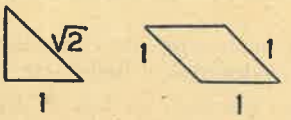
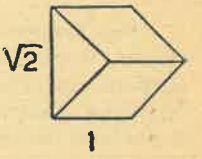
STRUCTURES ALGÉBRIQUES DANS UNE MOSAIQUE JOUET

Parmi les jouets pour enfants qu'on trouve dans les bazars, il y a des boîtes carrées contenant des mosaïques de pièces coloriées de deux sortes : des triangles rectangles isocèles égaux, et des losanges de côtés égaux aux côtés de l'angle droit de ces triangles, les angles aigus valant 45°. En prenant ce côté comme unité de longueur, les aires des pièces triangulaires et des losanges valent respectivement 1/2 et $\sqrt{2}/2$. L'incommensurabilité de ces aires, en rapport à celle de 1 et $\sqrt{2}$, m'a suggéré une leçon active sur des expressions irrationnelles et leur calcul, essayée avec des élèves d'Enseignement Secondaire (13 à 14 ans). Ces élèves connaissaient déjà dans leurs cours d'arithmétique l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Voici comment la leçon peut être conduite :

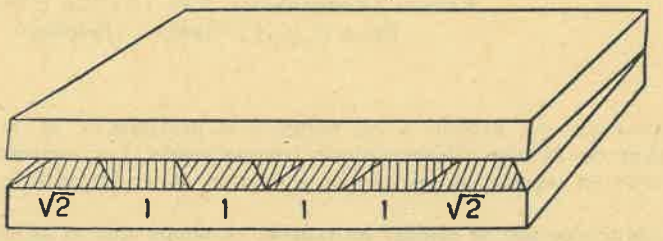


On distribue d'abord aux élèves certaines des pièces du jeu, en leur demandant la valeur des angles, de l'hypoténuse des triangles (le côté de l'angle droit étant pris comme unité) et les aires des deux figures. Celle du losange offrira peut-être quelque petite difficulté. La composition de la figure ci-jointe peut les aider à trouver sans calcul la hauteur du losange et même directement son aire.



Une fois ces aires trouvées, la question suivante est posée : peut-on remplacer un certain nombre de triangles par un certain nombre de losanges de telle sorte que les aires soient équivalentes ?

Seulement, si c'est nécessaire, on rappellera la démonstration classique de l'impossibilité de $\sqrt{2} = m/n$ (m, n entiers), ce qui fournit une réponse concrète négative à la question posée. Les triangles et les losanges formeront séparément des figures dont les aires ne peuvent jamais être équivalentes. Ce sont comme deux mondes à part, on peut dire, non interchangeables. La partie rationnelle de l'aire de toute figure formée de pièces des deux sortes ne peut être, donc, formée que de triangles et la partie irrationnelle sera exclusivement formée de losanges.



Ceci constaté (plus ou moins explicitement) on ouvre un tout petit peu la boîte contenant le jeu ; mais assez pour pouvoir analyser la formation de la longueur du côté de la mosaïque carrée. Les élèves voient, par exemple, que ce côté comprend quatre côtés de losanges et deux hypoténuses de triangles. On peut alors poser la question : combien de pièces de chaque classe y a-t-il dans la mosaïque carrée ? Il n'y a qu'à calculer

$$(4 + 2\sqrt{2})^2 = 24 + 16\sqrt{2}.$$

Il y aura donc 48 triangles et 32 losanges. On le laisse constater.

La question peut être répétée pour d'autres carrés (il y a des boîtes de mosaïques de diverses grandeurs), et aussi pour des rectangles de dimensions composées

avec les côtés des figures simples. (Il est convenable de s'assurer que ces rectangles soient constructibles effectivement, voir note I). Par exemple le rectange de dimensions $(3 + 2\sqrt{2})\ (1 + \sqrt{2}) = 7 + 5\sqrt{2}$, exigera 14 triangles et 10 losanges. La leçon peut finir avec le jeu de composition effective du rectangle ou du carré demandés. Le calcul préalable de pièces nécessaires simplifie la question considérablement.

Quelques conséquences faciles peuvent être déduites en passant. Par exemple : toute mosaïque rectangulaire exige un nombre pair de pièces de chaque genre.

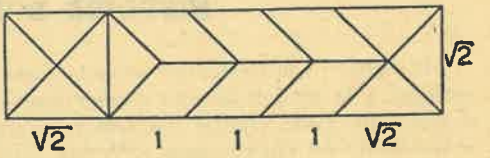
NOTE I. — Tous les rectangles de dimensions composées de côtés des pièces de la mosaïque sont constructibles *sauf ceux qui ont une dimension rationnelle et l'autre irrationnelle*. L'irrationalité dans une dimension exige, en effet, l'emploi de triangles rectangles (hypoténuse), ce qui introduit aussi une irrationnelle (sa moitié) dans l'autre dimension.

La construction effective des rectangles à deux dimensions rationnelles entières est immédiate, ainsi que celle des rectangles de dimensions de la forme $a\sqrt{2}$ et $b\sqrt{2}$ (a, b entiers). L'une et l'autre n'exigent que l'emploi de triangles.

La construction des rectangles à dimensions de la forme

$$m + n\sqrt{2} \text{ et } p\sqrt{2}$$

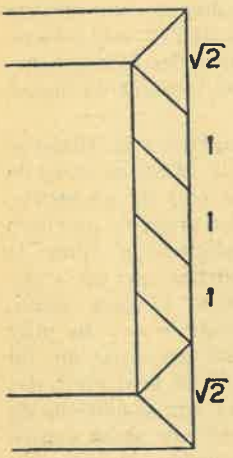
peut être réduite à p bandes de dimensions $m + n\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, qui peuvent être résolues au moyen de $2m$ losanges et $4n$ triangles chacune, comme le montre la figure dans le cas particulier $(3 + 2\sqrt{2}).\sqrt{2}$, facile à généraliser.



Pour étudier le cas général $(m + n\sqrt{2})\ (m' + n'\sqrt{2})$, analysons d'abord la construction d'un carré de côté $m + n\sqrt{2}$. En plaçant, contiguë à chacun de ces côtés, une bande trapézoïdale de hauteur $\sqrt{2}/2$ formée de m losanges et de $2n - 1$ triangles, le problème est réduit à la construction du carré de côté $m + (n - 1)\sqrt{2}$. Une nouvelle bande de m losanges et de $2n - 3$ triangles réduira le côté du carré central à

$$m + (n - 2)\sqrt{2}$$

et, ainsi de suite, nous arriverons à laisser au centre la construction d'un carré de côté m, constructible avec $2\,m^2$ triangles. Il est facile de vérifier que le nombre total de losanges et de triangles utilisés dans cette construction, est respectivement $2m^2 + 4n^2$ et $4mn$, ce qui correspond au calcul algébrique préalablement fait.



La même technique permet de construire tous les rectangles de la forme

$$(m + n\sqrt{2})\ (m' + n\sqrt{2})$$

en laissant au centre, après n bandes, le rectangle mn'.

Le cas général $(m + n\sqrt{2})\ (m' + n'\sqrt{2})$, où

$$n' = n + p,$$

peut être réduit aux précédents au moyen de la décomposition en deux rectangles comme suit

$$(m + n\sqrt{2})\ (m' + n'\sqrt{2}) = (m + n\sqrt{2})\ (m' + n\sqrt{2}) + (m + n\sqrt{2}).p\sqrt{2}.$$

Une étude semblable peut être faite pour des figures ayant la forme de losanges, de trapèze, *ou plus compliquées*. On ne peut s'attendre que les élèves de l'âge indiqué découvrent ces procédés déductifs de construction ; en général ils n'arrivent à réussir qu'après des tâtonnements plus ou moins systématiques.

NOTE II. — Les côtés et les aires des rectangles étudiés constituent un exemple séduisant d'un *anneau d'intégrité*, sauf l'interprétation des éléments négatifs, ce qui pourrait être obtenu au moyen de pièces de couleur noire. En faisant les constructions sur un fond noir la superposition de pièces noires aurait le même effet visuel que la suppression de la figure superposée. La possibilité des constructions se complique alors. Le but de cet article étant simplement d'offrir une motivation de didactique active sur un thème en général ennuyeux pour les enfants, nous n'irons pas plus loin.

P. Puig Adam, *Madrid.*

(Extrait de *Mathematica et Paedagogia*, n° 10).