les coefficients appartiennent à K), le groupe de K' sur L est un sous-groupe *invariant* du groupe G (on dit aussi sous-groupe distingué ou sous-groupe normal et on entend par là un sous-groupe G' permutable avec tout élément du groupe :

$$xG' = G'x, \forall x \in G).$$

Le principe de la résolution par radicaux se présente de la façon suivante : on suppose que le corps K contient les racines de l'unité. Si l'équation est résoluble par radicaux, il doit exister entre K et K' une suite de corps intermédiaires :

$$K = K_0 \subset K_1 \subset ... \subset K_l = K',$$

tels que K_i s'obtienne en adjoignant à K_{i-1} les racines d'une équation binôme $t^{n_i} - a_i = 0$ avec $a_i \in K_{i-1}$.

Il existe donc une suite :

$$G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_l = (e), \qquad [(e) \text{ substitution unité}],$$

de sous-groupes de G dont chacun est invariant dans le précédent et chacun des groupes-quotients (3) G_{i-1}/G_i est un groupe cyclique.

Un groupe de substitutions G ayant ces propriétés est dit *résoluble*. Ainsi, pour qu'une équation algébrique soit résoluble par radicaux, il faut que son groupe soit résoluble ; cette condition est aussi suffisante, comme Galois lui-même le reconnaît.

Signalons encore qu'en introduisant des éléments qu'on a appelés « imaginaires de Galois », Galois crée la théorie des *corps finis* ou *champs de Galois*.

Dans son monumental *Traité des substitutions et des équations algébriques* (1870), Jordan s'est proposé « de développer les méthodes de Galois et de les constituer en corps de doctrine, en montrant avec quelle facilité elles permettent de résoudre tous les principaux problèmes de la théorie des équations ». Pour lui, « le problème de la résolution n'apparaît plus que comme le premier anneau d'une longue chaîne de questions relatives aux transformations des irrationnelles et à leur classification... ». Les travaux de Jordan n'apportent pas seulement une mise en forme, une systématisation. Jordan fait faire des progrès remarquables à la théorie des groupes ; en particulier, il montre que dans une suite de sous-groupes d'un groupe fini G :

$$G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_{i-1} \supset G \supset ... \supset G_l = (e)$$

où, quel que soit i, G_i est sous-groupe invariant *maximal* de G_{i-1}, la « longueur » l de la suite est toujours la même. Hölder complète ce

---

(3) Rappelons que l'invariance d'un sous-groupe G' d'un groupe G permet de définir une décomposition en classes, unique, de G par rapport à G' et une multiplication de classes, qui fait, de l'ensemble de ces classes, un groupe appelé groupe-quotient et désigné par G/G'.

résultat en établissant qu'en outre les groupes-quotients sont déterminés à l'ordre près et à des isomorphismes près.

*
**

Les derniers progrès que nous avons encore à étudier, ceux que Steinitz (4) a réalisés, ont eu deux raisons d'être. La première est le développement même de la théorie de corps : étude approfondie des corps de nombres et de fonctions par Dedekind et Weber, apparition des idées de Kronecker sur la construction des corps de nombres algébriques, découverte de corps p-adiques par Hensel. A travers la diversité des types, les notions et les propriétés communes appellent une théorie générale, nécessairement plus abstraite.

La seconde raison est la modification introduite dans la pensée mathématique par l'œuvre de Cantor. Beaucoup de questions se multiplient et s'éclairent si l'on s'intéresse à des ensembles au lieu de ne considérer que leurs éléments. Ainsi, en Algèbre, on travaillera sur un groupe et ses sous-groupes, sur un corps et ses sous-corps sans s'occuper des éléments qui les constituent, si ce n'est pas vraiment indispensable de le faire.

C'est une théorie abstraite et générale des corps que Steinitz apporte en 1910. Comme il arrive généralement en pareil cas, elle dépasse ce qui pouvait sembler être son but. Non seulement elle coordonne les connaissances acquises dans des cas particuliers, mais elle apporte par surcroît des résultats essentiellement nouveaux : citons, parmi les plus importants, la discussion complète de la multiplicité des racines d'une équation algébrique supposée irréductible, discussion qui conduit aux notions d'extensions séparables ou inséparables (Steinitz dit de première espèce ou de deuxième espèce) et de corps parfait ; et l'existence des extensions algébriquement fermées d'un corps K quelconque, c'est-à-dire de sur-corps Ω tel que tout polynôme en x à coefficients dans Ω se décompose en facteurs tous linéaires à coefficients dans Ω.

*
**

Le progrès en Mathématiques dépend de la valeur des hommes, mais aussi de la façon de penser d'une époque. Des savants d'un génie extraordinaire, comme Abel et Galois, tellement en avance sur leur temps, sont méconnus et il faut un délai pour que leur œuvre se fonde dans le courant général. Mais cela finit par se faire et leur gloire est accrue par les souffrances qu'ils ont endurées.

Quant aux connaissances, leur évolution semble bien avoir quelque chose de fatal. Il y a, dans la découverte, des « points de passage obligé » : tel problème particulier ne peut être résolu que si l'on dispose de telle notion générale. La forme actuelle de l'Algèbre n'est le produit ni du hasard, ni de la fantaisie des hommes, elle résulte de ses nécessités internes.

---

(4) Ernst Steinitz (1871-1928) fit ses études à l'Université de Breslau ; il fut professeur à l'Université de Kiel.