BULLETIN de l'ASSOCIATION des PROFESSEURS de MATHÉMATIQUES de l'Enseignement Public

SOMMAIRE

I. ETUDES.

H. CARTAN : Volume des polyèdres 1
J. DIXMIER : Mesure des angles 13
A. MAGNIER : Calcul numérique 1958 20

II. PROBLEMES PEDAGOGIQUES.

R. ROUGE : Construction d'une petite lunette astronomique .. 29
P. BOURGE : Construction d'un pied pour lunette astronomique 31

III. DOCUMENTATION.

L'enseignement en Suède 33
Enquête de la C.I.E.M. sur la pénurie de professeurs de mathématiques 40
PUIG-ADAM : Structures algébriques dans une mosaïque jouet (de Mathematica et Poedagogia) 42
G. W. : Histoire d'une faute 44
A. DELACHET : De la question de cours au baccalauréat Math. Elém. considérée comme une variable aléatoire 48

IV. BIBLIOGRAPHIE.

J. ULLMO : La pensée scientifique moderne 51
G. CAGNAC : Algèbre linéaire 52
L. DERWIDUÉ : Introduction à l'algèbre supérieur et au calcul numérique algébrique 52
H. WEYL : Temps, Espace, Matière 53

V. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS.

Les concours de 1958 56
Les instituteurs dans le second degré et le technique 62
Les contractuels en 1957-58 63
La réforme de la licence ès sciences 63

VI. LA VIE DE L'ASSOCIATION.

Réunion du Bureau (22 mai 1958) 67
Le baccalauréat Sciences Expérimentales 68
Le baccalauréat « Lettres modernes » 71
Bloc-note de l'A.P.M. 72

38e année — N° 194 Publication trimestrielle **Octobre 1958**

Le N° 193 était un recueil de problèmes de concours

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
29, rue d'Ulm, Paris (5e)
Paris, Cc. 5.708-21

Les membres de l'Association (cotisation : 1 000 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés.*

Cotisation pour les élèves des E.N.S. et les stagiaires des C.P.R. ..... 400 F
Prix de l'abonnement au *Bulletin* ..... 1 000 F
Prix du numéro ..... 200 F

Présidents d'Honneur
Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

Président : M. HUISMAN, 3, rue Charles-V, Paris, 4e.
Vice-Présidents :
Mlle FÉLIX, 2, rue Octave-Feuillet, Paris, 16e.
Mlle MASSON, 12, boulevard Desgranges, Sceaux (Seine)
M. CLUZEL, 96, avenue de Villiers, Paris, 17e.
M. DURRANDE, 4 *bis*, rue Henri-Moreau, Asnières.
M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Germain, Paris, 5e.
M. NICOLAS, Ecole Normale d'instituteurs, Auteuil.
M. REVUZ, 16, rue de Rome, Les Essarts-le-Roi (S.-et-O.).
Secrétaires :
Mlle MARCHAND, Lycée de Sèvres (S.-et-O.).
M. CROZES, 10, rue du Buisson-St-Louis, Paris, 10e.
M. MOUGENOT, Lycée Poincaré, Nancy.
M. SIROS, 13, avenue Jean-Racine, Sceaux.
Trésorier : M. NICOLAS, 57, rue Bucourt, St-Cloud (S.-et-O.).
Comité de rédaction du « Bulletin » : Mlle FÉLIX, Mlle MARCHAND ; MM. ITARD, MAGNIER, SIROS.
Secrétariat : HUISMAN et WALUSINSKI.

Comité :

Membres élus

Sortants en 1959 : Mlle FÉLIX (*La Fontaine*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; M. FOUCHÉ (*Janson-de-Sailly*) ; M. GUITTON (*St-Louis*) ; M. MINOIS (*St-Louis*).

Sortants en 1960 : MM. DURRANDE (*St-Louis*) : HUISMAN (*Montaigne*) ; MONJALLON (*St-Louis*) ; SIROS (*Louis-le-Grand*) ; GUILLORÉ (*C.C.* Paris).

Sortants en 1961 : M. BAY (*Condorcet*) ; Mlle BIARD (*E.N.S.* Fontenay) ; M. CASSE (Savigny-sur-Orge) ; M. CROZES (*Henri-IV*) ; M. LE MÉNAGER (Angers) ; Mlle MARCHAND (Lycée de Sèvres) ; M. MOUGENOT (*Poincaré*, Nancy) ; Mlle VERVAECKE (*Fénelon*, Lille).

Sortants en 1962 : M. CLUZEL (*E.N.A.* Paris) ; M. FAVRELLE (*Faidherbe*, Lille) ; M. KLEIN (*Charlemagne*) ; M. MAGNIER (*Louis-le-Grand*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; M. NICOLAS (*E.N.*, Auteuil) ; M. REVUZ (*Fac. Sc.*, Poitiers) ; M. SCHAEFFER (Clermont-Ferrand) ; M. THOVERT (*Ampère*, Lyon).

Membres de droit

M. BAY (*Condorcet*) ; M. CANONGE (Montpellier) ; M. GIRAULT (*J.-B.-Say*) ; M. MARVILLET (Strasbourg, *Kléber*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; Mme NICOUD (Lyon, *Marie-Vidalenc*) ; M. POUX (*Saint-Cloud*) ; Mme SCHUCK (*Victor-Duruy*).

Rapporteurs

Enseignement technique : M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. EDDE ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, Mlle PROTIN (Sciences Expérimentales) ; *Mathématiques Supérieures et Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques :* M. BERTRAND ; *Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales : M. EDDE. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — *Concours général :* M. MONJALLON ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (Besançon) ; *Dijon :* M. SAUSER ; Lille : M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (Lyon, *Ampère*) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (Nancy, *Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAULT (Rennes) ; *Strasbourg :* M. EHRHART (Strasbourg, *Kléber*) ; *Tunisie :* M. SAUVAN (Tunis, *Carnot*).

38e Année — N° 194 Octobre 1958

BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

I. ÉTUDES

VOLUME DES POLYÈDRES *

par Henri CARTAN
Professeur à la Sorbonne

Il s'agit des polyèdres dans l'espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, par exemple à 3 ou 2 dimensions. Tel est du moins, en principe, le sujet de cette conférence. En réalité, je dois d'abord m'excuser, car je parlerai peu des polyèdres, et ceci pour deux raisons : la première est que leur définition précise et une étude un peu détaillée de leurs diverses caractérisations risqueraient de prendre tout le temps dont je dispose ici ; la seconde est qu'en élevant un peu le débat, c'est-à-dire en développant une théorie du volume pour une classe de solides plus vaste que celle des polyèdres, on simplifie assez notablement la solution du problème, qui peut être traité de manière complète et rigoureuse au niveau de la classe de Mathématiques Spéciales.

En effet, se limiter aux seuls polyèdres soulève des difficultés techniques qui ont été signalées, par exemple, par HADAMARD dans l'Appendice de son célèbre Traité de Géométrie élémentaire, tout au moins pour le cas de l'espace à trois dimensions. On impose au volume des polyèdres de satisfaire à certains axiomes dûment formulés ; puis on déduit de ces axiomes des formules explicites donnant le volume de certains polyèdres simples (volume du parallélépipède, du tronc de prisme, du tétraèdre, etc...) ; mais, en réalité, tout ce que l'on prouve, c'est que *si le problème posé admet une solution,* celle-ci est unique, et donnée par les formules en question ; mais on ne prouve pas (du moins dans les Traités élémentaires) que le problème admet effectivement une solution ; il faudrait pour cela, dans le cadre où l'on s'est placé, démontrer que de quelque manière que l'on décompose un polyèdre en tétraèdres, la somme des « volumes » de ces tétraèdres (calculés par la formule classique) a toujours la même valeur.

Dans ce qui suit, nous allons poser le problème du volume pour une

* Conférence prononcée le 23 janvier 1958 à l'Institut Henri-Poincaré, et organisée par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

classe plus vaste que celle des polyèdres, et montrer qu'il admet une solution et une seule. Nous aurons ainsi prouvé indirectement que le problème, pour les seuls polyèdres, admet effectivement une solution. En fait, nous suivrons d'assez près la pensée de LEBESGUE ; et nous ne ferons rien d'autre qu'exposer la théorie de ce qu'on appelle parfois la « mesure de Jordan ».

1. LES ENSEMBLES CUBABLES.

Nous nous plaçons dans l'espace R^n, dont les points sont les suites $(x_1, ..., x_n)$ de n nombres réels. On peut considérer R^n comme le produit de n droites réelles. On appellera *pavé* (semi-ouvert) un produit d'intervalles semi-ouverts :

$$a_i \leqslant x_i < b_i \quad (\text{où } a_i < b_i), \quad \text{avec } i = 1, 2, ..., n.$$

(Pour $n = 1$, on dit « intervalle » ; pour $n = 2$, on dit « carré », ou plutôt « rectangle » ; pour $n = 3$, on dit « cube », ou plutôt « parallélépipède rectangle »). Pour chaque entier positif k, considérons l'ensemble E_k de tous les pavés tels que, pour chaque i, a_i et b_i soient deux multiples entiers consécutifs de $\frac{1}{2^k}$. Ces pavés, en nombre infini, sont deux à deux disjoints, et l'espace R^n est réunion de tous ces pavés ; on dira que les pavés de E_k forment un « quadrillage » de rang k. Le quadrillage de rang $k+1$ se déduit du quadrillage de rang k par subdivision de chaque pavé de E_k en 2^n pavés ; plus généralement, si $k' > k$, tout pavé de E_k est la réunion de $2^{n(k'-k)}$ pavés de $E_{k'}$, deux à deux disjoints. Si l'on désire définir un *volume* pour tous ces pavés, de manière à satisfaire aux deux axiomes suivants :

AXIOME 1 : le volume de chaque pavé de E_0 est égal à 1 ;

AXIOME 2 : si un pavé est réunion de pavés deux à deux disjoints, son volume est égal à la somme des volumes des pavés composants ;

AXIOME 3 : deux pavés qui se déduisent l'un de l'autre par translation ont des volumes égaux ;

alors le volume d'un pavé de E_k *est nécessairement égal à* 2^{-nk}.

En fait, si l'on *définit* ainsi le volume des pavés de E_k, les axiomes 1, 2 et 3 sont bien vérifiés.

DÉFINITION D'UN SOLIDE ÉLÉMENTAIRE : On appelle ainsi tout ensemble qui est réunion d'un nombre *fini* de pavés d'un même ensemble E_k (pour un k convenable). Observons que toute réunion d'un nombre fini de pavés de E_k est aussi réunion d'un nombre fini de pavés de $E_{k'}$, pour tout $k' > k$.

Si l'on désire définir, pour tous les solides élémentaires, un volume qui satisfasse à l'axiome 1 et à un axiome 2' (analogue à 2, mais en remplaçant « pavé » par « solide élémentaire » dans la formulation de l'axiome 2), on n'a pas le choix : le volume d'un solide élémentaire doit être égal à la somme des volumes des pavés de E_k qui le composent (les volumes de ces pavés sont d'ailleurs tous égaux entre eux) ; il est clair que le volume ainsi défini est indépendant du choix de k, et satisfait

bien aux axiomes 1, 2′ et 3′ (l'axiome 3′ se déduisant de l'axiome 3 en remplaçant le mot « pavé » par l'expression « solide élémentaire »).

Observons que la *réunion* de deux solides élémentaires est un solide élémentaire ; de même pour l'*intersection*.

Soit maintenant A un ensemble *borné* de R^n ; pour chaque entier k, considérons les deux solides élémentaires $S_k(A)$ et $S'_k(A)$ que voici : $S_k(A)$ désigne la réunion des pavés de E_k qui rencontrent A ; $S'_k(A)$ désigne la réunion des pavés de E_k qui sont contenus dans A. Il est clair que $S'_k(A) \subset A \subset S_k(A)$. Soient respectivement $V_k(A)$ et $V'_k(A)$ les volumes des solides élémentaires $S_k(A)$ et $S'_k(A)$; on a évidemment :

$$V'_k(A) \leqslant V_k(A).$$

Si $h > k$, il est clair que $S'_k(A) \subset S'_h(A) \subset A \subset S_h(A) \subset S_k(A)$, donc :

$$V'_k(A) \leqslant V'_h(A) \leqslant V_h(A) \leqslant V_k(A).$$

Soit alors V′(A) la limite de la suite (croissante et majorée) des nombres $V'_k(A)$, et soit V(A) la limite de la suite (décroissante et minorée) des nombres $V_k(A)$; on a, à la limite :

$$V'(A) \leqslant V(A).$$

Définition : On dit qu'un ensemble borné A est *cubable* si l'on a V′(A) = V(A) ; la valeur commune des nombres V′(A) et V(A) s'appelle alors le *volume* de A. Dans le cas d'un ensemble borné A quelconque, V′(A) s'appelle le *volume intérieur* de A, et V(A) s'appelle le *volume extérieur* de A.

Lorsqu'on veut préciser qu'il s'agit d'un ensemble cubable A de l'espace R^n, on dit que A est *n*-cubable et l'on parle du *volume* n-*dimensionnel* de A, ou encore de la *mesure* n-*dimensionnelle* de A.

Il est clair que si A et B sont deux ensembles bornés tels que $A \subset B$, on a $V(A) \leqslant V(B)$, et $V'(A) \leqslant V'(B)$.

Remarque : Soit A un ensemble borné ; supposons que, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe des ensembles cubables B et C tels que :

$$B \subset A \subset C, \qquad V(C) - V(B) \leqslant \varepsilon ;$$

alors A est cubable. (En effet, on a $V'(A) \geqslant V(B)$, $V(A) \leqslant V(C)$, donc $V(A) - V'(A) \leqslant V(C) - V(B) \leqslant \varepsilon$).

2. PROPRIETES DES ENSEMBLES CUBABLES ET DE LEUR VOLUME.

Théorème 1. — *Soient* A *et* B *deux ensembles cubables. Alors :*

a) *la réunion* $A \cup B$ *est cubable ;*

b) *l'intersection* $A \cap B$ *est cubable ;*

c) *la « différence »* $A \cap \complement B$ *est cubable ;*

d) *si en outre* A *et* B *sont disjoints, on a :*

(1) $\quad V(A \cup B) = V(A) + V(B)$ (additivité du volume).

Démonstration : Prouvons d'abord *c*). On a évidemment :

(2) $\quad S'_k(A) \cap \complement S_k(B) \subset A \cap \complement B \subset S_k(A) \cap \complement S'_k(B).$

Les termes extrêmes sont des solides élémentaires, et il suffira de prouver que la différence de leurs volumes (qui est égale au volume de leur différence) tend vers 0 quand $k \to \infty$. Or, la différence des termes extrêmes est contenue dans la réunion de :

$$S_k(A) \cup \complement S'_k(A) \quad \text{et de} \quad S_k(B) \cap \complement S'_k(B),$$

qui sont des solides élémentaires dont le volume tend vers 0 quand $k \to \infty$, puisque par hypothèse A et B sont cubables.

Prouvons *b*) : on a $A \cap B = A \cap \complement B'$, en posant $B' = A \cap \complement B$; d'après *c*), B′ est cubable ; en appliquant à nouveau *c*), on trouve que $A \cap \complement B'$ est cubable, ce qui prouve *b*).

Prouvons *a*) : on a :

(3) $$S'_k(A) \cup S'_k(B) \subset A \cup B \subset S_k(A) \cup S_k(B).$$

Les termes extrêmes sont des solides élémentaires, dont la différence est un solide élémentaire encore contenu dans la réunion de :

$$S_k(A) \cap \complement S'_k(A) \quad \text{et de} \quad S_k(B) \cap \complement S'_k(B) ;$$

donc, son volume tend vers 0 quand $k \to \infty$, et ceci prouve *a*). De plus, si A et B sont disjoints, alors $S'_k(A)$ et $S'_k(B)$ sont des solides élémentaires disjoints, donc :

$$V(S'_k(A) \cup S'_k(B)) = V'_k(A) + V'_k(B),$$

et par suite (3) entraîne :

$$V'_k(A \cup B) \geqslant V'_k(A) + V'_k(B),$$

$$V_k(A \cup B) = V(S_k(A) \cup S_k(B)) \leqslant V_k(A) + V_k(B),$$

et par suite $V(A \cup B)$, qui est la limite commune de $V'_k(A \cup B)$ et de $V_k(A \cup B)$, est à la fois $\geqslant V(A) + V(B)$ et $\leqslant V(A) + V(B)$, ce qui prouve la relation (1).

Soient maintenant p et q deux entiers > 0 tels que $p + q = n$; considérons R^n comme égal à l'espace-produit $R^p \times R^q$, et soient A un sous-ensemble de R^p, et B un sous-ensemble de R^q.

THÉORÈME 2. — *Si* A *est* p-*cubable et si* B *est* q-*cubable, l'ensemble produit* $A \times B$ (contenu dans R^n) *est* n-*cubable, et on a :*

$$V(A \times B) = V(A) \cdot V(B).$$

DÉMONSTRATION : Le produit d'un pavé de R^p appartenant au quadrillage de rang k de R^p, et d'un pavé de R^q appartenant au quadrillage de rang k de R^q, est évidemment un pavé de R^n appartenant au quadrillage de rang k de R^n ; de plus, le volume du pavé-produit est égal au produit des volumes des deux pavés composants. De là, il suit aussitôt que si A est un solide élémentaire de R^p, et B un solide élémentaire de R^q, alors $A \times B$ est un solide élémentaire de R^n, le volume de $A \times B$ étant égal au produit des volumes de A et de B. Il est maintenant facile de prouver le théorème 2 ; en effet :

$$S'_k(A \times B) = S'_k(A) \times S'_k(B), \quad S_k(A \times B) = S_k(A) \times S_k(B),$$

d'où $$V'_k(A \times B) = V'_k(A) \cdot V'_k(B), \quad V_k(A \times B) = V_k(A) \cdot V_k(B).$$

Lorsque $k \to \infty$, $V'_k(A \times B)$ et $V_k(A \times B)$ tendent donc tous deux vers $V(A).V(B)$, ce qui prouve le théorème.

THÉORÈME 3. — *Tout pavé de* R^n :

$$a_i \leqslant x_i < b_i \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

est cubable, et son volume est égal au produit des nombres $b_i - a_i$.

DÉMONSTRATION : Pour $n = 1$, on doit montrer que tout intervalle $a \leqslant x < b$ de la droite numérique R est 1-cubable, et que son « volume » (ici : longueur) est égal à $b - a$. Or, désignons cet intervalle par A ; il est clair que $S_k(A)$ est un intervalle $u \leqslant x < v$, où u est le plus grand multiple entier de 2^{-k} qui est $\leqslant a$, et v le plus petit multiple entier de 2^{-k} qui est $\geqslant b$; tandis que $S'_k A)$ est un intervalle $u' \leqslant x < v'$, où u' est le plus petit multiple entier de 2^{-k} qui est $\geqslant a$, et v' le plus grand multiple entier de 2^{-k} qui est $\leqslant b$. Il en résulte que la longueur de $S_k(A)$ et celle de $S'_k(A)$ tendent toutes deux vers $b - a$ quand $k \to \infty$; ce qu'il fallait démontrer.

Pour passer du cas $n = 1$ au cas général, on procède par récurrence sur n, en utilisant chaque fois le théorème 2.

REMARQUE : Le même raisonnement montre que tout pavé *ouvert*

$$a_i < x_i < b_i$$

est cubable et a pour volume le produit des $b_i - a_i$; de même pour tout pavé *fermé*

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i.$$

COROLLAIRE DU THÉORÈME 3. — *Le volume des ensembles cubables est invariant par toute translation de* R^n. D'une façon plus précise : *si* A *est cubable, tout translaté de* A *est cubable et a même volume.*

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE : Supposons d'abord que A soit un solide élémentaire, réunion de pavés A_i deux à deux disjoints, appartenant tous à E_k ; soit τ une translation ; le translaté $A + \tau$ n'est peut-être pas un solide élémentaire, mais il est, en tout cas, réunion des pavés $A_i + \tau$ qui sont deux à deux disjoints, et dont chacun est cubable et a même volume que A_i (en vertu du théorème 3). Il en résulte que $A + \tau$ est cubable et a pour volume la somme des $V(A_i)$, d'après le théorème 1. Ainsi, le corollaire est établi lorsque A est un solide élémentaire. Soit maintenant A un ensemble cubable quelconque ; le translaté $A + \tau$ contient l'ensemble cubable $S'_k(A) + \tau$ et est contenu dans l'ensemble cubable $S_k(A) + \tau$; leurs volumes sont respectivement $V'_k(A)$ et $V_k(A)$, qui tendent vers V(A) lorsque $k \to \infty$; donc, $A + \tau$ est cubable et a pour volume V(A), ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 1. — *Une homothétie de rapport* $t > 0$ *transforme tout ensemble* n*-cubable* A *en un ensemble* n*-cubable* A', *et on a :*

$$V(A') = t^n . V(A).$$

La démonstration est analogue à celle du corollaire précédent : on prouve d'abord la proposition lorsque A est un solide élémentaire, et ensuite on passe au cas général.

THÉORÈME 4. — *Soit* A *un ensemble borné de* R^n *; les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) A *est cubable ;*

b) *l'intérieur* $\mathring{A}$ *et l'adhérence* $\overline{A}$ *sont cubables et ont le même volume ;*

c) *la frontière* $\overline{A} - \mathring{A}$ *est cubable et son volume est nul.*

DÉMONSTRATION : Il suffit de montrer que $a) \Rightarrow b)$, $b) \Rightarrow c)$, et $c) \Rightarrow a)$.

$a) \Rightarrow b)$: soit B la réunion des intérieurs des pavés dont $S'_k(A)$ est la réunion, et soit C la réunion des adhérences des pavés dont $S_k(A)$ est la réunion ; on a :

$$B \subset \mathring{A} \subset \overline{A} \subset C, \qquad \text{et } V(B) = V'_k(A), \quad V(C) = V_k(A).$$

Puisque A est cubable par hypothèse, $V_k(A)$ et $V'_k(A)$ ont la même limite V(A), donc $\mathring{A}$ et $\overline{A}$ sont cubables et ont même volume V(A).

$b) \Rightarrow c)$: c'est une conséquence immédiate du théorème 1.

$c) \Rightarrow a)$: on a en effet :

$$S_k(A) \cap \complement S'_k(A) \subset S_k(\overline{A} - \mathring{A}) ;$$

si $\overline{A} - \mathring{A}$ est cubable et de volume nul, le volume du second membre tend vers 0, donc le volume du premier membre tend vers 0 ; or, ceci exprime précisément que A est cubable.

THÉORÈME 5. — *Tout sous-ensemble borné, ouvert et convexe de* R^n *est* n*-cubable.*

DÉMONSTRATION : Rappelons d'abord qu'un ensemble A est *convexe* si le segment de droite qui joint deux points quelconques de A est tout entier contenu dans A. Soit alors A un sous-ensemble borné, ouvert et convexe de R^n ; on peut supposer A non vide (sinon l'assertion à démontrer est triviale). En effectuant au besoin une translation sur A, on peut supposer que A contient l'origine 0 ; notons tA l'homothétique de A par rapport à 0 dans le rapport $t > 0$. On va prouver le

LEMME : Si A contient un cube C de centre O et d'arête $r > 0$, tout point de tA (pour $0 < t < 1$) est centre d'un cube d'arête $(1 - t)r$ contenu dans A.

(En effet, un point x de tA est de la forme ty, avec $y \in$ A ; puisque A est convexe, A contient l'homothétique du cube C par rapport à y, dans le rapport qui transforme 0 en x ; ce rapport est égal à $1 - t$, d'où le lemme).

Revenons alors à la démonstration du théorème 5. Soit $r > 0$ l'arête d'un pavé de centre O, contenu dans A (un tel pavé existe, puisque O est intérieur à A). Fixons un nombre réel t $(0 < t < 1)$; je dis que lorsque l'entier k est assez grand, l'homothétique $tS_k(A)$ est contenu dans A. En effet, $tS_k(A)$ est une réunion de pavés qui rencontrent A et dont l'arête est $t.2^{-k}$; chacun de ces pavés est, en vertu du lemme, contenu dans A dès que $\frac{1}{2}(1 - t)r \geqslant t.2^{-k}$. Or, cette inégalité est bien vérifiée dès que k est supérieur à un entier qui ne dépend que de t.

Ainsi, t étant fixé, on a :

$$tS_k(A) \subset A \subset S_k(A) \qquad \text{pour } k \text{ assez grand ;}$$

le volume de $S_k(A)$ est $V_k(A)$ par définition, et celui de $tS_k(A)$ est $t^n V_k(A)$ d'après la proposition 1 ; ainsi A est compris entre deux ensembles cubables dont la différence des volumes est :

$$(1 - t^n)V_k(A) \leqslant (1 - t^n)V_1(A),$$

et comme t peut être choisi arbitrairement voisin de 1, la différence de ces deux volumes peut être rendue arbitrairement petite. Donc, A est cubable.

REMARQUE : Soit A un sous-ensemble borné, convexe et ouvert de R^n. Le théorème 5 dit que A est cubable ; donc (théorème 4), l'adhérence $\overline{A}$ est cubable (et a même volume que A). Soit maintenant B un sous-ensemble borné, convexe et *fermé* de R^n ; on montre facilement que B est l'adhérence de son intérieur A (qui est convexe), *à condition que cet intérieur ne soit pas vide*. Donc, tout ensemble borné, convexe et fermé B de R^n est cubable lorsque l'intérieur de B n'est pas vide. En réalité, si l'intérieur de B est vide, il est encore vrai que B est cubable, et son volume est nul : cela sera démontré plus loin, lorsqu'on aura prouvé que tout ensemble borné contenu dans un hyperplan de R^n est n-cubable et de volume nul (voir la proposition 2 ci-dessous).

Exemples : toute boule (ouverte ou fermée) est cubable ; tout *polyèdre convexe* est cubable.

3. UN PROCEDE DE CALCUL DU VOLUME AU MOYEN D'UNE INTEGRALE.

Soit A un sous-ensemble de R^n. Pour chaque nombre réel z, notons (A, z) le sous-ensemble de R^{n-1}, formé des points $(x_1, ..., x_{n-1})$ tels que le point $(x_1, ..., x_{n-1}, z)$ appartienne à A ; autrement dit, A est *la projection, sur* R^{n-1}, *de la section de* A *par l'hyperplan* $x_n = z$. Notons $W(A, z)$ le $(n-1)$-volume extérieur, et $W'(A, z)$ le $(n-1)$-volume intérieur de l'ensemble (A, z).

THÉORÈME 6. — *Soit* A *un ensemble* n*-cubable ; toute fonction* $f(z)$ *telle que* $W'(A, z) \leqslant f(z) \leqslant W(A, z)$ *pour tout* z, *est intégrable-Riemann, et l'on a :*

$$\int f(z)dz = V(A).$$

(On notera que cette intégrale porte en fait sur un intervalle fini, car $W(A, z) = 0$ lorsque z est en dehors d'un intervalle fini, parce que l'ensemble A est borné).

DÉMONSTRATION : Pour chaque entier k, on a :

$$(S'_k(A), z) \subset (A, z) \subset (S_k(A), z),$$

et les deux membres extrêmes sont des solides élémentaires (dans R^{n-1}). On a donc :

$$W(S'_k(A), z) \leqslant f(z) \leqslant W(S_k(A), z) \quad \text{pour tout } z ;$$

or, il est clair que $W(S'_k(A), z)$ et $W(S_k(A), z)$ sont des *fonctions étagées*

de z, car la section de cote z d'un solide élémentaire de R^n est constante par intervalles. De plus, il est évident que $\int W(S'_k(A), z)dz$ est égal au volume $V'_k(A)$ du solide élémentaire $S'_k(A)$; et de même :

$$\int W(S_k(A), z)dz = V_k(A).$$

Ainsi la fonction $f(z)$ est comprise entre deux fonctions étagées dont les intégrales $V'_k(A)$ et $V_k(A)$ diffèrent d'aussi peu qu'on veut (puisque A est cubable). Cette propriété caractérise les fonctions intégrables au sens de Riemann, et entraîne que $\int f(z)dz$ est compris entre $V'_k(A)$ et $V_k(A)$, quel que soit l'entier k, donc est égal à $V(A)$.

COROLLAIRE : *Si A est n-cubable et si, pour toute cote z, l'ensemble* (A, z) *est* $(n-1)$*-cubable, alors le volume* $(n-1)$*-dimensionnel* $W(A, z)$ *est une fonction intégrable-Riemann de z, et*

$$\int W(A, z)dz = V(A).$$

APPLICATION : *volume du cône convexe.* — Soit A un cône ayant pour sommet l'origine O et pour base un ouvert convexe et borné B de l'hyperplan $x_n = h$ $(h > 0)$. Le corollaire précédent est applicable, en vertu du théorème 5 ; de plus, d'après la proposition 1, on a :

$$W(A, z) = (z/h)^{n-1}W(A, h) \qquad \text{pour } 0 \leqslant z \leqslant h.$$

Il en résulte que :

$$V(A) = W(A, h) \cdot \int_0^h (z/h)^{n-1}dz = \frac{h}{h}W(A, h).$$

Ainsi, le volume n-dimensionnel du cône A est égal à $\frac{1}{n}$ fois le produit de la « hauteur » h par le volume $(n-1)$-dimensionnel de la base. Cette formule s'applique en particulier au volume d'une pyramide convexe dont la base est dans un hyperplan $x_n = h$.

AUTRE APPLICATION : *volume de la boule-unité de* R^n. — Soit $\sigma(n)$ le volume n-dimensionnel de la boule de centre O et de rayon 1 dans R^n. Si $n \geqslant 2$, appliquons le corollaire du théorème 6 : A désignant la boule-unité de R^n, (A, z) est la boule de R^{n-1}, de centre O et de rayon $\sqrt{1-z^2}$, pour $-1 \leqslant z \leqslant +1$; le volume $(n-1)$-dimensionnel de (A, z) est $(1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}\sigma(n-1)$, et on a :

$$\sigma(n) = 2\sigma(n-1)\int_0^1 (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}dz = 2\sigma(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt.$$

Un calcul classique d'intégration par parties donne une formule de récurrence pour le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt$, d'où ici :

$$\sigma(n+2) = \frac{2\pi}{n+2}\,\sigma(n) \text{ pour } n \geqslant 1.$$

Comme on a évidemment $\sigma(1) = 2$ et $\sigma(2) = \pi$, on trouve finalement :

$$\sigma(2p) = \frac{\pi^p}{p\,!}, \qquad \sigma(2p+1) = \frac{2^{p+1}\pi^p}{1, 3, \ldots (2p+1)}$$

4. INVARIANCE DU VOLUME PAR DEPLACEMENT.

THÉORÈME 7. — *Le volume est invariant par tout déplacement de* R^n *; d'une façon précise, tout déplacement transforme un ensemble cubable en un ensemble cubable de même volume.*

Pour le démontrer, on observe d'abord que tout déplacement est composé d'une translation et d'un déplacement laissant fixe l'origine O. Ce dernier est une transformation linéaire (homogène) sur les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ qui laisse invariante la forme quadratique $(x_1)^2 + \ldots + (x_n)^2$. On sait que ces transformations forment un groupe, appelé le *groupe orthogonal* à n variables, et noté $0(n)$. Le déterminant d'une telle transformation est égal à $+1$ ou -1.

Or, proposons-nous d'étudier, plus généralement, l'effet d'une transformation linéaire T (homogène), de déterminant non nul ; ces transformations forment un groupe noté $GL(n, R)$, et appelé le groupe linéaire à n variables ; $0(n)$ en est un sous-groupe.

T(P) est borné et convexe, et son intérieur n'est pas vide ; donc T(P)

Soit $T \in GL(n, R)$. Si P est un pavé de E_k (cf. n° 1), le transformé est cubable (théorème 5), et son volume n'est pas nul. En particulier, soit $f(T)$ le volume du transformé, par T, du pavé-unité :

$$0 \leqslant x_i < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si P est un pavé de E_k, T(P) a pour volume $2^{-nk} f(T)$, et l'on en déduit facilement : *si* A *est cubable,* T(A) *est cubable, et*

$$V(T(A)) = f(T) \cdot V(A).$$

La valeur exacte de $f(T)$ sera donnée plus loin (théorème 8). Dès maintenant, supposons que $T \in 0(n)$; alors T transforme toute boule de centre O en elle-même, donc $f(T) = 1$, et le théorème 7 est démontré.

PROPOSITION 2. — *Tout ensemble borné* A *contenu dans un hyperplan* H *est* n*-cubable, et son volume* n*-dimensionnel est nul.*

En effet, c'est évident si H est l'hyperplan $x_n = 0$, car si on remonte à la définition d'un ensemble cubable, on voit ici que le volume de $S_k(A)$ tend vers 0 quand $k \to \infty$. Dans le cas général d'un hyperplan H quelconque, on fait un déplacement qui transforme H dans l'hyperplan $x_n = 0$.

ENSEMBLES p-CUBABLES D'UNE VARIÉTÉ LINÉAIRE DE DIMENSION p. — Soit L une variété linéaire de dimension p dans R^n (c'est-à-dire un ensemble translaté d'un sous-espace vectoriel de dimension p). Il existe un déplacement T qui transforme L dans le sous-espace :

$$(*) \qquad x_{p+1} = 0, \ldots, x_n = 0,$$

lequel s'identifie canoniquement à R^p (au moyen des coordonnées $x_1, \ldots, x_p$). Par définition, un sous-ensemble borné A de L est p-cubable et son volume p-dimensionnel est V, si T(A) est un sous-ensemble

p-cubable de R^p dont le volume p-dimensionnel est V. Cette définition ne dépend pas du choix du déplacement T qui transforme L dans le sous-espace (*), car si T' est un autre tel déplacement, $T'T^{-1}$ induit un déplacement de R^p, auquel le théorème 7 s'applique.

VOLUME DU CÔNE A BASE CONVEXE. — Au n° 3, on a étudié le cas où le sommet du cône est l'origine O et la base est dans un hyperplan $x_n = h$. Le cas général se ramène à ce cas particulier au moyen d'un déplacement. D'où la formule donnant le volume : il est égal à $\frac{1}{n}$ fois le produit de la « hauteur » du cône par le volume $(n-1)$-dimensionnel de la base (il s'agit du volume $(n-1)$-dimensionnel d'un sous-ensemble d'une variété linéaire de dimension $n-1$, tel qu'on vient de le définir ci-dessus).

VOLUME DU PAVÉ OBLIQUE. — Soient $a_1, ..., a_n$ des vecteurs linéairement indépendants de R^n. On appelle pavé oblique construit sur $a_1, ..., a_n$ le transformé du cube-unité :

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1$$

par la transformation linéaire T qui transforme les n vecteurs de la base canonique de R^n dans $a_1, ..., a_n$ respectivement. Autrement dit, ce pavé oblique se compose des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i$, où $0 \leqslant \xi_i \leqslant 1$ pour tout i. Les points du pavé pour lesquels $\xi_n = 0$ forment la *base* du pavé oblique ; c'est un pavé oblique dans le sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ engendré par $a_1, ..., a_{n-1}$. La « hauteur » du pavé est la distance du point a_n à l'hyperplan de la base.

Il est clair qu'un pavé oblique est cubable, puisque c'est un ensemble borné convexe, fermé, dont l'intérieur n'est pas vide (théorème 5 et son corollaire).

PROPOSITION 3. — *Le volume* (n-*dimensionnel*) *d'un pavé oblique* A *de* R^n *est égal au produit de sa hauteur et du volume* $(n-1)$-*dimensionnel de sa base.*

Démonstration : Si la base de A est contenue dans l'hyperplan $x_n = 0$, l'assertion résulte aussitôt du corollaire du théorème 6, car si l'hyperplan $x_n = z$ coupe A, alors (A, z) est un pavé oblique qui se déduit de la base A par translation, donc a même volume $(n-1)$-dimensionnel que la base de A. Le cas général se ramène à ce cas particulier au moyen d'un déplacement.

PROPOSITION 4. — *Le volume* (n-*dimensionnel*) *du pavé oblique* A *construit sur* n *vecteurs linéairement indépendants* $a_1, ..., a_n$ *de* R^n *est égal à la valeur absolue de* $\det(a_1, ..., a_n)$ (déterminant des coordonnées des n vecteurs).

Démonstration : Par récurrence sur n ; c'est évident pour $n = 1$, et on va montrer que si c'est vrai pour $n-1$ $(n \geqslant 2)$, c'est vrai pour n. Il existe une transformation orthogonale $T \in 0(n)$ qui transforme la base du pavé oblique A dans un pavé oblique de l'hyperplan $x_n = 0$ (autrement dit, la n^{me} coordonnée de chacun des vecteurs $T(a_1), ..., T(a_{n-1})$

est nulle). Le volume $(n-1)$-dimensionnel de la base de T(A) est, par l'hypothèse de récurrence, égal à la valeur absolue de :

$$\det(T(a_1), ..., T(a_{n-1}))$$

(déterminant de $n-1$ vecteurs de R^{n-1}) ; la hauteur de T(A) est égale à la valeur absolue de la n^{me} coordonnée de $T(a_n)$; le produit du volume $(n-1)$-dimensionnel de T(A) et de la hauteur de T(A) est visiblement égal à la valeur absolue de $\det(T(a_1), ..., T(a_n))$, d'après le calcul d'un déterminant qui a des zéros dans la dernière colonne, sauf à la dernière ligne. D'après la proposition 3, le volume de T(A) est donc égal à $|\det(T(a_1), ..., T(a_n))|$. Or, A a même volume que T(A), et la relation

$$\det(T(a_1), ..., T(a_n)) = \det(T) \cdot \det(a_1, ..., a_n)$$

montre que $\det(T(a_1), ..., T(a_n))$ et $T(a_1, ..., a_n)$ ont même valeur absolue (puisque $T \in 0(n)$ a un déterminant égal à $+1$ ou -1). Finalement, le volume de A est égal à $|\det(a_1, ..., a_n)|$, ce qui achève la démonstration.

5. EFFET D'UNE TRANSFORMATION LINEAIRE SUR LE VOLUME.

THÉORÈME 8. — *Une transformation linéaire homogène* T *de l'espace* R^n *transforme tout ensemble cubable en un ensemble cubable, et multiplie le volume par la valeur absolue du déterminant de* T.

Démonstration : Si $\det(T) = 0$, T applique R^n dans un hyperplan, et le théorème résulte alors de la proposition 2. Supposons donc désormais que $\det(T) \neq 0$; d'après ce qu'on a vu au n° 4, tout revient à prouver que $f(T) = |\det(T)|$, $f(T)$ désignant le volume du transformé T(P) du pavé-unité P :

$$0 \leqslant x_i < 1 ;$$

ce volume est aussi égal à celui de l'adhérence T(P'), où P' désigne le pavé fermé :

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1.$$

Or, T(P') est le pavé oblique construit sur les vecteurs $a_1, ..., a_n$, transformés par T des vecteurs de la base canonique de R^n. Donc

$$f(T) = |\det(a_1, ..., a_n)|$$

d'après la proposition 4. Or, $\det(a_1, ..., a_n) = \det(T)$, et le théorème 8 est ainsi démontré.

6. VOLUME D'UN SIMPLEXE.

Rappelons d'abord la définition du *barycentre* de p points $a_1, ..., a_p$ de R^n, relativement à des masses $\lambda_1, ..., \lambda_p$, *positives ou nulles*, telles que $\sum_i \lambda_i = 1$: c'est le point $\sum_i \lambda_i a_i$. Si on effectue une même translation T sur les points a_i, sans changer les masses λ_i, le barycentre subit la même translation T.

Si les p points a_i sont *indépendants au sens affine* (c'est-à-dire s'il n'existe aucune variété linéaire de dimension $< p-1$ les contenant), alors les barycentres relatifs à deux systèmes de masses (λ_i) et (μ_i) distincts sont distincts. Dans ce cas, le lieu de ces barycentres s'appelle le $(p-1)$-*simplexe* engendré par les p points a_i. Par exemple, pour $p = 1$,

on trouve simplement un point (ou 0-simplexe) ; pour $p = 2$, on trouve le segment de droite ayant pour extrémités les points distincts a_1 et a_2 (1-simplexe) ; pour $p = 3$, on trouve un triangle plan ayant pour sommets les points a_1, a_2, a_3 supposés non alignés. D'une manière générale, les points a_i s'appellent les *sommets* du simplexe qu'ils définissent ; ce simplexe est d'ailleurs le plus petit ensemble convexe contenant les points a_i. Dans la variété linéaire de dimension $p - 1$ engendrée par les p points a_i, le $(p-1)$-simplexe ayant pour sommets les a_i est $(p-1)$-cubable, et son volume $(p-1)$-dimensionnel est $\neq 0$, puisque ce simplexe est un ensemble borné, convexe et fermé, dont l'intérieur n'est pas vide.

PROPOSITION 5. — *Soient* $a_1, ..., a_n$ *des vecteurs linéairement indépendants de* $\mathbf{R}^n$. *Le* n*-simplexe* A *ayant pour sommets* $0, a_1, ..., a_n$ *a pour volume* n*-dimensionnel le nombre*

$$\frac{1}{n!} |\det(a_1, ..., a_n)|.$$

Nous laissons au lecteur le soin de faire la démonstration, qui procède par récurrence sur n et est calquée sur la démonstration de la proposition 4. On remarque simplement ici que le simplexe A peut être considéré comme un *cône* convexe ayant pour sommet le point a_n et pour base le $(n-1)$-simplexe engendré par $0, a_1, ..., a_{n-1}$. On applique alors la formule donnant le volume du cône.

7. CONCLUSION.

Comme nous l'avons annoncé au début, nous ne ferons pas une théorie complète des *polyèdres*. Bornons-nous à quelques indications : on peut définir un *polyèdre convexe* de $\mathbf{R}^n$ comme un ensemble borné et fermé, intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés. On montre que tout polyèdre convexe est réunion d'un nombre fini de n-simplexes dont les intérieurs sont disjoints deux à deux. La théorie des volumes exposée ci-dessus nous permet d'affirmer que le polyèdre convexe est n-cubable et que son volume est égal à la somme des volumes des n-simplexes en question (volumes que l'on sait calculer).

On peut ensuite définir un polyèdre (quelconque) comme étant la réunion d'un nombre fini de polyèdres convexes. Alors l'intersection de deux polyèdres est encore un polyèdre. On montre que tout polyèdre est réunion d'un nombre fini de n-simplexes dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, ce qui permet encore de calculer le volume d'un polyèdre.

Compte tenu de la théorie exposée ci-dessus, il est facile de montrer le théorème suivant : *Supposons que l'on ait attaché à chaque polyèdre* A *de* $\mathbf{R}^n$ *un nombre* $v(A) \geqslant 0$ *jouissant des trois propriétés suivantes :*

(i) *si un polyèdre* A *est réunion de deux polyèdres* B *et* C *dont les intérieurs sont disjoints,* $v(A) = v(B) + v(C)$;

(ii) *si* A′ *se déduit de* A *par translation,* $v(A') = v(A)$;

(iii) *si* A *est le pavé-unité* $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ (pour $i = 1, 2, ..., n$), *on a* $v(A) = 1$.

Alors $v(A)$ *n'est autre que le volume* n*-dimensionnel du polyèdre* A, *tel qu'il a été défini plus haut.*

MESURE DES ANGLES *

par J. DIXMIER
Professeur à la Sorbonne

Chacun connaît, du point de vue concret, la définition de la mesure des angles. Cet exposé, pour ne pas être complètement inutile, devra donc être abstrait, et par suite aussi ennuyeux que possible.

L'étude des angles dans l'espace se ramène facilement à l'étude des angles dans le plan. Pour élaguer le sujet, nous nous limiterons au cas du plan. Il y aurait lieu de distinguer les angles de droites et les angles de demi-droites ; nous nous limiterons aux angles de demi-droites. Enfin, par parallélisme, on peut supposer que toutes les demi-droites envisagées ont une même origine O.

Il paraît difficile de parler avec précision de la mesure des angles sans avoir dit d'abord exactement ce qu'on entend par « angles ». D'autre part, et bien que ce ne soit pas strictement dans le sujet, nous dirons quelques mots des fonctions trigonométriques. L'exposé comprendra donc trois parties : 1) Angles. 2) Fonctions trigonométriques. 3) Mesure des angles.

§ 1. ANGLES

A) *Préliminaires.* — Lorsqu'on veut définir la notion d'angle et établir ses propriétés, il faut bien entendu éviter les pétitions de principes, et savoir sur quoi on s'appuie. Autrement dit, je devrais commencer par exposer les fondements de la géométrie plane. Je m'en garderai bien, et supposerai seulement la géométrie plane suffisamment développée pour qu'on sache les faits suivants :

1) Soit O un point (du plan). Etant donnés deux points M_1 et M_2, on sait définir un point M_3 tel que $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_3}$. D'autre part, étant donnés un point M et un nombre réel λ, on sait définir un point N tel que $\overrightarrow{ON} = \lambda\overrightarrow{OM}$. Muni de ces deux opérations (addition des vecteurs, multiplication des vecteurs par les scalaires), le plan devient un espace vectoriel réel à deux dimensions.

Soit $\overrightarrow{OM}$ un vecteur non nul. On appelle demi-droite d'origine O et de vecteur directeur $\overrightarrow{OM}$ l'ensemble des points N tels que $\overrightarrow{ON} = \lambda\overrightarrow{OM}$, où $\lambda \geqslant 0$. Deux demi-droites sont dites opposées si elles admettent des vecteurs directeurs opposés.

2) D'autre part, à tout couple $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ de vecteurs d'origine O, on sait associer un nombre réel $\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2}$ (produit scalaire de $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$) possédant les propriétés suivantes :

---

* Conférence prononcée le 27 février 1958 à l'Institut Henri-Poincaré, et organisée par la Société Mathématique de France, en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

$\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_2}.\overrightarrow{OM_1}$,

$\overrightarrow{OM_1}.(\lambda\overrightarrow{OM_2} + \lambda'\overrightarrow{OM'_2}) = \lambda(\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2}) + \lambda'(\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM'_2})$,

$\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_1} = |\overrightarrow{OM_1}|^2$.

(Ceci peut se faire sans appel à la notion d'angle. Par exemple, supposant acquise la notion de distance, on pose :

$$\overrightarrow{OM_1}.\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{2}\,[|\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}|^2 - |\overrightarrow{OM_1}|^2 - |\overrightarrow{OM_2}|^2].$$

Toute demi-droite Δ possède un vecteur directeur unique de longueur 1. En effet, si $\overrightarrow{OM}$ est un vecteur directeur de Δ, il s'agit de trouver un nombre $\lambda \geqslant 0$ tel que $|\lambda\overrightarrow{OM}| = 1$, c'est-à-dire tel que $\lambda^2|\overrightarrow{OM}|^2 = 1$, et cette équation en λ a une solution $\geqslant 0$ et une seule.

Deux vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sont dits orthogonaux si $\overrightarrow{OM_1}\,\overrightarrow{OM_2} = 0$. S'ils sont nuls, ils sont linéairement indépendants (car la relation $\lambda_1\overrightarrow{OM_1} + \lambda_2\overrightarrow{OM_2} = 0$ entraîne $0 = \overrightarrow{OM_1}.(\lambda_1\overrightarrow{OM_1} + \lambda_2\overrightarrow{OM_2}) = \lambda_1|\overrightarrow{OM_1}|^2$, donc $\lambda_1 = 0$ et de même $\lambda_2 = 0$), donc forment une base du plan. Deux vecteurs orthogonaux et de longueur 1 constituent ce qu'on appelle une base orthonormale. Etant donné un vecteur $\vec{i}$, il existe des vecteurs non nuls orthogonaux à $\vec{i}$ (en effet, si $\vec{V}$ est un vecteur linéairement indépendant de $\vec{i}$, le vecteur $(\vec{V}.\vec{i})\vec{i} - \vec{V}$ répond à la question). Etant donné un vecteur $\vec{i}$ de longueur 1, il existe seulement deux vecteurs opposés $\vec{j}$ tels que $(\vec{i}, \vec{j})$ constitue une base orthonormale. (En effet, la remarque précédente prouve l'existence d'un vecteur $\vec{j}$ de longueur 1 orthogonal à $\vec{i}$; tout vecteur $\vec{W}$ peut se mettre sous la forme $\lambda\vec{i} + \mu\vec{j}$; exprimant que $\vec{W}$ est orthogonal à $\vec{i}$, on trouve $\lambda = 0$; exprimant que $|\vec{W}| = 1$, on trouve $\mu^2 = 1$).

B) *Rotations.* — On appelle transformation orthogonale du plan (muni de l'origine O) une transformation $\mathcal{C}$ qui possède les propriétés suivantes :

1) Elle est linéaire ; autrement dit, elle conserve l'addition des vecteurs d'origine O, et la multiplication des vecteurs d'origine O par les nombres réels.

2) Elle conserve les longueurs, donc les produits scalaires.

Des transformations orthogonales forment un groupe (appelé groupe orthogonal). Nous allons voir que le déterminant d'une transformation orthogonale (qui, comme on le sait, est indépendant de la base choisie) vaut ± 1. Choisissons une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$. Toute transformation linéaire $\mathcal{C}$ conservant O dans le plan se définit alors par une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de la manière suivante :

$$\mathcal{C}\,(x\vec{i} + y\vec{j}) = (ax + by)\vec{i} + (cx + dy)\vec{j}.$$

Cherchons à quelle condition cette transformation est orthogonale. On doit avoir, quels que soient les nombres x, x', y, y' :

$$(x\vec{i} + y\vec{j}).(x'\vec{i} + y'\vec{j}) = (\mathcal{C}(x\vec{i} + y\vec{j})).(\mathcal{C}(x'\vec{i} + y'\vec{j}))$$

ce qui donne :

$$xx' + yy' = (ax + by)(ax' + by') + (cx + dy)(cx' + dy')$$
$$= (a^2 + c^2)xx' + (ab + cd)(xy' + yx') + (b^2 + d^2)yy'$$

d'où les conditions nécessaires et suffisantes :

(1) $\qquad a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1 \qquad ab + cd = 0.$

Soit δ le déterminant de cette transformation. On a :

$$\delta^2 = (ad - bc)^2 = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (ab + cd)^2 = 1,$$

d'où $\delta = \pm 1$.

Les transformations orthogonales telles que $\delta = 1$ forment un sous-groupe du groupe orthogonal dont les éléments s'appellent rotations (de centre O).

Conservons les notations précédentes et identifions tout point M tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ au nombre complexe $x + iy$. Une transformation du plan s'identifie alors à une transformation faisant passer d'un nombre complexe à un autre. Considérons la transformation $x + iy \to x' + iy'$ définie par la formule :

(2) $\qquad x' + iy' = (\alpha + i\beta)(x + iy)$

où $\alpha + i\beta$ est un nombre complexe de valeur absolue 1. Autrement dit, $x' = \alpha x - \beta y$, $y' = \beta x + \alpha y$. On a $x'^2 + y'^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2)$, donc on a défini une transformation orthogonale, de déterminant $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, c'est-à-dire une rotation. Toute rotation $\mathcal{R}$ s'obtient de cette manière. (Démonstration : définissons α et β par la formule $\mathcal{R}\,\vec{i} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$. Soit $\mathcal{R}'$ la rotation définie par la formule (2). Elle transforme le nombre complexe 1 en $\alpha + i\beta$, donc $\vec{i}$ en $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$. Donc $\mathcal{R}^{-1}\mathcal{R} = \mathcal{R}''$ est une rotation qui conserve $\vec{i}$. Ecrivons $\mathcal{R}''(x\vec{i} + y\vec{j}) = (ax + by)\vec{i} + (cx + dy)\vec{j}$. Comme $\mathcal{R}''$ conserve $\vec{i}$, on a $a = 1$, $c = 0$. Les conditions (1) montrent alors que $b = 0$, $d^2 = 1$; comme $ad - bc = 1$, on a $d = 1$, donc finalement $\mathcal{R}''$ est la transformation identique, et $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$). Au cours de cette démonstration, nous avons remarqué que, si la rotation $\mathcal{R}$ correspond au nombre complexe $\alpha + i\beta$, on a $\mathcal{R}\,\vec{i} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$. Donc $\alpha + i\beta$ **est bien déterminé par** $\mathcal{R}$.

Ainsi, les rotations (de centre O) s'identifient aux nombres complexes de valeur absolue 1. Par ailleurs, si deux rotations $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ correspondent aux nombres complexes $\alpha_1 + i\beta_1$, $\alpha_2 + i\beta_2$, la rotation produit $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$ est définie par la formule :

$$x' + iy' = (\alpha_1 + i\beta_1)[(\alpha_2 + i\beta_2)(x + iy)]$$
$$= [(\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2)](x + iy),$$

donc correspond au nombre complexe $(\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2)$. Ainsi, le *groupe* Θ des rotations s'identifie au *groupe multiplicatif* U des nombres complexes de valeur absolue 1. Plus précisément, nous avons défini un isomorphisme $\varphi : U \to \Theta$ du groupe U sur le groupe Θ.

Voici quelques corollaires : *a*) le groupe des rotations est commu-

tatif ; *b*) il existe une rotation et une seule $\mathcal{R}_0$ dont le carré est la rotation identique (correspondant au nombre complexe -1) ; *c*) il existe deux rotations, inverses l'une de l'autre, dont le carré soit $\mathcal{R}_0$ (correspondant aux nombres i et $-i$).

C) *Angles.* — Soient $\vec{i}_1$ et $\vec{i}_2$ deux vecteurs d'origine O et de longueur 1. Il existe une rotation et une seule transformant $\vec{i}_1$ en $\vec{i}_2$. En effet, on peut supposer que $\vec{i}_1$ est le premier vecteur $\vec{i}$ d'une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$. Et notre assertion n'est autre alors qu'une remarque déjà faite.

En d'autres termes, étant données deux demi-droites Δ_1, Δ_2, il existe une rotation et une seule qui transforme Δ_1 en Δ_2. Cette rotation se note $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$ et s'appelle l'angle $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$.

D'après ce qu'on a vu plus haut, les angles forment un groupe commutatif Θ. Désormais, on notera additivement ce groupe, et on notera donc 0 son élément neutre. On a alors $(\widehat{\Delta, \Delta}) = 0$ pour toute demi-droite Δ. Si une rotation transforme Δ_1 en Δ_2, la rotation inverse transforme Δ_2 en Δ_1, donc $(\widehat{\Delta_2, \Delta_1}) = -(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$. Enfin, si une rotation $\mathcal{R}$ transforme Δ_1 en Δ_2 et si une rotation $\mathcal{R}'$ transforme Δ_2 en Δ_3, la rotation $\mathcal{R}'\mathcal{R}$ transforme Δ_1 en Δ_3, de sorte que :

$$(\widehat{\Delta_1, \Delta_3}) = (\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) + (\widehat{\Delta_2, \Delta_3}).$$

On en déduit que, si Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 sont quatre demi-droites, on a :

$$(\widehat{\Delta_3, \Delta_4}) - (\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) = (\widehat{\Delta_3, \Delta_2}) + (\widehat{\Delta_2, \Delta_4}) - (\widehat{\Delta_1, \Delta_3}) - (\widehat{\Delta_3, \Delta_2}) = (\widehat{\Delta_2, \Delta_4}) - (\widehat{\Delta_1, \Delta_3})$$

donc que les égalités $(\widehat{\Delta_3, \Delta_4}) = (\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$ et $(\widehat{\Delta_2, \Delta_4}) = (\widehat{\Delta_1, \Delta_3})$ sont équivalentes. Autrement dit, pour que deux angles $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$ et $(\widehat{\Delta_3, \Delta_4})$ soient égaux, il faut et il suffit qu'il existe une rotation transformant Δ_1 en Δ_3 et Δ_2 en Δ_4. (On pourrait donc encore définir les angles de la manière suivante : dans l'ensemble $\mathcal{C}$ des couples de demi-droites, on considère deux couples (Δ_1, Δ_2) et (Δ_3, Δ_4) comme équivalents s'il existe une rotation transformant Δ_1 en Δ_3 et Δ_2 en Δ_4. Alors, l'angle $(\widehat{\Delta, \Delta'})$ est la classe d'équivalence de (Δ, Δ') pour cette relation d'équivalence).

La rotation $\mathcal{R}_0$ dont le carré est la rotation identique s'appelle l'angle plat. Les rotations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_1^{-1}$ de carré égal à $\mathcal{R}_0$ s'appellent les deux angles droits. En reprenant la formule (2), on voit que le transformé du vecteur $x\vec{i} + y\vec{j}$ par $\mathcal{R}_0$ est le vecteur $-x\vec{i} - y\vec{j}$. Donc, pour que $(\widehat{\Delta, \Delta'})$ soit un angle plat, il faut et il suffit que Δ et Δ' soient des demi-droites opposées. En raisonnant de manière analogue, on voit que $(\widehat{\Delta, \Delta'})$ est un angle droit si et seulement si Δ et Δ' sont orthogonales.

§ 2. Fonctions trigonométriques

Le plan sera dit orienté si on a *choisi* un des deux angles droits. L'angle droit ainsi choisi sera appelé l'angle droit positif. (En réalité, la notion d'orientation est tout à fait indépendante de l'existence d'un

produit scalaire. Mais la définition qu'on vient d'adopter sera la plus commode pour la suite).

Au § précédent, nous avions choisi une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$, autrement dit un couple (Δ_1, Δ_2) de demi-droites orthogonales. Moyennant ce choix, nous avions défini un isomorphisme du groupe U sur le groupe Θ. Nous allons voir que cet isomorphisme est indépendant du choix de (Δ_1, Δ_2), pourvu qu'on se limite aux couples (Δ_1, Δ_2) tels que l'angle droit $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$ soit positif. En effet, soit (Δ'_1, Δ'_2) un autre couple de demi-droites tel que $\widehat{(\Delta'_1, \Delta'_2)} = \widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$. Soient $\vec{i'}, \vec{j'}$ les vecteurs de longueur 1 portés par Δ'_1, Δ'_2. Soit $\mathcal{R}$ une rotation. Le nombre complexe $\alpha + i\beta$ qui lui est associé relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est défini par :

$$\mathcal{R}\vec{i} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}. \tag{3}$$

De même, si on utilise la base $(\vec{i'}, \vec{j'})$ on associe à $\mathcal{R}$ le nombre $\alpha' + i\beta'$ tel que :

$$\mathcal{R}\vec{i'} = \alpha'\vec{i'} + \beta'\vec{j'}. \tag{4}$$

Or, il existe une rotation $\mathcal{R}'$ qui transforme $\vec{i}$ en $\vec{i'}$ et $\vec{j}$ en $\vec{j'}$. On a donc :

$$\mathcal{R}\vec{i'} = \mathcal{R}\mathcal{R}'\vec{i} = \mathcal{R}'\mathcal{R}\vec{i} = \mathcal{R}'(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}) = \alpha\mathcal{R}'\vec{i} + \beta\mathcal{R}'\vec{j} = \alpha\vec{i'} + \beta\vec{j'}$$

Comparant avec (4), on voit que $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$.

Ainsi, dans un plan orienté, à tout angle θ est associé de façon intrinsèque un nombre complexe $\alpha + i\beta$ de valeur absolue 1. Posons :

$$\mathrm{Cos}\,\theta = \alpha \qquad \mathrm{Sin}\,\theta = \beta.$$

On voit facilement que, si on change l'orientation du plan, $\mathrm{Cos}\,\theta$ ne change pas et $\mathrm{Sin}\,\theta$ est multiplié par -1.

Les fonctions $\theta \rightsquigarrow \mathrm{Cos}\,\theta$ et $\theta \rightsquigarrow \mathrm{Sin}\,\theta$ sont donc des fonctions définies sur l'ensemble des angles et à valeurs réelles.

Nous avons vu que, si deux rotations (ou angles) θ et θ' correspondent à des nombres complexes $\alpha + i\beta$, $\alpha' + i\beta'$, la rotation produit (c'est-à-dire l'angle somme) correspond au nombre complexe produit :

$$(\alpha + i\beta)(\alpha' + i\beta') = \alpha\alpha' - \beta\beta' + i(\alpha\beta' + \beta\alpha').$$

Donc, $\mathrm{Cos}(\theta + \theta')$
$= \mathrm{Cos}\,\theta\,\mathrm{Cos}\,\theta' - \mathrm{Sin}\,\theta\,\mathrm{Sin}\,\theta'$, $\mathrm{Sin}(\theta + \theta') = \mathrm{Sin}\,\theta\,\mathrm{Cos}\,\theta' + \mathrm{Cos}\,\theta\,\mathrm{Sin}\,\theta'$; etc..

3. Mesure des angles

Nous supposons le plan orienté. Nous avons donc un isomorphisme intrinsèque φ du groupe U sur le groupe Θ.

En principe, mesurer une grandeur consiste à lui associer un nombre réel de façon que certaines propriétés soient vérifiées. Mesurer les angles devrait donc consister à définir une application de U dans l'ensemble R des nombres réels.

En réalité, le titre « mesure des angles » est un euphémisme. Nous allons définir un homomorphisme ψ du groupe additif R des nombres réels sur le groupe multiplicatif U. Alors l'application composée ω :

$$\mathrm{R} \overset{\psi}{\rightsquigarrow} \mathrm{U} \overset{\varphi}{\rightsquigarrow} \Theta$$

sera un homomorphisme du groupe additif R sur le groupe additif Θ. A tout élément θ de Θ (c'est-à-dire à tout angle) correspondront une infinité d'éléments x de R tels que $\omega(x) = \theta$; chacun de ces nombres x sera appelé *une* mesure de θ. Si x et x' sont des mesures des angles θ et θ', $x + x'$ sera une mesure de $\theta + \theta'$.

Pour définir ψ, nous supposerons connue la théorie de la fonction exponentielle complexe définie par exemple par son développement en série entière. Pour tout x réel, on pose $\psi(x) = e^{ix}$. On a :

$$|\psi(x)^2| = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = 1,$$

donc $\psi(x) \in U$, D'autre part, $\psi(x + y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = \psi(x)\psi(y)$, donc ψ est un homomorphisme. L'image de cet homomorphisme est un sous-groupe de U qui contient un voisinage de 1 (comme le prouve par exemple le développement en série entière de $\log(1 + z)$) ; cette image est donc U tout entier, puisque U est connexe : autrement dit, tout élément de U correspond à au moins un nombre réel x. Enfin, soit N le noyau de ψ, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels x tels que $\psi(x) = 1$. Ce noyau est un sous-groupe additif fermé de R ; comme $\psi(x)$ n'est pas identiquement égal à 1 (d'après les propriétés des séries entières), on a $N \neq R$; d'après ce qui précède, il existe un x réel non nul tel que $\psi(x) = -1$; alors, $\psi(2x) = 1$, donc $N \neq \{0\}$; donc N se compose des multiples entiers d'un nombre réel > 0 ; ce nombre peut être considéré, dans cet exposé, comme définissant la constante 2π.

Bref, à tout angle θ est associée une infinité de nombres réels ; si x est l'un d'eux, les autres sont les nombres x' tels que $\omega(x') = \omega(x)$, ou $\omega(x' - x) = 0$, ou $x' - x = 2k\pi$, ou $x' = x + 2k\pi$ (k, entier rationnel).

Comme on l'a déjà annoncé, l'un quelconque de ces nombres s'appelle une mesure de θ. On appelle parfois mesure principale de θ la mesure x telle que $0 \leqslant x < 2\pi$.

En particulier, on a $\omega(\pi) + \omega(\pi) = \omega(2\pi) = 0$, et $\omega(\pi) \neq 0$, donc $\omega(\pi)$ est l'angle plat, d'après la définition donnée de l'angle plat. Autrement dit, l'angle plat est l'angle dont une des mesures est π.

(Le procédé précédent pour définir ω est évidemment très indirect puisqu'il utilise une bonne dose d'analyse. Pour un procédé plus direct et plus proche des méthodes élémentaires, mais beaucoup plus long à exposer, on pourra se reporter à Bourbaki, « Topologie Générale », chap. VIII, 2e éd. [Paris, Hermann, 1955]).

On peut construire d'autres homomorphismes de R sur U, donc sur Θ ; il suffit de composer ω avec un automorphisme de R. Par exemple, toute application $x \rightsquigarrow \omega\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$, où a est un nombre réel $\neq 0$, est un homomorphisme de R sur Θ, dont le noyau se compose des nombres ka. Etant donné un angle θ, tout nombre réel x tel que $\omega\left(\frac{2\pi x}{a}\right) = \theta$ s'appelle une mesure de θ relativement à la base a (les mesures relativement à la base 2π sont donc les mesures au sens indiqué plus haut) ; l'angle de mesure 1 relativement à la base a, c'est-à-dire l'angle $\omega\left(\frac{2\pi}{a}\right)$, s'appelle l'unité d'angle correspondant à la base a ; par exemple, l'unité

d'angle correspondant à la base 2π s'appelle le radian, l'unité d'angle correspondant à la base 360 s'appelle le degré, l'unité d'angle correspondant à la base 400 s'appelle le grade.

En composant la fonction $x \rightsquigarrow \omega\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$ et la fonction $\theta \rightsquigarrow \mathrm{Cos}\,\theta$ définie sur Θ, on obtient une fonction définie sur R et à valeurs dans R, que nous désignerons par $x \rightsquigarrow \mathrm{Cos}_a x$. On définit de façon analogue la fonction $x \rightsquigarrow \mathrm{Sin}_a x$. On a donc, par définition de Cos et de Sin :

$$\cos_a x + i \sin_a x = \mathrm{Cos}\left(\omega\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right) + i\,\mathrm{Sin}\left(\omega\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right) = \overset{-1}{\varphi}\left(\omega\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right) = e^{2\pi i x/a}.$$

Donc $\cos_a x = \mathrm{Re}\,(e^{2\pi i x/a})$, $\sin_a x = \mathrm{Im}\,(e^{2\pi i x/a})$.

Si on prend $a = 2\pi$, les fonctions $x \rightsquigarrow \mathrm{Cos}_a x$ et $x \rightsquigarrow \mathrm{Sin}_a x$ se notent simplement $x \rightsquigarrow \mathrm{Cos}\,x$ et $x \rightsquigarrow \mathrm{Sin}\,x$. Donc :

$$\mathrm{Cos}\,x = \mathrm{Re}(e^{ix}) \qquad \mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Im}(e^{ix}).$$

On a vu que $e^{ix} = 1$ pour $x = 2k\pi$, $e^{ix} = -1$ pour $x = \pi + 2k\pi$. Donc, $\mathrm{Sin}\,0 = \mathrm{Sin}\,\pi = 0$; et $\mathrm{Sin}\,x \neq 0$ pour $0 < x < \pi$. L'étude de la dérivée de Sin x (par exemple) permet de conclure que $\mathrm{Sin}\,x > 0$ pour $0 < x < \pi$. Alors, la relation $(e^{i/\pi 2})^2 = e^{i\pi} = -1$ prouve que $e^{i/\pi 2} = i$. Autrement dit, l'angle droit positif a pour mesure principale $\frac{\pi}{2}$ (lorsque l'unité d'angle est le radian).

J. Dixmier.

CALCUL NUMÉRIQUE 1958

La grande presse qui nous raconte, parmi tant de choses, la relation d'Einstein $E = mc^2$, les mystères de la fusion et de la fission, nous a souvent dit que calculer le point d'impact d'un obus demandait aujourd'hui aux calculateurs moins de temps qu'à l'obus pour y arriver, que *tout*, désormais, pouvait être calculé, et vite. Elle nous a rapporté aussi qu'une machine valant plus d'un milliard de francs venait d'être acquise par un groupe de compagnies d'assurances françaises, c'est-à-dire, au fond, par nous, assurés et actionnaires. Nous voudrions comprendre et... pouvoir répondre honnêtement aux questions de nos élèves. Qu'est devenu le calcul numérique en 1958 ? Nous savons bien ce qu'il était, il y a trente ou cinquante ans : un ensemble de procédés utilisant plus ou moins des tables, des abaques, des règles à calculs, employés abondamment par les ingénieurs (avec des coefficients de sécurité convenables) et par les navigateurs. Ces gens, peu nombreux, inutiles en apparence, que sont les astronomes, usaient de procédés analogues, un peu plus raffinés (cf. 1).

D'un point de vue nécessairement modeste, je voudrais le dire succinctement, laissant à de plus compétents, qui le trouveraient opportun, le soin de préciser et compléter — ou contredire — mes affirmations. Je ne m'occuperai pas des questions, intéressantes pour nous professeurs, mais mineures tout de même, que posent l'enseignement du calcul numérique et la présence d'épreuves de calcul aux examens et concours. Avant tout, il ne faut pas oublier que le calcul numérique est une *technique,* non une science ; c'est, plus précisément, une partie des « mathématiques appliquées ». Il y a, bien sûr, des questions de calcul numérique dans certaines parties des mathématiques théoriques et ces questions ont joué un très grand rôle historique (définition et calcul de π ; résolution des équations algébriques ; construction des logarithmes ; théorie des fractions continues). Mais elles sont relativement peu nombreuses ; leur intérêt scientifique vient de ce que, le plus souvent, leur difficulté est un reflet des difficultés du problème théorique correspondant : le calcul numérique de la constante d'Euler est relativement pénible ; sa nature algébrique n'est pas connue non plus. Le calcul de deux racines voisines d'une équation algébrique est délicat ; or, à une légère variation des coefficients, correspondent d'importantes variations de ces racines, etc...

Mais le caractère de technique du calcul numérique me paraît avoir trois conséquences essentielles :

a) Il sera plus ou moins perfectionné selon son importance sociale. Trouver les frais d'envoi d'un mandat-poste, le prix du transport d'un wagon de savon de Marseille à Paris, la surtaxe progressive, en 1958, d'un veuf ayant deux enfants mineurs à charge, connaissant son revenu, demande un calcul facile, mais ce calcul est à faire souvent, rapidement, économiquement ; pour lui, des dispositions convenables (emploi de barèmes, de feuilles de calcul toutes prêtes...) valent la peine d'être prises.

b) Il sera plus ou moins perfectionné suivant la précision demandée : pour découvrir Neptune, Le Verrier a dû — c'est là son mérite essentiel — refaire et même inventer d'importants calculs théoriques ; il a dû faire une critique perspicace et constructive des observations antérieures sur le mouvement d'Uranus dont il disposait. Mais il a dû surtout pousser sa critique à l'extrême, *tirer de l'expérience tout ce qu'elle pouvait donner.* Il se trouvait dans une situation analogue à celle des constructeurs de voitures de course et bâtiments de marine de guerre dont l'optique est totalement différente de celle des constructeurs de voitures de série et de bateaux de pêche, mais finalement plus féconde pour l'avenir.

c) Enfin, et ce sera surtout sur ce point que je voudrais insister, le *matériel* dont on dispose pour résoudre des problèmes numériques a une importance fondamentale. Songeons à d'autres problèmes techniques, aux problèmes de transport, par exemple : si, de Rouen à Bordeaux, je dois envoyer un objet, bien des solutions sont possibles, qui dépendent évidemment de l'objet à transporter (moi-même, ou une lettre, ou un livre, ou mon mobilier), mais aussi du matériel dont je disposerai : avion, bateau, chemin de fer, voiture automobile. Les *délais* et *prix de revient* seront totalement différents.

En 1958, la demande de calculs — ceci à cause de la complexité des problèmes administratifs et sociaux, et aussi à cause de l'importance croissante des problèmes scientifiques — est beaucoup plus élevée qu'en 1908. Mais surtout il y a eu, dans les *matériels* de calcul, une véritable *révolution.* Il nous faut donc dire, au moins très sommairement, quel est ce matériel en 1958 :

1) Il comprend d'abord et avant tout, comme en 1908, comme du temps d'Archimède, la *mémoire humaine.* Elle retient la table d'addition, la table de multiplication, la règle des signes, quelques nombres remarquables (e, π, $\sqrt{2}$...), quelques dispositions d'opérations écrites ou exécutées avec des appareils simples (boulier). Si on y réfléchit, on verra que l'emploi d'autres appareils peut réduire considérablement le rôle de celle-ci (il y a longtemps que des écoliers indociles font leurs opérations avec la table de multiplication de la fin de leurs cahiers sous leurs yeux), mais qu'elle ne peut être totalement supprimée : on l'utilisera encore, et en 1960, et en l'an 2000...

2) Il comprend, et c'est l'outillage le plus simple, le moins coûteux, la mémoire humaine aidée d'un papier et d'un crayon. Il y aurait beaucoup à réfléchir sur le rôle de ces derniers ; ils servent à la fois pour inscrire, mettre en réserve, des nombres qui devront être repris dans la suite du calcul, avec leur signification, pour exécuter certaines opérations (multiplications, racines carrées...), pour retenir les calculs à faire (formules à appliquer) et même pour les établir. On trouve à peu près, dans cette liste grossière, les fonctions des diverses parties des machines à calculer les plus puissantes. Le lien entre les deux matériels : mémoire humaine et son auxiliaire, papier-crayon, serait intéressant à examiner aussi en détail : par exemple, si nous avions eu, dans notre enfance, notre mémoire plus exercée et si nous savions bien les tables de multi-

plication des nombres de 1 à 100, les tables d'addition de 1 à 10.000, nous organiserions autrement nos opérations. Et que dire de celles-ci, si nous utilisions encore exclusivement les chiffres romains ! ! !

3) La mémoire humaine est prolongée encore par d'autres documents : tables de fonctions (tables de logarithmes !), tables d'intégrales, formulaires (fonctions elliptiques), barèmes, plans de comptabilité ; documentation sur des calculs antérieurement exécutés... Pour reprendre notre affirmation du début de cette énumération, un calculateur qui aurait besoin, à 10^{-5} près, de l'intégrale définie $\int_0^{1,9432} e^{x^2} dx$, fera ce calcul bien différemment, suivant qu'il aura ou non une table précise de $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, qu'il aura ou non une table de e^{-x}, qu'il aura ou non, dans son formulaire, des formules précises donnant $\int_0^b g(x)dx$, pour $g(x)$ dérivable plusieurs fois. S'il n'a aucune de ces tables, il fera un développement en série ; il en calculera les termes de manière entièrement manuelle, ou non, suivant les tables et les autres appareils dont il disposera.

4) Les *machines de bureau* (cf. 2, 3 et 7), dites aussi machines arithmétiques mécaniques ou électromécaniques, sont aujourd'hui si répandues (caisses des grands magasins) qu'il est inutile d'en décrire même le principe. C'est celui de la machine de Pascal, mais leurs roues peuvent tourner des millions de fois, sans usure appréciable...

Si nous laissons de côté quelques types d'additionneuses, *les plus simples* d'entre elles permettent de déduire d'un nombre entier *a* écrit sur la machine, en général à l'aide d'un clavier à touches, et en faisant un nombre de tours de manivelle égal à la somme des chiffres de l'entier *b* (séparés par des décalages), le produit *ab*, ou d'ajouter ce produit à un nombre déjà inscrit au totalisateur. Elles permettent la soustraction, la division, la racine carrée, par des manœuvres très analogues à celles que fait le calculateur à main.

A *l'autre extrémité de l'échelle* se trouvent des machines reposant sur le même principe (toujours celui de la machine de Pascal), mais dans lesquelles les tours de manivelle sont donnés, en nombre convenable, par un moteur électrique ; il déclenche aussi des mécanismes qui décalent opportunément le chariot ou remettent à zéro ; la machine fait automatiquement la division, et même, sur quelques types, l'extraction de la racine carrée, le tout à une vitesse telle que multiplications et divisions les plus longues demandent un temps du même ordre de grandeur et, en général, nettement plus petit que celui qui a été nécessaire pour écrire sur le clavier de la machine les nombres à traiter.

Mais *entre ces types* se trouvent un nombre considérable de types intermédiaires correspondant aux besoins divers des utilisateurs : pour certains l'économie, pour d'autres la robustesse, pour d'autres la rapidité, pour d'autres la capacité (c'est-à-dire le nombre maximum de chiffres des nombres traités...), sont la qualité essentielle. Parmi ces

machines, s'en trouvent d'imprimantes, fournissant non seulement le résultat du calcul, mais, imprimés sur une bande, les nombres donnés, et, si on le désire, des résultats intermédiaires. Elles sont particulièrement utilisées en statistique et en comptabilité.

Comment, en 1958, le calculateur muni de tels appareils organisera-t-il ses calculs ? Tout d'abord, à l'inverse de ce qui se passait il y a un siècle, il ne craindra plus les opérations élémentaires que sont la multiplication et la division. Si la fonction logarithme (et son inverse) n'a rien perdu, bien au contraire, de son intérêt en mathématiques appliquées, pour ce calculateur la table de logarithmes est un document, non un outil de calcul. C'est la raison pour laquelle, depuis une vingtaine d'années, les éditeurs de tous les pays ont publié des tables usuelles (à 5, ou 6, ou 7 décimales) des fonctions trigonométriques. D'autre part, le calculateur s'arrangera pour faire, sur sa machine, le moins possible de poses de nombres : ayant à calculer les n nombres $b_i = ka_i$, il n'écrira qu'une fois k et le multipliera successivement par $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Ayant à calculer $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, il pourrait calculer $a_1 b_1$, le recopier sur une feuille de papier, remettre le totalisateur à zéro, calculer $a_2 b_2$, le noter, etc..., enfin ajouter ces produits partiels ; il préférera ajouter, sur la machine même, $a_2 b_2$ à $a_1 b_1$, en ne remettant pas le totalisateur à zéro après calcul de $a_1 b_1$, etc... Ce ne sont là que détails de manœuvre ; l'essentiel est que, devenu beaucoup plus rapide, le calculateur sur machine de bureau pourra envisager de faire, dans un temps raisonnable, des calculs qu'autrefois il se serait interdit même de commencer. Toutefois, un fait nouveau apparaît : le calculateur manœuvrera beaucoup plus de nombres ; son travail, simplifié, consistera à les écrire sur la machine ou à recopier sur son papier des nombres fournis par la machine. Gestes faciles, mais qu'on ne peut répéter continûment sans un instant de distraction et... une erreur. Déjà, le calculateur manuel pur devait s'astreindre à des vérifications (ordre de grandeur des résultats, vérifications arithmétiques par divisibilité...). Le calculateur sur machine de bureau devra s'y soumettre encore plus strictement. Il y a d'ailleurs des types de calculs qui se prêtent à des vérifications d'ensemble évitant de refaire, ou faire refaire, tout un calcul. Considérons, par exemple, le calcul des produits $b_i = ka_i$; on calculera au préalable $a_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i$; en même temps que les b_i, on calculera, et de la même façon, $b_0 = ka_0$. En fin de calcul, on formera $\sum_{i=1}^{n} b_i$; on devra trouver b_0.

5) Depuis quelques années, — à cause de leur emploi par l'E.D.F. et le G.D.F. —, l'emploi des *cartes perforées* (cf. 4) est connu de tous. Elles permettent de faire automatiquement une très importante partie — et la plus fastidieuse — du travail de bureau et du calcul nécessaire à l'élaboration d'une facture. La carte perforée (dont le format, comme celui du trou, est standardisé) est, essentiellement, un document sus-

ceptible de porter 80 chiffres (de 0 à 9). Un lot de fiches étant donné, des machines assez rapides permettent de les *classer*, par exemple de grouper toutes celles telles que le nombre représenté par les trois chiffres des colonnes 10, 11, 12 soit 721, — ou par exemple, encore, de les classer par ordre de grandeur croissante du nombre formé par les chiffres des cinq premières colonnes. Une calculatrice électromécanique est une machine (toujours dérivée de la machine de Pascal), capable, par exemple, de lire le nombre formé par les quatre chiffres écrits dans les colonnes 36, 37, 38, 39, de lire le nombre formé par les quatre chiffres écrits dans les colonnes 14, 15, 16, 17, d'en faire la différence et d'inscrire le résultat sous forme de perforations dans les colonnes 41, 42, 43, 44. Au lieu d'une différence, ce peut être un produit ou une expression plus complexe, se déduisant par additions et multiplications des données inscrites déjà sous forme de perforations sur la carte. Enfin, une carte perforée peut commander une machine à écrire qui écrit en clair, sur elle, ou sur un autre document, les renseignements qu'elle porte. Elle peut être reproduite de manière entièrement automatique, donc sans risque d'erreur. Nous ne saurions mieux faire que de recommander à nos élèves de traduire les indications portées sur les factures d'électricité de leurs parents.

Utilisée surtout pour des travaux de comptabilité, la carte perforée a été, et est encore, très utilisée en calcul scientifique. Bien que les calculatrices soient des machines assez complexes, relativement lentes, elles ont l'avantage énorme de supprimer tout travail manuel de recopie, donc le risque considérable d'erreur qu'il comporte ; elles gardent trace aussi des calculs exécutés.

6) *Machines électroniques arithmétiques.* Ces machines sont d'un principe techniquement tout à fait différent de celui de la machine de Pascal. Dans cette dernière, un chiffre était représenté par la position, parmi 10 possibles (je néglige, pour simplifier, quelques variantes), d'une roue, un nombre entier de p chiffres par l'ensemble des positions de p roues. Or, les nombres de 1 à 10 ne sont guère représentés, dans la nature, que par ce moyen un peu artificiel, et par nos dix doigts. Par contre, il existe beaucoup d'appareils physiques et surtout électriques qui n'ont que *deux* états possibles : un interrupteur est ouvert ou fermé ; un matériau magnétique est aimanté dans un sens ou dans l'autre... Un nombre entier, *écrit dans le système binaire* avec q chiffres (si p est le nombre de chiffres avec lequel il s'écrit dans le système décimal, on a : $p \backsimeq 0{,}3\ q$; $q \backsimeq 3{,}3\ p$), peut donc être représenté par q appareils physiques de ce type. Mais, et c'est là le fait essentiel, l'effacer, c'est-à-dire écrire 0 0 0 ... 0 à sa place, le recopier, prendre son complément, lui ajouter un autre nombre représenté dans les mêmes conditions, ou le multiplier par lui, demandent des temps extrêmement courts, de l'ordre de 0,1 à 0,01 milliseconde. On conçoit que, dans ces conditions, les opérations deviennent singulièrement plus rapides qu'avec les représentations mécaniques des nombres. Non seulement, d'ailleurs, le travail est beaucoup plus rapide, mais il est beaucoup plus économique, en vertu d'un fait technique fondamental de notre époque : un bon contact, un tube sont plus sûrs et beaucoup plus vite faits qu'un boulon et son

écrou ; la mécanique de précision n'est pas appelée à disparaître, tant s'en faut, mais, pour certains de ses usages, elle est très avantageusement remplacée par l'électronique.

Bien sûr, les premières machines électroniques puissantes (1943) ont donné bien des difficultés (cf. 6), mais elles ont permis de voir ce qu'il y avait à chercher pour en faire de bonnes, et, aujourd'hui, le monde dispose de machines qui peuvent faire des travaux de calcul avec une rapidité extrême : j'ai vu une telle machine (l'ordinateur 704 de la Cie I.B.M) calculer plusieurs centaines de décimales de $\pi = 4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{5} - 16 \operatorname{Arctg} \frac{1}{239}$ en moins de dix minutes ; les décimales étaient imprimées au fur et à mesure de la fin du calcul, c'est-à-dire de la traduction de π écrit dans le système binaire en son écriture dans le système décimal. Ces machines ne sont plus, comme les machines de bureau, l'auxiliaire d'un homme, mais l'outil prodigieusement rapide et puissant dont peuvent disposer les chercheurs d'un pays ou d'un continent ; leur manœuvre demande d'ailleurs une bonne équipe de mathématiciens, d'ingénieurs et de « programmeurs ».

7) *Machines analogiques.* Les machines que nous venons d'évoquer opèrent sur des nombres entiers ; à ce titre, on les appelle machines arithmétiques, ou machines digitales. Elles sont, pour la représentation d'un nombre, et l'exécution d'une opération, d'une précision pratiquement illimitée. Il existe d'autres appareils, tels que la règle à calculs, fondés sur un tout autre principe : un nombre x à calculer dépend de nombres connus a, b, c : $x = f(a, b, c)$. Il suffit de trouver, si elle existe, une expérience physique dans laquelle x mesure une grandeur qui dépend des données de l'expérience mesurées précisément par a, b, c. Par exemple, $x = \frac{ab}{c}$ est calculable à l'aide d'un levier, ou d'un point de Wheastone ; x défini par $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ à l'aide de lentilles simples. Ces appareils ont de très grands avantages : pour un problème déterminé dont l'analogue physique a été déterminé, ils sont très rapides et, surtout, il est possible de faire varier très facilement les données du problème, pour en voir les conséquences pour sa solution. Ils ont deux inconvénients : leur précision est limitée, d'une part, à la précision avec laquelle on peut physiquement représenter des nombres a, b, c, x ; d'autre part, une loi $x = f(a, b, c)$ ne peut pas toujours être représentée exactement par un phénomène physique. C'est ainsi qu'en aérodynamique, ils ont rendu des services considérables pour le tracé des lignes de courant et des lignes équipotentielles d'un fluide parfait à deux dimensions s'écoulant autour d'un obstacle, c'est-à-dire pour l'intégration de l'équation aux dérivées partielles de Laplace, avec conditions aux limites. Mais ils ont eu bien d'autres applications ; la combinaison des méthodes analogiques et des servomécanismes s'est révélée particulièrement féconde (travaux de M. Raymond).

Il faudrait conclure :

Il y aurait d'abord une conclusion erronée à tirer de ce prodigieux

accroissement de puissance de l'homme, c'est que *tout* problème de calcul peut être résolu ou le sera dans l'avenir, affirmation que j'attribuais, avec injustice peut-être, à un journaliste pressé. Je n'en crois rien ; je ne vois pas, par exemple (libre aux joueurs de me démentir), comment on pourrait faire une machine à bien jouer au bridge ; je ne vois surtout pas comment, malgré la capacité extraordinaire des mémoires des machines puissantes (l'une d'elles pourrait emmagasiner le Larousse en six volumes ; elle saurait en dicter à sa machine à écrire, à la vitesse de 32 pages à la minute, le contenu, à partir de n'importe quel mot donné, atteint d'une manière pratiquement instantanée), on pourrait représenter efficacement par ses valeurs en un nombre suffisant de points une fonction de quatre variables $\theta = \varphi(x, y, z, t)$: x, y, z sont les coordonnées d'un point de l'atmosphère à l'instant t ; θ est la température en ce point (ou la pression, ou une composante de la vitesse de l'air en ce point). Or, manœuvrer avec de telles fonctions serait indispensable pour intégrer numériquement les équations aux dérivées partielles qui règlent les phénomènes atmosphériques les plus simples et transformer la météorologie en une science exacte.

Parmi les problèmes d'une très grande importance sociale se trouve le problème de la traduction automatique. Il n'y a pas, à l'heure actuelle, de bonnes machines à traduire ; des linguistes affirment, un peu vite à mes yeux, qu'il n'en peut exister. Il y a évidemment lieu de préciser d'abord — et ce n'est pas le plus facile — le problème ; mais on peut penser qu'il mériterait des recherches très poussées de la part de philologues un peu mathématiciens et que la philologie gagnerait même à ces recherches. Disons, après ces deux exemples, et pour conclure sur ce point, que le calculateur d'aujourd'hui doit savoir quels sont les problèmes qu'avec le matériel dont il dispose, il peut résoudre.

Une autre conclusion erronée serait que, pour résoudre des problèmes numériques, il suffit de s'équiper de machines très puissantes ; c'est inexact ; en admettant qu'on sache les manœuvrer, cela dépend des problèmes : chacun sait que, pour aller de La Madeleine aux Galeries Lafayette, il vaut mieux avoir une 2 C.V. qu'une Ferrari et qu'on y va encore plus vite à pied. Actuellement, un ingénieur isolé est considérablement aidé par un bloc de papier quadrillé, une table de carrés, cubes, inverses, racines, une table de logarithmes et sa règle à calculs (le tout valant quelques milliers de francs à peine) ; pour certains travaux, il achètera une machine de bureau (20.000 à 300.000 F, s'il ne lui demande pas des performances coûteuses). Un bureau de calculs utilisera des machines de bureau plus poussées, une installation mécanographique éventuellement (qui pourra servir également à la comptabilité de l'entreprise), mais continuera à se servir aussi de la vieille règle à calculs et des tables ; peut-être, pour le genre de problèmes qu'il étudie, aura-t-il un appareillage analogique ; mais il continuera à en combiner l'emploi avec celui d'autres appareils. Si ce bureau rencontre, de temps à autre seulement, un calcul demandant beaucoup de temps, il le fera faire à façon par une machine très puissante, ce qui est alors la solution la plus économique.

Ces deux réserves faites, les machines modestes et puissantes de

1958 permettent de faire des calculs dans des conditions souvent insoupçonnées : résoudre un système linéaire de 10 équations à 10 inconnues est un problème facile, mais que, seuls, géodésiens et astronomes osaient aborder ; je n'en ai jamais résolu, entièrement à la main, de cette taille ; il y faudrait plusieurs jours certainement. Avec une machine de bureau, une bonne demi-journée suffit ; une machine électronique puissante le fait en moins d'une minute (le temps d'enregistrer les 110 données). Les machines permettent de résoudre des problèmes d'administration et de stratégie, insolubles autrefois, en fournissant presque instantanément, sur une population donnée, des renseignements statistiques extrêmement précis (cf. 8).

Les machines ont elles-mêmes posé des problèmes nouveaux (cf. 9) : en calcul analogique, la recherche des analogies les plus efficaces, c'est-à-dire pratiques et entraînant le minimum d'erreurs de principe (assimiler l'air à un fluide parfait, une cuve à un milieu illimité..., est-ce légitime ?). Comparaison des méthodes de résolution théorique de problèmes ; la machine étant « bête », c'est parfois la méthode la moins heureuse en calcul manuel qui lui convient le mieux (méthodes d'itération indéfiniment poussées). Problème des erreurs : de tout nombre, on doit convenir, pour des raisons évidentes, de ne garder que les p premiers chiffres significatifs ; l'erreur ainsi commise dans un produit ou un quotient se répercute tout au long du calcul et s'ajoute aux erreurs analogues dans les autres produits et quotients. C'est un problème bien connu en calcul manuel, mais, dans un calcul manuel usuel, on fait, au plus, une centaine d'opérations. Ici, la machine va en faire des millions ; le problème (encore mal étudié, je crois) s'exprime donc en termes tout à fait nouveaux.

J'ai dit que la machine était bête ; c'est une manière de parler, mais elle a obligé les constructeurs à retrouver des problèmes dont nous savons tout l'intérêt : décompositions des premiers mécanismes de calcul en mécanismes très élémentaires, emploi du système binaire ; représentations schématiques des circuits, algèbre de Boole.

Il reste donc que pour nous, professeurs d'un certain âge (disons, qui ont fini leurs études il y a plus de dix ans), le calcul numérique a pris un aspect différent de celui que nous avons pu connaître. A la vérité, je ne crois pas que cela puisse influer directement sur notre enseignement, ou si peu (ne parlons plus de rendre une expression « calculable par logarithmes », et encore c'est la locution qui est devenue malheureuse, la chose est restée fort intéressante !). Deux faits sont, me semble-t-il, certains : d'une part, l'appareillage plus puissant ou plus spécialisé ne supprimera pas l'apprentissage nécessaire que doit faire tout calculateur sur un matériel plus élémentaire : nous ne perdons pas le temps de nos élèves en les obligeant à poser leurs opérations, à mettre un chiffre dans chaque carreau, à écrire à hauteur convenable des barres de fractions, à écrire avec soin leurs calculs algébriques, en leur faisant résoudre graphiquement des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues, en leur apprenant à se servir d'une table de logarithmes à 5 décimales, et surtout en leur donnant la manie de la vérification. S'ils peuvent disposer d'une machine à calculer, ils appren-

dront plus d'une machine entièrement mécanique, lente, dont ils utiliseront toutes les possibilités, que d'une machine rapide. D'autre part, dans le monde de demain, et d'un demain très proche, avant 10 ans, avant que nos élèves actuellement en 6e ne soient devenus ingénieurs, le calcul jouera un rôle extrêmement important, parmi les techniques scientifiques.

Bibliographie très sommaire

1. Taton. — *Histoire du calcul.* Collection « Que sais-je ? », n° 198, P.U.F., Paris, 1948 (180 F).
2. Couffignal. — *Les machines à calculer.* Gauthier-Villars, Paris, 1933.
3. Flad, Professeur de mathématiques, Coll. techn., Paris. — Conférences faites à l'Institut d'Astrophysique (hors commerce).
4. Favier et Thomelin. — *La mécanographie.* Editions de Montligeon, 2e éd. 1952.
5. Naslin. — *Principes des Calculatrices numériques automatiques.* Dunod, Paris, 1958 (980 F).
6. Peres, Brillouin, Couffignal. — *Les grandes machines mathématiques.* Editions de la Revue d'Optique, Paris, 1948.
7. Taton. — *Le calcul mécanique.* Collection « Que sais-je ? », n° 367, P.U.F., 1949.
8. Guilbaud. — *La Cybernétique.* Collection « Que sais-je ? », n° 638, P.U.F., Paris, 1954 (180 F).
9. Raymond. — *L'automatique des informations.* Masson, Paris, 1957.
10. Les machines à calculer et la pensée humaine. *Colloque international,* C.N.R.S., Paris, 1953.
11. Derwidué. — *Introduction à l'Algèbre supérieure et au Calcul numérique algébrique.* Masson, Paris, 1957 (6.000 F).

Documentation. — Les trois grandes sociétés qui, en France, construisent des machines et traitent des problèmes numériques sont :
La Compagnie des Machines Bull, 94, avenue Gambetta, Paris, 20e.
La Compagnie I.B.M. France, 1, place Vendôme, Paris, 1er.
La Société d'Electronique et d'Automatisme (S.E.A.) dirigée par M. Raymond, 138, bd de Verdun, à Courbevoie (Seine).

A la Sorbonne, M. Ville donne un enseignement (sanctionné par un certificat) de calcul automatique. A l'Institut Henri-Poincaré, il y a un laboratoire dirigé par M. de Possel qui travaille également à l'Institut Blaise-Pascal du C.N.R.S. (M. Couffignal). Le bureau de calcul de l'Institut d'Astrophysique, créé avant la guerre (pour les calculs de statistique stellaire) par M. Mineur, aujourd'hui décédé, n'est équipé que de machines de bureau ; mais c'est peut-être le laboratoire où ont été traités les problèmes les plus variés et où les méthodes ont été le plus minutieusement comparées. La Faculté des Sciences de Grenoble (M. Kuntzmann) dispose d'un équipement mécanographique électronique moderne.

A ceux d'entre nous qui désireraient suivre, au moins de loin, cette évolution, j'indique l'existence d'une association qui, groupant des chercheurs, universitaires, ingénieurs, constructeurs, a déjà contribué grandement à la diffusion du calcul numérique en France. Comme toute association qui se respecte, elle a un nom « Association française de calcul », un siège social (Institut d'Astrophysique, 98 *bis*, bd Arago, Paris, 14e), un président (je ne sais plus si c'est M. Peres, doyen de la Faculté, ou M. Danjon, directeur de l'Observatoire, mais leurs personnalités et leurs participations effectives aux travaux de l'Association montrent bien l'intérêt de celle-ci), un C.C. postal (Paris 15.664.12) pour percevoir la cotisation annuelle (2.000 francs), enfin depuis un an une revue « Chiffres ».

André Magnier,
(*Louis-le-Grand*).

II. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES

CONSTRUCTION D'UNE PETITE LUNETTE ASTRONOMIQUE

Depuis quelques années, je conseille à mes élèves de Première la construction d'une petite lunette astronomique dès que l'avancement du programme de physique leur permet d'en comprendre le principe. Je me suis rendu compte que si beaucoup tentent l'aventure, la plupart se découragent s'ils n'obtiennent pas rapidement des résultats tangibles, aussi ai-je dû rechercher un procédé précis de construction susceptible d'amener une réussite certaine. Voici un modèle qui m'a donné entière satisfaction et a été réalisé avec succès cette année par quatorze de mes élèves. Les plans de montage de cette petite lunette sont extraits d'un article de Pierre BOURGE, fondateur de la Société Astronomique de Normandie et de l'Observatoire d'astrophysique à St-Aubin-de-Courteraie (Orne).

L'optique comprend :

un *objectif,* lentille simple convergente biconvexe d'environ 130 cm de distance focale, de diamètre voisin de 4 cm : par exemple un verre de lunette de 0,75 dioptrie (la forme ménisque est à déconseiller, la forme plan-convexe n'est pas toujours centrée avec le soin désirable) ;

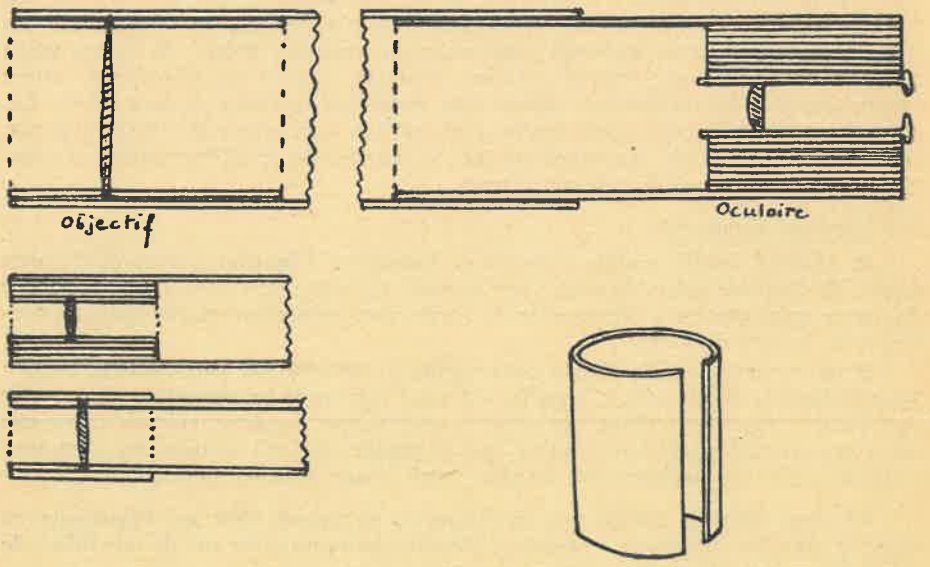
et un *oculaire,* lentille simple convergente bi-convexe ou plan-convexe de 3 à 5 cm de distance focale dont le diamètre est assez petit pour lui permettre d'être sertie vers l'extrémité ouverte d'une cartouche de chasse dont l'amorce, enlevée, laisse une ouverture servant d'œilleton. Prévoir que la pupille de l'œil se trouvera à environ 1 cm en arrière de l'œilleton dans le plan focal image de cette lentille.

Les deux tubes de lunette sont en carton, on en trouve chez les négociants en tissus et chez les droguistes : beaucoup d'étoffes sont enroulées sur de tels tubes, de même les nappes plastifiées.

Les diamètres en sont variés, vous pourrez même avoir la chance de trouver deux tubes pouvant coulisser l'un dans l'autre à frottement doux, ce qui vous permettra ultérieurement une mise au point facile.

Pour le montage de l'objectif, la difficulté est d'obtenir un centrage convenable afin que le foyer principal image soit dans l'axe du tube. Il est préférable de n'avoir pas à tâtonner et d'obtenir par construction un centrage acceptable. Procurez-vous une boîte à onglets comme en ont les menuisiers, les électriciens, les encadreurs, suffisamment large pour pouvoir y placer vos tubes, et une scie à denture fine : scie d'encadreur ou, à la rigueur, scie à contreplaqué ou scie à métaux. Les tubes porte-objectifs et porte-oculaires seront sciés d'équerre par ce moyen Pour fixer les lentilles dans les tubes, découpez une longueur de tube à peine inférieure à la largeur intérieure de votre boîte à onglets, puis, plaçant ce cylindre en travers de celle-ci, vous le sciez successivement le long de deux génératrices voisines, ce qui a pour effet d'en enlever un morceau. Une légère pression des doigts permettra d'insérer ce qui reste du cylindre à l'intérieur du tube de lunette où l'élasticité le maintiendra en place. Si le diamètre de la lentille est à peine inférieur à celui du tube de lunette, le cylindre intérieur forme butée et la maintient. Un second cylindre fendu, préparé avec le même soin que le précédent, sera introduit à la suite de l'objectif et le maintiendra en place. Il est préférable de ne pas coller ce dernier afin de pouvoir nettoyer l'objectif de temps en temps. Si le tube est d'un diamètre très supérieur à celui de l'objectif, on insérera d'abord dans ce tube un cylindre fendu de 15 cm de longueur environ, un second à l'intérieur du premier si c'est nécessaire, etc..., puis on y insérera l'objectif entre deux courts cylindres fendus, comme il a été expliqué

ci-dessus. Le procédé s'applique au montage de l'oculaire dans sa cartouche de chasse, au montage de la cartouche dans le tube porte-oculaire (celui qui permet la mise au point), à l'ajustage des deux longs tubes l'un dans l'autre. Un couvercle sur l'objectif, un très petit bouchon dans l'œilleton, mettront l'appareil à l'abri de la poussière. Le prix de revient n'atteint pas mille francs et chaque élève peut avoir sa lunette, construite de ses propres mains, grossissant de 30 à 40 fois, supérieure en qualité à celles que construisit Galilée.



Il est vraisemblable qu'en opérant ainsi, on obtiendra une image correcte dès le premier essai, c'est-à-dire que l'image d'une étoile centrée sur l'axe sera un petit cercle blanc entouré d'une auréole irisée, et peut-être d'un ou deux anneaux de diffraction très faibles. Si l'image au centre du champ est un trait lumineux ou une aigrette, ceci est vraisemblablement dû à un défaut de centrage de l'un des verres. Faire tourner le tube porte-objectif seul, puis le tube porte-oculaire seul. Si l'image tourne, le verre à incriminer est ainsi trouvé, il faut recommencer son montage.

Une déformation de l'image peut aussi avoir pour origine un serrage de l'objectif. Celui-ci ne doit pas bouger, mais il ne doit pas être serré, surtout dans le sens diamétral. Il doit entrer dans le tube de la lunette sans forcer, il est préférable qu'il ait un léger jeu, disons 2 à 3 dixièmes de millimètre sur le diamètre.

La véritable difficulté n'est pas d'ordre optique : un pied est indispensable, il faut qu'il soit stable, et ce n'est pas tellement facile à obtenir. Contentons-nous pour le moment d'indiquer qu'un modèle de pied photographique *en bois* donne habituellement de bons résultats.

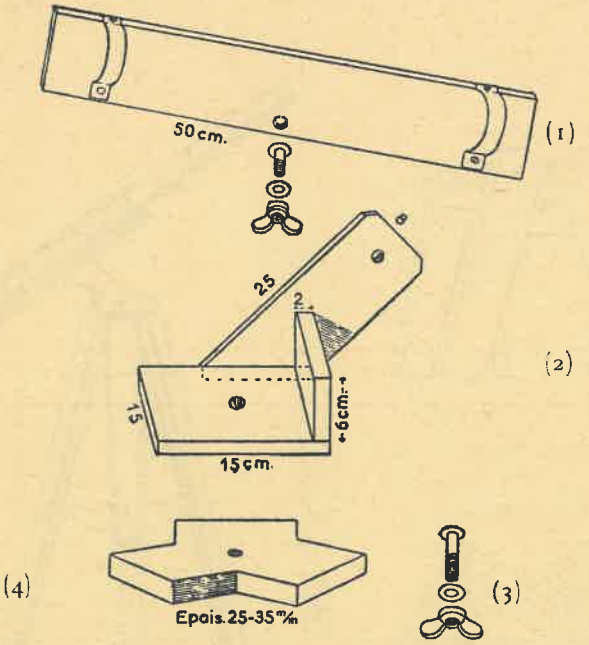
R. Rouge,
(*Sciences physiques, Lycée Pothier, Orléans*).

Fourniture de verres d'optique pour lunettes astronomiques, de lunettes complètes, de cartes du ciel, de brochures et appareils divers. Demander la documentation contre 20 F en timbres-poste, adressés à : Matériel d'Enseignement scientifique, Observatoire de St-Aubin-de-Courteraie (Orne).

Construction d'un pied pour lunette astronomique

Lorsqu'on possède une longue-vue ou une lunette, *il est indispensable de monter celle-ci sur un pied stable.* Il est impossible d'effectuer une observation astronomique si l'on ne réalise pas cette condition.

De multiples occasions nous ont amenés à construire des dizaines de modèles de pieds. Très peu ont donné satisfaction. Le modèle que nous proposons ici est facile à réaliser ; de plus, il est stable, peu encombrant et commode à transporter. Se méfier des innovations qui sont souvent une source d'échecs.



Notre pied de lunette devra comporter une partie mobile permettant de pointer la lunette dans toutes les directions du ciel. Deux mouvements sont nécessaires : le premier sera un mouvement horizontal autour d'un pivot vertical ; le second un mouvement permettant le pointage dans le sens vertical.

Description et montage. — Sur une planchette de 50 × 8 cm fixons la lunette à l'aide de deux colliers métalliques (fig. 1). Cette planchette-support pivotera verticalement autour d'un boulon (avec écrou à oreilles) à la partie supérieure de la pièce (fig. 2). Ce dernier dessin montre comment assembler trois planchettes de bois suivant les dimensions indiquées. Noter que l'une des planchettes est déportée en dehors pour permettre le pointage de la lunette au zénith.

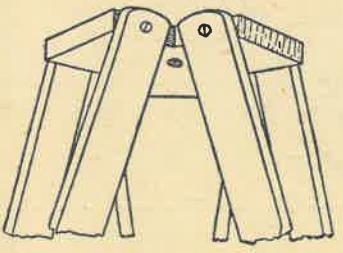
Seule la pièce de bois 4, vue de face à la figure 6, exige certaines précautions avant son découpage. Partir d'une planche carrée de 22 cm de côté, de 25 à 35 mm d'épaisseur. Le tracé des parties à découper est un exercice de construction géométrique ; les côtés des angles rentrants doivent permettre de visser les lattes du pied qui auront, par exemple, 4 cm de largeur ; mieux vaut donc prévoir 5 cm pour les côtés des angles rentrants.

Se procurer 6 lattes de bois de 1 m 75 de longueur et de 40 × 15 mm. Les lattes sont assemblées deux par deux ; les parties inférieures sont clouées ou vissées l'une contre l'autre, tandis que les parties supérieures sont vissées contre les bords évidés

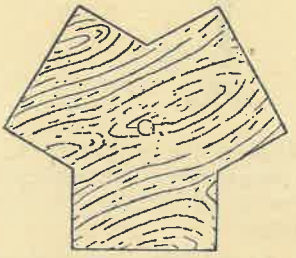
de la pièce 4. Le montage est donné par la figure 5. L'écartement et la rigidité de chaque paire de lattes seront maintenus par deux tasseaux de bois également répartis sur la longueur. Une petite chaînette réunira les trois pieds et évitera ainsi tout écartement accidentel.

La pièce mobile 2 sera solidaire de la tête de pied 5, par l'intermédiaire d'un boulon 3, muni d'un écrou à oreilles (8 × 60 mm). Enduire les deux parties mobiles de savon ou de talc pour adoucir les mouvements. Mouvements qui peuvent être plus ou moins libres en agissant à volonté sur les écrous à oreilles.

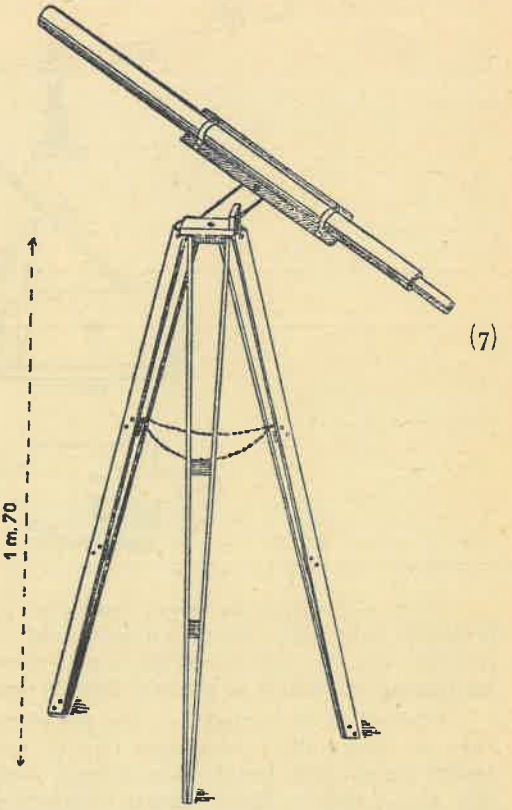
Pierre BOURGE.



(5)



(6)



(7)

III. DOCUMENTATION

L'ENSEIGNEMENT EN SUÈDE

Un peu de statistique. — La Suède a une superficie d'environ 450 000 km², dont 55 % sont des forêts, 9 % des terres cultivées, 1.7 % des prairies. Elle comptait, en décembre 1956, environ 7 350 000 habitants, dont la moitié de population urbaine. 23,4 % des Suédois se livrent à l'agriculture, 41 % à l'industrie et l'artisanat, 13 % au commerce, 9,6 % aux professions libérales.

L'unité administrative est la municipalité, à laquelle est laissée une large autonomie ; on en comptait 1 037 en 1956, dont 133 urbaines.

Notons, pour terminer ces quelques renseignements, que la densité moyenne de la population est de 17 au km². mais qu'elle tombe à moins de 4 au km² dans le nord du pays.

L'Enseignement du Premier Degré

En Suède comme ailleurs, l'Enseignement Primaire est d'organisation relativement récente ; c'est en 1842 qu'il reçut un statut, qui fixait sa durée à six ans. Chacune des 3 000 paroisses devait avoir une école et chaque ville épiscopale un séminaire pour la formation des maîtres. En 1919, le cycle de six ans fut prolongé par des cours complémentaires obligatoires ; en 1936, une septième année fut instituée avec la possibilité, pour certaines communes, de créer une huitième ou même une neuvième année, possibilité que toutes les villes importantes ne manquèrent pas de mettre à profit. Là où n'est offert que le cycle normal de sept ans est institué un cours complémentaire d'une année ; il comporte au moins 180 heures de cours et il est consacré à l'éducation civique et à la formation professionnelle adaptée aux conditions locales du commerce et de l'industrie. Le total annuel peut aller jusqu'à un maximum de 540 heures.

A cause de la réforme de l'enseignement, dont nous parlerons plus loin, et en raison du fait qu'un nombre croissant d'enfants bénéficie de l'Enseignement du Second Degré, le nombre d'élèves, qui suivent l'enseignement complémentaire dont il vient d'être question, va en diminuant : de 162 000 en 1930, il était tombé à 46 000 en 1955.

En 1957, sur 1 037 municipalités, 101 avaient un cycle de huit ans et 25 un cycle de neuf ans. L'ensemble des écoles primaires (volkskolas) reçoit 832 600 élèves dont 30 % appartiennent au cycle de huit ans et 5 % au cycle de neuf ans.

L'enseignement privé n'existe guère en Suède ; il intéresse moins de 0,5 % des effectifs et ne bénéficie d'aucune aide publique.

L'enfant entre à l'école primaire à sept ans, éventuellement à six ans s'il est bien doué. En général, il est soumis à un examen de « maturité scolaire » destiné à apprécier son intelligence, son développement physique et ses réflexes, à l'aide de tests et d'examens médicaux. Auparavant, il a pu être accueilli, de quatre à six ans, dans un jardin d'enfants ; il en existe actuellement 700 qui peuvent recevoir 35 000 enfants.

Les deux premières années de l'école primaire constituent l'école maternelle ; on y enseigne le catéchisme, le suédois, le calcul, l'étude du milieu, le chant, la gymnastique ; ensuite l'étude du milieu est divisée en histoire, géographie, sciences naturelles, dessin. En outre, selon le cas, on trouve dans les programmes, le jardinage, l'enseignement ménager, la protection des animaux, l'entretien des forêts, la défense contre les attaques aériennes, la lutte contre l'alcoolisme, l'éducation sexuelle, le code de la route.

La journée de travail compte quatre ou cinq heures pour les plus jeunes élèves, six ou sept pour les plus grands. La semaine est de six jours et l'année scolaire com-

porte au moins 214 jours de classe. Elle commence vers le 1er septembre et le premier semestre s'achève vers le 15 décembre. Le second semestre commence en janvier pour se terminer vers le 15 juin. Dans l'intervalle, il y a quelques petits congés (Pâques, Pentecôte), notamment en général une semaine pour les sports d'hiver à la fin de février.

En principe, l'école primaire est du ressort des autorités municipales. En fait, elle est de plus en plus contrôlée par l'Etat, qui assure la gratuité des études, l'inspection (52 inspecteurs primaires), les soins médicaux, les repas gratuits. Enfin, l'administration organise le transport des élèves dans les régions à faible densité de population, ce qui permet de faire disparaître les écoles à régime exceptionnel où le petit nombre d'élèves oblige à confier à un seul maître plusieurs sections de niveaux différents.

L'Enseignement du Second Degré

La plus importante école du Second Degré, selon les effectifs, est l'Ecole Réale, qui correspond à l'enseignement moderne, sans latin ni grec ; en 1956, 168 établissements recevaient 101 300 élèves, et le désir de bénéficier de l'Enseignement du Second Degré se fait plus vif d'année en année. En 1931, 15 % des élèves quittant l'école primaire entraient à l'école réale ; en 1956, ce pourcentage était devenu 41,2. Aujourd'hui, il a probablement dépassé 50 %, et on doit parfois écarter des candidats, faute de place et de personnel.

En principe, il n'y a pas d'examen d'entrée ; l'admission est prononcée d'après les notes obtenues à l'école primaire, sauf pour les élèves qui se présentent avant l'achèvement du cycle normal d'études du Premier Degré. Souvent, en raison de l'afflux des candidats, on est obligé d'exiger des notes supérieures au minimum théoriquement suffisant.

Les écoles réales sont généralement mixtes ; il en existe de deux sortes, l'une où les études durent cinq ans, après quatre années d'école primaire, l'autre où les études durent quatre ans, après six ans de primaire. Cette dernière forme est destinée aux élèves habitant dans les régions de faible peuplement, et qui se trouvent ainsi éloignés de localités assez importantes pour posséder une école réale. Les études durent un an de plus, mais l'élève peut rester plus longtemps dans le milieu familial.

Depuis 1956, le séjour dans l'école réale peut être réduit à trois ans pour ceux qui ont déjà étudié l'anglais à l'école primaire. L'étude de l'anglais est obligatoire en Suède, et de plus en plus des cours sont institués dans l'Enseignement du Premier Degré, aidés par la radio (on attache une extrême importance à la prononciation).

A l'école réale, l'anglais est obligatoire dès la première année, l'allemand dès la seconde ou la troisième année, selon la section. Le français est facultatif, pendant la dernière année ; il est choisi surtout par ceux qui envisagent d'entrer au lycée, pour lequel des notions de français sont exigées. Aucune langue étrangère, autre que les trois précédentes, n'est enseignée à l'école réale.

Les matières enseignées sont les mêmes que dans les écoles françaises analogues, avec, en plus, la religion. Cependant, durant les deux dernières années d'études, trois des matières régulières peuvent être remplacées par des sujets plus pratiques pour ceux qui ne poursuivront pas leurs études, ou qui entreprendront des études techniques.

L'école réale existe d'ailleurs aussi sous forme technique : commerce, chimie, mécanique, enseignement ménager. Quelle que soit la forme, générale ou professionnelle de l'enseignement, il se termine par le « realexamen », dont l'écrit est subi au début de mai et l'oral un mois plus tard. L'écrit comporte une composition de suédois et deux autres parmi celles d'anglais, d'allemand et de mathématiques. L'oral porte sur quatre matières, pour lesquelles il est tenu compte du choix fait par le candidat dans ses deux dernières années d'études. Cette partie orale de l'examen est d'ailleurs une simple formalité ; la décision est prise d'après l'écrit, et elle tient compte du tra-

vail fourni antérieurement par l'élève. En 1956, il y a eu 17 500 candidats au realexamen (dont 2 100 pour la forme pratique), c'est-à-dire environ 13,5 % du nombre annuel des naissances.

Le gymnase. — L'Enseignement Secondaire est donné dans les gymnases, dont le but principal est de préparer l'entrée à l'Université. Comme les écoles réales, les gymnases sont mixtes et sont des établissements d'Etat. Ils sont généralement associés à une école réale, et les études y durent trois ou quatre ans, trois pour ceux qui sont allés jusqu'au realexamen, quatre pour ceux qui ont quitté l'école réale avant l'année terminale.

Il existe actuellement trois sections : classique, sciences et générales, lesquelles, pendant les deux dernières années, se ramifient en diverses branches : latin seul, latin-grec pour le classique, biologie et mathématiques pour la section sciences, social et langues pour la section générale.

En 1956, 79 gymnases nationaux et 22 municipaux, recevaient 29 300 élèves dont 40 % dans les gymnases à trois ans d'études. La section classique était choisie par 35 % d'entre eux, la section sciences par 45 % et la section générale par 20 %.

Notons, en ce qui concerne les langues vivantes, qu'on peut étudier dans les gymnases, outre les trois langues fondamentales, l'espagnol, le russe ou le finnois.

Le couronnement des études est le baccalauréat ou « studentexamen ». L'écrit a lieu en mars ou avril, les épreuves sont les mêmes dans tout le pays. Il y en a trois ou quatre, dont une de suédois et une d'anglais. L'épreuve de suédois n'a pas une importance décisive, car on tient compte avant tout de la moyenne des devoirs de l'année.

Les candidats déclarés admissibles subissent les épreuves orales en mai ou juin ; il y a en principe quatre ou cinq interrogations, mais ce nombre est souvent réduit à trois ou même deux, en raison du nombre croissant de candidats.

Toutes les épreuves ont lieu dans le lycée même, avec les professeurs de l'établissement, auxquels sont adjoints des « censeurs », en général des professeurs d'Université. Le professeur interroge lui-même, dans sa spécialité, mais un censeur peut poser des questions. Professeurs et censeurs décident ensuite du résultat définitif, pour lequel l'oral importe peu finalement ; on tient compte d'une impression générale et du dossier scolaire du candidat. Il n'y a guère que 8 % d'échec à l'écrit et 6 % à l'oral. Les candidats qui ont échoué à l'oral peuvent être autorisés à réparer, dans un délai fixé, deux matières au plus, sinon, il y a une autre session complète d'automne.

Ici encore, le nombre des candidats augmente rapidement ; il y avait 4 150 bacheliers en 1946, il y en eut 6 600 en 1956, se répartissant en 3 700 garçons et 2 900 filles ; 80 % environ des bacheliers poursuivent des études supérieures. Notons enfin que l'âge moyen des bacheliers est de 20 ans, tandis que pour le realexamen il est de 17 ans.

La réforme de l'enseignement

Dès 1940, il apparaissait que le système scolaire suédois avait besoin d'être modernisé. L'Enseignement Primaire se révélait parfois insuffisant dans les matières de base étudiées à l'école ; il paraissait nécessaire d'étendre au plus grand nombre possible le bénéfice de l'école réale, dont la clientèle augmentait d'ailleurs d'année en année ; les régions rurales étaient défavorisées et leurs ressources intellectuelles ne semblaient pas suffisamment utilisées.

Après dix ans d'études et d'enquêtes, il fut décidé de mettre à l'essai l'école unique de neuf ans, qui réunit l'école primaire et l'école réale. Les communes, dont le nombre est préalablement réduit par fusion des plus petites, recevront chacune une école de ce type.

Pour le moment, et depuis 1952, la réforme est expérimentée dans quelques districts dont le nombre est progressivement accru. En 1956, l'expérience se poursuit dans 71 communes, et intéresse environ 110 000 élèves, soit 14 % de l'effectif total de l'école primaire.

Dans les deux premiers cycles, de trois ans chacun, l'enseignement est uniformément le même pour tous les élèves, tandis que les trois dernières années sont aménagées de manière à permettre une orientation progressive des élèves. Il a été en effet estimé qu'il n'était pas possible d'orienter définitivement avant que des goûts et des aptitudes se soient établis, c'est-à-dire avant la puberté.

Au début de la septième année est institué un jeu d'options entre lesquelles l'élève choisit une matière supplémentaire, théorique ou pratique ; l'année suivante, il choisit de même deux matières supplémentaires. Enfin, la neuvième et dernière année se partage en trois sections : 9*a* : générale ; 9*g* : préparation au gymnase ; 9*y* : professionnelle.

A titre d'exemple, le tronc commun comporte, en huitième année, la répartition suivante d'heures hebdomadaires, selon les matières :

Religion : 1 ; suédois : 3 ; histoire : 2 ; instruction civique : 2 ; géographie : 2 ; biologie et hygiène : 2 ; physique : 2 ; chimie : 3 ; mathématiques : 4 ; dessin : 1 ; musique : 1 ; éducation physique : 3 ; travaux manuels : 1 ; économie domestique : 1, et il est offert des options en suédois, anglais, allemand, orientation, travaux pratiques divers. Le français apparaît comme option (3 heures) dans les sections 9*a* et 9*g*.

Dans la section professionnelle 9*y*, la moitié de l'horaire est consacrée aux travaux pratiques ; cette section peut d'ailleurs être installée dans les écoles professionnelles antérieures à la réforme, et ces dernières devront, elles aussi, être mieux adaptées aux exigences modernes.

Les méthodes, elles aussi, font l'objet d'expériences ; la méthode d'enseignement avec interrogations, devoirs et leçons, doit céder la place à des méthodes plus actives, les examens seront supprimés, sauf le realexamen et le studentexamen, qui ne devront plus être un contrôle des connaissances, mais un simple examen de fin d'études.

Les frais accrus de l'enseignement seront naturellement supportés par l'Etat, mais on envisage cependant de laisser la plus grande liberté aux communes dans l'organisation de leur système scolaire, pensant favoriser ainsi le bon fonctionnement de l'institution mieux que par un lointain contrôle administratif.

Notons qu'avec ses diverses sections actuelles, le studentexamen a déjà subi une réforme provisoire destiné à l'adapter à la réforme, qui ne produira tous ses effets que vers 1965.

L'enseignement populaire

Il existe, en Suède, une importante organisation éducative populaire, dont les collaborateurs sont totalement désintéressés. C'est un médecin, Anton Nyström, qui a fondé en 1880 l'Institut Ouvrier, à Stockholm ; il était destiné à donner de l'instruction à tous ceux qui n'ont pu faire des études complètes pendant leur jeunesse. En 1885 était fondée l'Association Etudiants et Ouvriers ; puis les Universités participèrent aux conférences de vulgarisation, qui sont maintenant subventionnées par l'Etat.

Un peu plus tard, en 1902, à Lund, apparurent les cercles d'études, qui sont aujourd'hui plus de 44 000. Un cercle d'études comprend de 10 à 20 membres qui doivent être âgés d'au moins quatorze ans, sauf lorsqu'il s'agit d'études musicales. L'élément essentiel est la bibliothèque ; les membres du cercle étudient chez eux ; puis dans une réunion (le soir, en hiver notamment), ils font un compte rendu qui est suivi d'une discussion.

Enfin, nous devons mentionner les Ecoles supérieures populaires, dont la première fut créée en 1868. D'abord destinées à la jeunesse paysanne, les progrès de l'in-

dustrialisation en étendirent bientôt le bénéfice aux milieux ouvriers. Leur but était d'abord d'éveiller l'intérêt des élèves pour les problèmes sociaux ou spirituels ; mais, de plus en plus, on y organise des cours préparant à l'entrée dans des établissements réguliers d'enseignement.

Il y avait, en 1956, 89 écoles supérieures populaires recevant 12 000 élèves ; il y en avait 66 en 1950, recevant 7 000 élèves environ. L'Etat, les communes et diverses organisations culturelles accordent des bourses. Les écoles sont mixtes et les études durent deux ans, parfois trois, chaque année consistant en sept mois de cours d'hiver. Il y a aussi assez souvent un semestre d'été plus particulièrement destiné aux jeunes filles.

Il règne, dans les écoles populaires, une agréable atmosphère de liberté et de camaraderie entre élèves et maîtres ; très souvent, d'ailleurs, les plans d'études sont établis après discussion entre professeurs et élèves. Tous y prennent ou y renforcent l'esprit civique, le goût de la véritable démocratie et l'intérêt pour les questions nationales ou internationales.

On peut entrer dans les Ecoles supérieures populaires à partir de 18 ans, mais l'âge moyen des élèves est actuellement de 21 ans.

L'Enseignement Supérieur

La plus ancienne Université suédoise est celle d'Upsal, fondée en 1477 ; puis vient celle de Lund, qui ne date que de 1668. Ces deux Universités sont d'ailleurs les seules qui soient complètes, c'est-à-dire qui possèdent les cinq Facultés de théologie, droit, médecine, lettres et sciences. Il y a deux autres Universités, incomplètes, celle de Stockholm, qui possède les Facultés de droit, lettres et sciences, et celle de Göteborg, qui possède les Facultés de lettres et de sciences. Toutefois, Göteborg possède depuis peu une Ecole de médecine qui dispense un enseignement comparable à celui d'une Faculté, et Stockholm, de son côté, a le célèbre Institut royal de médecine et de chirurgie (Karolinska Institutet), qui est, en fait, la première Faculté de médecine et un important centre de recherches. D'ailleurs, la capitale est le siège de nombreux instituts spécialisés ; elle est finalement la première ville universitaire du pays et reçoit la moitié des effectifs des étudiants suédois.

En principe, pour être admis dans une Faculté ou dans une des deux Ecoles Polytechniques de Stockholm et de Göteborg, il suffit de posséder le studentexamen. En fait, on est obligé d'écarter un certain nombre de candidats ; on le fait en tenant compte des notes obtenues au studentexamen, en utilisant les tests ou parfois de véritables examens d'entrée. Pour les Facultés des sciences et les Ecoles Polytechniques, le diplôme obtenu dans les Lycées techniques est reconnu équivalent au studentexamen.

La politique suivie en ce qui concerne le recrutement des étudiants a beaucoup évolué ces dernières années. Naguère on se croyait menacé par le chômage intellectuel et on recherchait les moyens de limiter le nombre des étudiants ; aux Ecoles Polytechniques, on n'admettait guère qu'un candidat sur cinq. Aujourd'hui, avec l'évolution accélérée de la technique, on se croit menacé par une pénurie d'intellectuels et de techniciens, professeurs, ingénieurs ou médecins. On bâtit beaucoup dans les Universités, mais le personnel manque, et un accroissement notable du nombre d'étudiants dépend de l'application généralisée de la réforme de l'enseignement.

Les diplômes préparés sont le « kandidatexamen », qui correspond à une licence libre, et le « filosofiie-magister », qui correspond à la licence d'enseignement et permet d'enseigner dans les écoles réales et les gymnases avec le grade inférieur d' « adjoint » ; il demande quatre à six ans d'études.

Beaucoup d'étudiants se contentent du kandidatexamen ou même arrêtent avant de l'obtenir : leur but est d'obtenir des points qui les aideront à entrer à l'Ecole Polytechnique ou dans d'autres carrières bien rémunérées.

Pour recevoir l'un des deux titres précédents, il faut avoir obtenu au moins six points, le maximum de points pour une matière étant de trois. Il est de plus interdit d'obtenir les six points avec plus de quatre matières. Le groupement des matières est libre pour le kandidatexamen ; pour le filosofie-magister, on ne peut choisir qu'entre des groupes déterminés, d'où sont exclus en particulier les matières qui ne figurent pas dans les programmes du Second Degré.

Les examens écrits ont lieu six fois par an, et les étudiants se présentent à leur gré ; les épreuves orales ont lieu pendant toute l'année scolaire.

Une minorité d'étudiants continuent leurs études en vue du « licenciatexamen », qui est de niveau plus élevé que le diplôme d'études supérieures. Il porte sur une seule matière pour laquelle il faut avoir eu trois points à l'un des deux diplômes mentionnés précédemment. Il n'y a pas d'enseignement pour le licenciatexamen, qui est le fruit d'un travail personnel et donne le droit d'être professeur de gymnase avec le titre plus élevé de « lecteur ». 64 jeunes gens et 7 jeunes filles ont obtenu ce titre en 1955.

Après avoir obtenu le licenciatexamen, on peut briguer le titre suprême de docteur pour lequel on présente une thèse imprimée qui est souvent le développement de celle qui a été rédigée pour le licenciatexamen. La soutenance est une imposante cérémonie ; un nombreux public y assiste ; candidat et jury sont en habit, un détachement d'infanterie présente les armes, et après des heures de discussion, objections et réponses, le nouveau docteur reçoit une couronne de lauriers. En 1955, 29 titres de docteurs furent décernés, dont quatre à des jeunes filles.

L'enseignement universitaire est donné sous forme de cours et de séminaires ; ces derniers sont des groupes restreints d'étudiants (une dizaine environ), qui discutent une question préparée par l'un d'entre eux, ou les travaux écrits rédigés pour la préparation au kandidatexamen ou au filosofie-magister ; c'est aussi en séminaire que se fait la préparation au liencenciatexamen.

Dans les Facultés des sciences, les travaux pratiques ont une place très importante ; en physique, par exemple, une journée entière sur deux leur est consacrée. Chaque série de travaux pratiques est suivie d'un petit examen auquel il faut avoir satisfait pour être autorisé à se présenter aux examens annuels portant sur la matière étudiée.

Jusqu'à présent, le présalaire des étudiants a été repoussé par les commissions chargées de rechercher les moyens de « démocratiser » l'Enseignement Supérieur. D'assez nombreuses bourses sont accordées par l'Etat et aussi par les « Nations » ou associations corporatives d'étudiants qui sont parfois très riches grâce aux dons de leurs anciens membres. Néanmoins, beaucoup d'étudiants ne subsistent qu'à l'aide des prêts que leur consentent leur famille, leurs amis, ou des banques, ou même l'Etat, à un intérêt modique (3,5 %) ; le remboursement se fait ensuite en une dizaine d'années

Il en résulte qu'en Suède aussi, les étudiants sont rarement issus des milieux populaires de la nation ; pour le moment, on s'efforce de les aider en multipliant les bourses et en créant des cités et des restaurants universitaires. On ne sait si de telles mesures suffiront, surtout pour les sciences ; ici, comme ailleurs, les étudiants en lettres sont jusqu'à présent nettement plus nombreux que les scientifiques. En 1954, à Upsal, il y avait 3 000 étudiants de lettres pour 1 000 en sciences. Nous disions que naguère les Ecoles Polytechniques n'admettaient qu'un candidat sur cinq. Maintenant, c'est la proportion inverse qui est vraie : un candidat sur cinq est écarté.

L'Enseignement technique

L'Enseignement technique et professionnel a été organisé en 1918. En ce qui concerne l'industrie et l'artisanat, les ateliers-écoles donnent une formation théorique et pratique ; les études, de durée très variable, demandent de un à quatre ans. Par-

fois, l'école est reliée à une entreprise industrielle, qui intervient largement dans le fonctionnement des travaux pratiques.

Il existe aussi des cours d'apprentissage d'une durée de deux ans, à raison d'au moins quatre heures par semaine (généralement le soir) ; les apprentis peuvent ensuite entrer dans une école professionnelle, dont il existe naturellement des types très variés.

En 1955, les institutions précédentes étaient fréquentées par 152 000 élèves, dont une minorité faisait des études à plein temps.

Pour accéder à un niveau plus élevé de formation professionnelle théorique, il y a les gymnases et les écoles techniques. Pour entrer au gymnase, il faut posséder le realexamen et quelques connaissances pratiques. Les études durent trois ans, et se différencient à la fin de la première année. L'examen de sortie équivaut au studentexamen, et permet l'entrée dans les Facultés des sciences et les Ecoles Polytechniques.

Les écoles techniques sont un peu moins difficiles pour les conditions d'entrée ; les études y durent deux ans et sont moins poussées qu'au gymnase technique, en ce qui concerne la culture générale. C'est pourquoi le diplôme de sortie ne permet pas l'accès aux écoles techniques supérieures.

En 1956, 7 100 élèves fréquentaient les écoles techniques des deux types précédents, parmi lesquels 2 900 dans les écoles de caractère commercial.

Pour qui veut atteindre le plus haut degré de technicité, il y a les Ecoles Polytechniques de Stockholm et de Göteborg où l'on entre, nous l'avons dit, avec le studentexamen ou le diplôme équivalent délivré par les gymnases techniques. Les études y durent de quatre à cinq ans et demi, et sont organisées de manière assez analogue à celles de l'Ecole Polytechnique fédérale de Zurich. Pour obtenir le diplôme d'ingénieur, l'étudiant doit faire un stage de six mois dans l'industrie, pendant lequel il est payé au tarif ouvrier (mais exempté d'impôts, ce qui n'est pas négligeable dans un pays ou les impôts directs sont très lourds).

Les Ecoles Polytechniques délivrent des grades universitaires : la licence et le doctorat en technologie, dont le prestige est considérable et qui sont recherchés par les ingénieurs. Certains travaillent parfois pendant dix ans pour l'obtenir.

Conclusion

D'après ce bref aperçu, on voit que les problèmes que doit résoudre la Suède, en ce qui concerne son système d'enseignement, sont les mêmes que les nôtres ; la solution qu'elle a adoptée, avec l'école unique qu'elle met à l'essai depuis quelque six ans, rappelle le tronc commun, objet de tant de discussions chez nous.

Les discussions porteraient plutôt sur des détails techniques : nombre et nature des options, leur utilité et leur efficacité pour la culture générale, l'emploi des méthodes actives, le recrutement rapide d'un personnel plus nombreux. La Suède ignore la plupart des difficultés qui nous assaillent traditionnellement. A part quelque 10 000 Lapons, la population est très homogène à tous les points de vue : race, religion, niveau social et technique. Orientés beaucoup plus vers les pays anglo-saxons que vers les Latins, les Suédois n'accordent pas à la culture gréco-latine l'importance qu'elle a chez nous et peuvent se contenter plus aisément de l'étude des langues vivantes (anglais et allemand, beaucoup moins le français). Enfin, en négligeant des considérations politiques évidentes, mais déplacées ici, disons, ou plutôt répétons ce que nous avons déjà remarqué, que l'enseignement privé ne tient en Suède qu'une place tout à fait médiocre.

A. H.

ENQUÊTE SUR LA PÉNURIE DES PROFESSEURS

Il est demandé à chaque sous-commission nationale de la C.I.E.M. (1) de prendre part à une enquête sur la pénurie de professeurs de Mathématiques dans les Ecoles secondaires, les Collèges et les Universités. Une enquête sur ce sujet, effectuée par l'U.N.E.S.C.O., et dont le compte rendu a paru dans la publication « L'Enseignement des Mathématiques dans les Ecoles secondaires » a révélé que — sur les 62 nations ayant pris part à l'enquête — la moitié environ subissait cette crise. Un tel état de choses, s'il persistait, pourrait avoir un effet considérable sur le développement scientifique et économique des pays en cause. Nous pensons qu'il est du devoir de la C.I.E.M. de rassembler des informations précises et détaillées sur cette crise, afin d'essayer de diriger l'action à entreprendre dans le domaine de l'éducation mathématique.

En premier lieu, nous pensons qu'il serait très utile d'obtenir une information qualitative aussi complète que possible, à laquelle seraient jointes des données quantitatives sûres, concernant les points suivants :

a) La pénurie de professeurs de Mathématiques pose-t-elle un problème dans votre pays ? S'il n'y a pas de crise actuellement, pensez-vous qu'elle soit imminente ?

b) Si la réponse à la question (*a*) est oui, la pénurie est-elle due :

1° à une pénurie de professeurs en général ?

2° à une pénurie de matématiciens en général ?

3° à un statut social et (ou) économique insuffisant des professeurs de Mathématiques, comparé à celui des autres professions d'un niveau intellectuel analogue ?

4° à d'autres raisons ?

c) S'il n'y a pas de pénurie de professeurs de Mathématiques dans votre pays, cela est-il dû :

1° à une « réserve » suffisante, pouvant combler tous les besoins inhérents aux développements modernes dans les domaines scientifique, industriel, économique, universitaire ?

2° au rythme du développement industriel et économique ?

3° à des mesures spéciales prises par votre pays pour affronter les nouveaux besoins ? (veuillez indiquer ces mesures),

4° à d'autres causes ? (veuillez les énumérer).

Chaque sous-commission nationale est libre de mentionner, dans son rapport, tous les aspects du problème qu'elle juge importants. Cependant, les aspects suivants semblent devoir être proposés à l'attention de tous.

A. — *Le statut social et les obligations professionnelles du professeur de Mathématiques.*

En particulier :

1° Combien d'heures de classe par semaine le professeur doit-il consacrer à l'enseignement, et quelle est la durée effective (en minutes) de chaque heure de classe ?

2° Combien d'heures supplémentaires par semaine (en moyenne) le professeur doit-il consacrer à la préparation de ses cours, au classement de ses documents, aux

(1) Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique.

entretiens avec ses élèves (ou leurs familles), et à d'autres travaux directement en relation avec son enseignement ?

3° Combien d'heures supplémentaires (sans indemnité) le professeur doit-il consacrer à des fonctions autres que des fonctions d'enseignement : surveillances scolaires, directions d'études, affaires sociales, responsabilités civiques en rapport avec l'enseignement, conservation d'archives, conduite de réunions sportives, etc... ?

4° Est-il légalement possible au professeur d'accomplir des tâches rémunérées en dehors du salaire régulier ?

5° Quels sont les avantages afférents à la situation de professeur, par exemple : vacances, congés, congé d'une année accordé pour voyager, indemnités d'études, etc. ?

Autant que possible, il conviendrait de répondre à ces questions en faisant des comparaisons avec d'autres carrières de niveau équivalent, par exemple, celles d'ingénieur, d'architecte, de notaire, de chef de service, etc...

B. — *L'état actuel et la rapidité de développement de l'industrialisation dans votre pays.*

C. — *L'accroissement des effectifs dans les écoles secondaires.*

Des données statistiques, concernant la dernière décade, seront des plus précieuses. Il est particulièrement important de comparer, chaque année, le nombre des étudiants au nombre de jeunes gens du même âge, ainsi que le nombre des élèves des écoles secondaires qui se préparent à poursuivre des études supérieures au nombre des enfants du même âge.

D. — *Le recrutement des futurs professeurs de Mathématiques.*

Il serait intéressant, à ce sujet, d'exposer les moyens qui paraissent susceptibles d'attirer, d'entraîner un plus grand nombre d'élèves des écoles secondaires vers les carrières d'enseignement et de recherche scientifiques (organisation de l'enseignement, programmes, conditions de travail, etc...).)

Toutes les suggestions permettant de recueillir de plus amples informations sur ce grave problème seront accueillies avec reconnaissance.

KUREPA (*Yougoslavie*), VAN DANTZIG (*Pays-Bas*).
FEHR (*U.S.A.*), SERVAIS (*Belgique*).

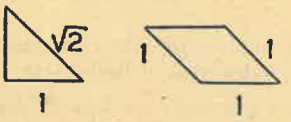
Le questionnaire qui précède a été rédigé à la demande de M. le Professeur HOPF, président de l'Union Mathématique Internationale. Les communications et rapports envoyés en réponse au questionnaire devront parvenir avant le 1er janvier 1959.

Notre Comité s'occupe de rédiger un rapport en temps utile, et attire tout particulièrement l'attention des collègues sur le dernier paragraphe du questionnaire, qu'il reprend pour son compte.

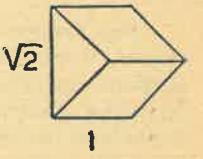
Adresser toute communication à l'A.P.M., rue d'Ulm.

STRUCTURES ALGÉBRIQUES DANS UNE MOSAIQUE JOUET

Parmi les jouets pour enfants qu'on trouve dans les bazars, il y a des boîtes carrées contenant des mosaïques de pièces coloriées de deux sortes : des triangles rectangles isocèles égaux, et des losanges de côtés égaux aux côtés de l'angle droit de ces triangles, les angles aigus valant 45°. En prenant ce côté comme unité de longueur, les aires des pièces triangulaires et des losanges valent respectivement 1/2 et $\sqrt{2}/2$. L'incommensurabilité de ces aires, en rapport à celle de 1 et $\sqrt{2}$, m'a suggéré une leçon active sur des expressions irrationnelles et leur calcul, essayée avec des élèves d'Enseignement Secondaire (13 à 14 ans). Ces élèves connaissaient déjà dans leurs cours d'arithmétique l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Voici comment la leçon peut être conduite :

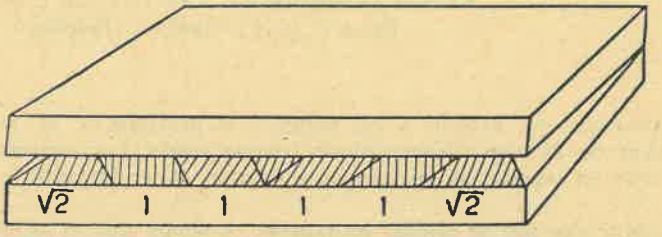


On distribue d'abord aux élèves certaines des pièces du jeu, en leur demandant la valeur des angles, de l'hypoténuse des triangles (le côté de l'angle droit étant pris comme unité) et les aires des deux figures. Celle du losange offrira peut-être quelque petite difficulté. La composition de la figure ci-jointe peut les aider à trouver sans calcul la hauteur du losange et même directement son aire.



Une fois ces aires trouvées, la question suivante est posée : peut-on remplacer un certain nombre de triangles par un certain nombre de losanges de telle sorte que les aires soient équivalentes ?

Seulement, si c'est nécessaire, on rappellera la démonstration classique de l'impossibilité de $\sqrt{2} = m/n$ (m, n entiers), ce qui fournit une réponse concrète négative à la question posée. Les triangles et les losanges formeront séparément des figures dont les aires ne peuvent jamais être équivalentes. Ce sont comme deux mondes à part, on peut dire, non interchangeables. La partie rationnelle de l'aire de toute figure formée de pièces des deux sortes ne peut être, donc, formée que de triangles et la partie irrationnelle sera exclusivement formée de losanges.



Ceci constaté (plus ou moins explicitement) on ouvre un tout petit peu la boîte contenant le jeu ; mais assez pour pouvoir analyser la formation de la longueur du côté de la mosaïque carrée. Les élèves voient, par exemple, que ce côté comprend quatre côtés de losanges et deux hypoténuses de triangles. On peut alors poser la question : combien de pièces de chaque classe y a-t-il dans la mosaïque carrée ? Il n'y a qu'à calculer

$$(4 + 2\sqrt{2})^2 = 24 + 16\sqrt{2}.$$

Il y aura donc 48 triangles et 32 losanges. On le laisse constater.

La question peut être répétée pour d'autres carrés (il y a des boîtes de mosaïques de diverses grandeurs), et aussi pour des rectangles de dimensions composées

avec les côtés des figures simples. (Il est convenable de s'assurer que ces rectangles soient constructibles effectivement, voir note I). Par exemple le rectange de dimensions $(3 + 2\sqrt{2})\ (1 + \sqrt{2}) = 7 + 5\sqrt{2}$, exigera 14 triangles et 10 losanges. La leçon peut finir avec le jeu de composition effective du rectangle ou du carré demandés. Le calcul préalable de pièces nécessaires simplifie la question considérablement.

Quelques conséquences faciles peuvent être déduites en passant. Par exemple : toute mosaïque rectangulaire exige un nombre pair de pièces de chaque genre.

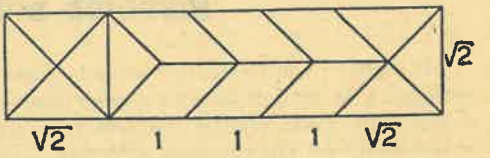
NOTE I. — Tous les rectangles de dimensions composées de côtés des pièces de la mosaïque sont constructibles *sauf ceux qui ont une dimension rationnelle et l'autre irrationnelle*. L'irrationalité dans une dimension exige, en effet, l'emploi de triangles rectangles (hypoténuse), ce qui introduit aussi une irrationnelle (sa moitié) dans l'autre dimension.

La construction effective des rectangles à deux dimensions rationnelles entières est immédiate, ainsi que celle des rectangles de dimensions de la forme $a\sqrt{2}$ et $b\sqrt{2}$ (a, b entiers). L'une et l'autre n'exigent que l'emploi de triangles.

La construction des rectangles à dimensions de la forme

$$m + n\sqrt{2} \text{ et } p\sqrt{2}$$

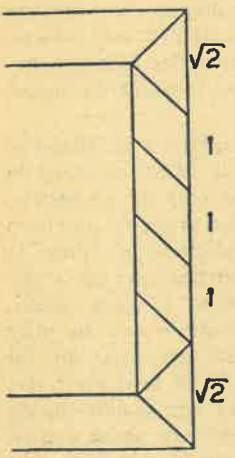
peut être réduite à p bandes de dimensions $m + n\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, qui peuvent être résolues au moyen de $2m$ losanges et $4n$ triangles chacune, comme le montre la figure dans le cas particulier $(3 + 2\sqrt{2}).\sqrt{2}$, facile à généraliser.



Pour étudier le cas général $(m + n\sqrt{2})\ (m' + n'\sqrt{2})$, analysons d'abord la construction d'un carré de côté $m + n\sqrt{2}$. En plaçant, contiguë à chacun de ces côtés, une bande trapézoïdale de hauteur $\sqrt{2}/2$ formée de m losanges et de $2n - 1$ triangles, le problème est réduit à la construction du carré de côté $m + (n - 1)\sqrt{2}$. Une nouvelle bande de m losanges et de $2n - 3$ triangles réduira le côté du carré central à

$$m + (n - 2)\sqrt{2}$$

et, ainsi de suite, nous arriverons à laisser au centre la construction d'un carré de côté m, constructible avec $2\,m^2$ triangles. Il est facile de vérifier que le nombre total de losanges et de triangles utilisés dans cette construction, est respectivement $2m^2 + 4n^2$ et $4mn$, ce qui correspond au calcul algébrique préalablement fait.



La même technique permet de construire tous les rectangles de la forme

$$(m + n\sqrt{2})\ (m' + n\sqrt{2})$$

en laissant au centre, après n bandes, le rectangle mn'.

Le cas général $(m + n\sqrt{2})\ (m' + n'\sqrt{2})$, où

$$n' = n + p,$$

peut être réduit aux précédents au moyen de la décomposition en deux rectangles comme suit

$$(m + n\sqrt{2})\ (m' + n'\sqrt{2}) = (m + n\sqrt{2})\ (m' + n\sqrt{2}) + (m + n\sqrt{2}).p\sqrt{2}.$$

Une étude semblable peut être faite pour des figures ayant la forme de losanges, de trapèze, *ou plus compliquées*. On ne peut s'attendre que les élèves de l'âge indiqué découvrent ces procédés déductifs de construction ; en général ils n'arrivent à réussir qu'après des tâtonnements plus ou moins systématiques.

NOTE II. — Les côtés et les aires des rectangles étudiés constituent un exemple séduisant d'un *anneau d'intégrité*, sauf l'interprétation des éléments négatifs, ce qui pourrait être obtenu au moyen de pièces de couleur noire. En faisant les constructions sur un fond noir la superposition de pièces noires aurait le même effet visuel que la suppression de la figure superposée. La possibilité des constructions se complique alors. Le but de cet article étant simplement d'offrir une motivation de didactique active sur un thème en général ennuyeux pour les enfants, nous n'irons pas plus loin.

P. Puig Adam, *Madrid.*

(Extrait de *Mathematica et Paedagogia*, n° 10).

HISTOIRE D'UNE FAUTE

Il s'agit, — on l'a deviné —, de la faute qui s'est glissée dans l'énoncé de Mathématiques à la session de juin dernier (section Mathématiques). Histoire d'une faute et non d'un crime, comme auraient bien voulu le faire croire des journalistes dont la sensibilité est curieusement sélective. Voilà en tout cas une nouvelle occasion de mesurer la place abusivement éminente du baccalauréat dans la société française. Il est cependant un fait qu'il y a eu faute dans un énoncé et les conséquences ont été inévitablement mauvaises. Sans pouvoir traiter la question dans tous ses détails, je crois intéressant d'en examiner certains aspects.

1. Des origines.

Je me refuserai, en toutes circonstances, à accabler des collègues qui seraient responsables d'une faute de rédaction. Qui n'en a pas à son actif ? Il est évidemment étrange que la faute n'ait pas été décelée à l'une ou à l'autre des lectures successives qui ont précédé le tirage définitif. Mais la morale de cet incident me paraît résider ailleurs.

On sait que la Commission qui prépare les textes présente, au choix du Ministre, un ensemble de sujets. *On a dit que lors de cette présentation le Ministre alors en exercice aurait écarté TOUS les sujets parce qu'ils contenaient trop de géométrie.* Je précise : « on a dit ». Rien d'officiel n'a été déclaré et il est probable que rien ne le sera (il est plus commode de rejeter plus ou moins implicitement toute la responsabilité sur les professeurs de la Commission). Je crois pourtant que cet « on-dit » est très proche de la vérité et ce qu'il révèle mérite examen. L'usage établi, conforme semble-t-il à une saine conception de l'organisation dans le cas du sujet unique pour la métropole, voulait que le Ministre *choisisse parmi* les sujets qui lui étaient présentés. Ainsi étaient séparés les domaines de la technicité (rédaction des sujets ou adaptation de sujets présentés par d'autres professeurs aux conditions de l'examen) et de la décision finale (l'autorité de la charge ministérielle étant censée garantir l'indépendance et le secret de la décision). En intervenant dans la rédaction des sujets, *s'il est vrai qu'il soit intervenu*, le Ministre a commis un excès de pouvoir.

Je ne comprends d'ailleurs pas comment la Commission a pu accepter de poursuivre ses travaux si les événements se sont déroulés ainsi qu' « on le dit ». Participer à une Commission de ce genre doit signifier qu'aucune autorité extérieure à la

Commission n'aura pouvoir de *juger* les textes qu'elle aura seulement pour mission de *choisir*. On nous parle beaucoup, ces temps-ci, de séparation des pouvoirs. Il faut commencer par ne pas confondre les attributions.

2. Sur le sujet « national ».

L'idée du sujet unique pour la métropole est d'autant plus appréciée du public qu'elle est moins justifiée. Le principal argument « pour » est qu'on évite ainsi les inégalités entre les Facultés. Mais pourquoi voudrait-on que les inévitables inégalités entre sujets (qui se retrouvent d'une session à l'autre avec le sujet unique) ne se compensent pas dans le temps et entre disciplines différentes ? D'autre part, l'idéal d'égalité en matière d'examen est inaccessible, même de façon approchée. Le sujet *unique* est corrigé par des examinateurs différents, les réunions d'entente entre correcteurs étant organisées sur le plan académique (si bien que les barèmes de notation varient d'Académie à Académie). Ces inégalités se confondent finalement avec celles qui proviennent de la diversité des correcteurs. Si vous voulez l'égalité dans la correction, faites faire celle-ci par un robot !

Voyons maintenant les arguments « contre ». On vient de voir que l'argument de l'égalité ne vaut rien. Par contre, qui dit sujet unique dit tendance au sujet « bateau », ou, en tout cas, proscription de certains sujets tabous. imaginez l'ndignation des familles et par consequent du Ministre si le problème portait sur l'arithmétique, ou si les questions de cours traitaient d'astronomie. De plus, en cas d'erreur, impossibilité de rectifier sur l'heure (alors qu'avec le sujet académique, quelques coups de téléphone et dans le premier quart d'heure tous les candidats peuvent être avertis). Enfin le cadre de l'Académie reste à l'échelle humaine au point de vue administratif. Il faut en tout cas remettre le baccalauréat au rang qui est le sien, celui de l'examen qui attribue le premier titre universitaire et non celui d'une affaire d'Etat susceptible de provoquer, dans le Cabinet du Ministre, de 19 à 21 h. 30, une scène tragi-comique dont je voudrais maintenant rendre compte.

3. Le 20 juin.

L'épreuve a eu lieu le 20 juin 1958, de 8 à 11 heures. A 8 h. 10, tous les professeurs de Mathématiques qui surveillaient les épreuves savaient que l'affaire s'annonçait mal et se désolaient de n'y pouvoir remédier. Par téléphone, dans l'après-midi, M. le Directeur du Service Central du baccalauréat me demandait de prévenir notre Président et de venir avec lui à une réunion prévue pour 19 heures dans le Bureau du Sous-Directeur de l'Enseignement Supérieur.

Après étude de diverses manières de régler l'affaire, nous avions convenu, tous deux, Huisman, de proposer de refaire l'épreuve. Avec le calendrier suivant : annonce par radio, dès le 20 au soir que l'épreuve serait refaite le 25 ; copies remises aux correcteurs le 27 ; notes données le 3 juillet ; délibérations le dimanche 6 matin au lieu du 5 ; l'oral n'aurait pas été retardé.

En fait, nous avons été invités à une réunion qui se tenait dans le Bureau du Ministre en présence des Directeurs de l'Enseignement Supérieur et du Directeur du Service Central des Examens. Rejetant à plus tard toute recherche des responsabilités, le Ministre a déclaré qu'il nous consultait seulement sur le meilleur moyen de réparer, dans la mesure du possible, le dommage causé, le but étant qu'aucun candidat ne puisse s'estimer lésé.

Nous avons présenté notre projet. Après une longue délibération où nous avons eu toute liberté de présenter nos arguments, le Ministre ne crut pas pouvoir retenir notre projet. Les solutions les plus diverses furent alors examinées (changement de la répartition entre question de cours et problème, 15 et 15 ou 20 et 10 ou même 30 et 0), pour aboutir à la décision qui a été finalement adoptée et qui reprenait

l'essentiel d'une proposition que nous avions faite *après* que le Ministre ait refusé de faire recommencer l'épreuve.

Rappelons le principe de cette décision : corriger d'abord le problème et le noter selon un barème souple tenant compte des hésitations inévitables des candidats devant les difficultés de la première question ; puis corriger la question de cours, le degré de sévérité dans cette correction pouvant être fonction de l'impression donnée par le candidat dans ce qu'il avait traité du problème. Comparer alors les deux notes obtenues, soit par le calcul habituel 10 + 20, soit en triplant la première note ; attribuer au candidat le total le plus favorable. Si cela ne reproduit pas le texte précis de la circulaire ministérielle, tel en est bien le sens, me semble-t-il, et l'interprétation souple que l'on pouvait en donner.

Il était fatal que cette solution soit critiquée. Pour la plupart des copies cela revenait à ne pas tenir compte du problème, partie essentielle de l'épreuve en série Mathématiques. La question de cours ne fut-elle pas, à cause de cela, jugée avec une excessive sévérité ? Les inégalités entre correcteurs n'ont-elles pas été accentuées ? L'analyse des statistiques réalisées électroniquement dans l'Académie de Paris pourra peut-être le révéler.

Rappelons cependant que le but recherché était d'éviter l'échec, du fait de la faute d'énoncé, de candidats sérieux, quitte à ne pas récompenser les plus brillants par une belle mention. Conséquence faiblement regrettable, car un examen n'est pas un concours. Enfin aussi mauvaise qu'ait été cette solution (il aurait été plus juste de recommencer l'épreuve, quitte à corriger les deux et ne retenir que la meilleure note), elle fût incomparablement meilleure que celle qui aurait consisté, de notre part, à refuser de corriger les copies : attitude logique de notre point de vue, car nous n'avions aucune part dans l'existence de l'énoncé fautif, mais parfaitement injuste pour les candidats dont l'innocence était évidente en la matière. Refuser de corriger, c'était avoir le courage de la logique mais avec la « peau » des autres (la peau d'âne bien entendu).

La première session terminée, que la seconde doit corriger comme chaque année, nous sommes persuadés que la solution adoptée était l'une des moins mauvaises. J'ai vu des copies où le problème était complètement traité et des totaux de 28/30 confirmés par des notes équivalentes à l'oral.

4. Une réunion d'entente.

Je prends l'exemple de la réunion d'entente des correcteurs de l'Académie de Paris, parce que c'est à celle-là que j'ai participé. M. Echard, Directeur du Service Central du Baccalauréat, dont il faut louer ici le dévouement et la compétence et qui a manifesté, dans la circonstance exceptionnelle où nous étions, le sympathique souci de prendre l'avis de l'A.P.M., a eu l'heureuse idée de demander à quelques collègues de *préparer* la réunion d'entente. La veille, trois d'entre nous avaient examiné rapidement quelques copies prises au hasard et en avaient tiré les propositions de barème qui avaient l'avantage d'être fondées sur des copies réelles. Et qui restaient seulement des bases de discussion.

Nous avons pu, de cette façon, tenir une réunion d'entente plus ordonnée, et je crois plus efficace que les réunions antérieures. Un collègue m'écrit d'ailleurs que dans l'Académie de Lille il fut décidé de ne porter les notes définitives qu'après une deuxième réunion, postérieurement à la correction. Après la lecture des copies, ou tout au moins de quelques-unes, un barème plus juste peut être fixé.

5. Une faute heureuse.

Cette faute malheureuse peut avoir des conséquences qui ne le seront pas si elle permet une réflexion profitable sur l'épreuve d'examen, ce qu'elle est, ce qu'elle

devrait être. Nous trouvant en présence du Ministre et du Directeur de l'Enseignement Supérieur, nous en avons profité pour faire deux remarques :

1° Souligner les inconvénients, dans des circonstances semblables, du cadre national de l'examen : que mieux vaudrait revenir au sujet académique, quitte à faire assurer, par une Commission centrale, le choix et la distribution des sujets (ceux qui auraient été proposés par un collègue de Grenoble seraient ainsi proposés, par exemple, dans l'Académie de Rennes).

2° Souhaiter que soit prise en considération une réforme de l'épreuve de Mathématiques et que l'on envisage une formule toute différente, inspirée de ce qui se pratique dans certains pays nordiques : une série de huit ou dix questions indépendantes ; en avoir traité cinq ou six complètement assure la note maximum. Notre Président venait d'ailleurs d'écrire au Directeur de l'Enseignement Supérieur une lettre dans ce sens à propos de la nouvelle épreuve de Mathématiques à la section Sciences Expérimentales (à partir de 1959).

6. Une bonne épreuve d'examen.

La formule actuelle (1re et 2e partie) mérite certainement des critiques. Le baccalauréat est le dernier examen à comporter une question de cours en Mathématiques. Genre faux par excellence ; comment noter le candidat qui sait par cœur une tranche du meilleur manuel existant ? Un élève honnête risque d'être sanctionné parce qu'il aura suivi un enseignement jugé mauvais par le correcteur. On sait enfin que des élèves parviennent à imiter assez bien le modèle pour la question de cours et se montrent complètement incapables de rien trouver par eux-mêmes dans le problème.

Quant au problème, surtout avec le sujet national, il a tendance à devenir banal et s'il ne l'est pas, s'il propose un enchaînement de questions autour d'une belle idée, malheur au candidat qui ne la verra pas. Le « beau » problème permet donc aux élèves brillants de faire valoir leurs qualités exceptionnelles, mais il offre le risque de sacrifier d'honnêtes travailleurs. Or, le baccalauréat est un examen, estimation des connaissances et des capacités des candidats, ce n'est pas un concours.

La formule proposée, des questions indépendantes et en nombre supérieur à celui qui est exigé, échappe aux inconvénients précédents. Puisqu'elle permet un choix, puisque les questions sont indépendantes, la part du hasard, trop souvent invoquée par les élèves, est réduite. Grâce à la diversité des questions, tous les domaines du programme peuvent être couverts : une question d'astronomie peut proposer une intéressante discussion trigonométrique ; un exercice d'arithmétique a ici sa place, un autre de cinématique. Ce qui ne signifie pas qu'à chaque fois toutes les parties du cours doivent être sollicitées. La formule est extraordinairement souple : parmi les questions proposées, certaines peuvent exiger une rédaction spécialement soignée (en le précisant explicitement), d'autres une plus grande audace de découvreur. Il est même possible de varier le dosage : rendre quelques questions obligatoires, fixer *a priori* le barème. Il serait entendu qu'une question ne dépasse pas l'ampleur d'un problème à deux questions enchaînées. Si l'on trouve cela insuffisant, on peut répondre qu'à 17 ans, les candidats ont encore le temps de montrer qu'ils peuvent faire plus, et, pour les sujets brillants, il y a le Concours Général.

J'ai personnellement expérimenté la formule pour les compositions de l'année 1957-58 en classe de Seconde A'C. Les résultats m'ont paru très satisfaisant ; très peu d'échecs imprévus, moyennes et classement final tout à fait conforme à l'appréciation que je pouvais formuler en fin d'année sur ces 40 élèves. Seul « inconvénient », il y a beaucoup d'*ex-æquo*. Pour un examen cet inconvénient n'existe pas.

*
**

Un mot pour finir : il faut bien s'occuper des examens. L'essentiel n'est pourtant pas là. C'est d'enseignement des Mathématiques qu'il s'agit d'abord.

G. W.

DE LA QUESTION DE COURS AU BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES CONSIDÉRÉE COMME UNE VÉRITABLE ALÉATOIRE

On a beaucoup parlé de certaine erreur qui entâchait l'énoncé du problème de Mathématiques Elémentaires au baccalauréat 1958, en France, et de l'influence démesurée qu'a prise alors la question de cours, cette horrible invention d'un je ne sais quel reste d'un culte de l'élève appliqué, mais peu inventif. Personne, à ma connaissance, n'a relevé le rôle nuisible joué par cette question de cours au baccalauréat de Mathématiques Elémentaires, en cette même année 1958, au Maroc.

« Bien poser un problème, c'est déjà le résoudre en partie », disait mon vénéré professeur de Mathématiques Spéciales. Comme j'ai fait mienne cette formule auprès de mes « Taupins », appliquons-nous donc à comprendre la question posée et, tout d'abord, « relisons attentivement l'énoncé » :

Trois questions de cours sont proposées à la sagacité du candidat (au choix, naturellement) ;

I. Coordonnées horizontales : définition et mesure.
II. Coordonnées équatoriales : définition et mesure.
III. Inégalité des jours et des nuits suivant les diverses latitudes.

Suit un problème d'une facilité déconcertante, entâché d'ailleurs d'une erreur typographique à la dernière question, erreur qui n'a gêné aucun candidat bien que le Jury ait cru bon de ne pas les en avertir, les épreuves ayant lieu le même jour, à la même heure, dans des villes différentes.

Je ne nie pas que la cosmographie figure au programme de Mathématiques Elémentaires, mais peut-on me dire quel est le collègue qui consacre plus d'une semaine à son étude ? A mon sens, d'ailleurs, il a raison, car le programme de Mathématiques Elémentaires comporte des paragraphes beaucoup plus importants et par leur intérêt purement intellectuel et formateur de la pensée et de l'esprit de recherche (arithmétique, géométrie élémentaire) et par leur rattachement aux notions fondamentales de structures mathématiques (groupes de transformations, algèbre, arithmétique) et par leur intérêt pratique (algèbre, trigonométrie, mécanique). La cosmographie n'a guère, à ce niveau, qu'un intérêt encyclopédique et son enseignement pourrait être aussi bien confié au géographe, au naturaliste, ou, mieux, au physicien qui pourrait user des prérogatives de sa spécialité pour enseigner correctement des éléments d'astrophysique.

De plus, comment juger de la valeur scientifique probable d'un candidat reçu à cet examen ? Quel collègue de Spéciales ne jugera pas, comme moi, qu'un élève reçu à son baccalauréat en cette année 1958 au Maroc, avec les notes suivantes :

Ecrit :	Mathématiques	Cours	0/10	Problème	14/20
	Physique	Cours	10/15	Problème	10/15
	Philosophie		7/20		
Oral :	Mathématiques		34/40		
	Physique		20/30		
	Histoire		15/30		
	Philosophie		5/10		
	Sciences Naturelles		5/10		
	Langue vivante		5/10		

donc avec un total de 125 points et une mention PASSABLE, ne sera pas davantage apte à suivre avec profit une classe de Mathématiques Supérieures que tel autre candidat reçu avec une mention ASSEZ BIEN et des notes ainsi réparties :

Ecrit :	Mathématiques	Cours	10/10	Problème	10/20
	Physique	Cours	15/15	Problème	5/15
	Philosophie		7/20		

Oral : Mêmes notes, sauf en Mathématiques (20/40) et en Histoire (24/30).

Or, les notes des reçus au baccalauréat sont *secrètes*, de sorte que le candidat le plus valable risque de se voir refuser son inscription en Mathématiques Supérieures au détriment du second. Quel critère faut-il donc adopter pour orienter convenablement un candidat vers des études scientifiques ?

Encore ai-je choisi dans ces exemples des cas extrêmes. Supposons que notre candidat malchanceux (le premier) n'ait obtenu que la moyenne en Physique à l'écrit (avec un bon problème et une question de cours insuffisante) ; il serait alors ajourné et sa valeur scientifique pourrait très bien être encore supérieure à celle du candidat qui doit peut-être sa mention assez bien à ses talents de bon perroquet.

Quelle solution peut-on proposer raisonnablement devant de telles possibilités d'erreurs ? Certains diront : « Supprimez la cosmographie du programme de Mathématiques Elémentaires ! » Je pense que ce n'est en rien une solution, car si cet exemple particulier se prête bien (j'ose le croire) aux observations antérieures, on pourrait en dire de même de nombreuses questions de cours.

Il serait facile de composer un problème comportant une dizaine de questions dont les cinq premières seraient indépendantes et constitueraient une sorte d'application directe des diverses parties du programme, les cinq dernières constituant un véritable problème sur une partie déterminée du cours (au choix de l'examinateur) pourvu que ces questions soient de difficulté progressive. Chacune des cinq premières questions étant notée sur 2, on attribuerait alors 20 points répartis entre les cinq suivantes (3 ; 3,5 ; 4 ; 4,5 ; 5) si elles respectent réellement cette progressivité.

Une telle décision permettrait d'appliquer la seule véritable mesure qui me paraît souhaitable : la suppression de la question de cours (sans envisager une discussion sur le programme, ce qui est un tout autre problème).

L'oral me semble suffisant pour vérifier si le candidat a compris son cours en l'approfondissant, s'il sait expliquer pour quelle raison il utilise telle méthode plutôt que telle autre, ou même, si l'on y tient, s'il a appris telle ou telle autre définition dont il n'entendra vraisemblablement plus parler dans sa vie future, à moins qu'il n'ait à l'enseigner ou qu'il ne se spécialise quelques années plus tard dans la branche scientifique qui utilise ces connaissances particulières.

André Delachet,
professeur de Mathématiques Spéciales,
Lycée Lyautey, Casablanca.

DEUX REMARQUES SUR LES OBSERVATIONS PRÉCÉDENTES

Les observations de notre collègue DELACHET ne viennent-elles pas en renfort des remarques présentées par ailleurs sur les inconvénients de la formule actuelle pour l'épreuve de Mathématiques au baccalauréat ? En toute rigueur, la « cosmo » fait partie du programme et il est légitime de faire porter sur elle les questions de cours. Mais ne risque-t-on pas de pénaliser ainsi les élèves dont les professeurs ont consacré neuf heures ou moins de neuf heures dans l'année à l'étude de cette partie du programme. On en revient à cette idée que les questions de cours et problèmes ne doivent porter que sur les parties du programme qui sont l'intersection (supposée non vide) des cours des professeurs. Le sujet idéal porte sur le plus petit ensemble non vide inclus dans cette intersection...

Ce n'est évidemment pas ce que souhaite notre collègue et je me réjouis de constater que sa proposition rejoint sur plus d'un point celle que nous avons présentée par ailleurs. Deux des observations faites par notre collègue me paraissent pourtant fautives :

1. Implicitement son argumentation fait du baccalauréat un examen probatoire pour l'entrée dans les classes de Mathématiques Supérieures. Sans doute un élève refusé au baccalauréat Mathématiques ne peut-il entrer dans ces classes. Mais rien ne prouve, rien ne peut prouver qu'un bachelier Mathématiques (dont le succès légitime peut être le résultat de notes moyennes en Mathématiques et en Physique, mais excellentes en histoire et géographie et en philo), soit nécessairement capable de faire des études scientifiques. C'est le rôle de la Propédeutique, et par conséquent celui des Mathématiques Supérieures, de permettre à l'étudiant l'essai prolongé sur un an de ces capacités.

2. Selon notre collègue DELACHET, la « cosmographie » n'aurait qu'un intérêt encyclopédique. Une modeste mais véritable initiation à l'astronomie aurait, j'en suis certain, une autre portée. Le programme officiel, en utilisant le mot « cosmographie » invite à la dérision. De là l'idée de confier cet enseignement... à d'autres. Mais en réalité, dans la belle classe de Mathématiques, où l'on peut commencer à former l'esprit scientifique des jeunes gens, où l'on peut leur donner un aperçu de la puissance des Mathématiques, l'astronomie nous donne un moyen simple de prendre conscience du rôle des Mathématiques dans les sciences de la nature : domaine où l'observation a permis l'élaboration de notions abstraites fondamentales (temps et espace). Autant il serait donc absurde de vouloir transformer nos candidats en spécialistes, autant il serait dangereux, en 1958, inopportun, de priver les jeunes gens d'une connaissance de cet Univers dans lequel, que l'astronomie figure ou non dans les programmes, ils sont condamnés à vivre.

G. W.

IV. BIBLIOGRAPHIE

LA RAISON A L'ŒUVRE

La Pensée scientifique moderne, par J. ULLMO, un volume de la « Bibliothèque de Philosophie scientifique », Flammarion, Paris, 1958 (850 F).

A la première ligne de son introduction, l'auteur annonce qu'une réflexion sur la pensée scientifique du XIXe et du XXe siècles doit prendre la physique pour centre de perspective. L'ouvrage mérite pourtant, ou, dirai-je, d'autant plus, l'attention des professeurs de Mathématiques, soucieux d'apprécier quel rôle ils jouent, ou quel rôle ils doivent jouer dans le développement actuel de la science.

L'auteur entreprend une analyse complète de la pensée scientifique. Depuis « la construction de la connaissance » (chap. I), « la notion d'objet et de lois scientifiques » (chap. II) jusqu'aux fondements des notions de « la vérité » (chap. VII), « la raison » (chap. VIII) et le problème de « l'intelligibilité de la nature » (chap. IX). Je ne néglige pas la riche documentation des chapitres III à VI sur la théorie physique et sur causalité et déterminisme. Mais je crois que les deux premiers chapitres et les trois derniers intéresseront plus spécialement les professeurs de Mathématiques.

Tout au long de l'ouvrage, le grand thème des rôles complémentaires de la pensée et de l'action éclaire les diverses doctrines qui sont exposées dans le cadre de la science de leur temps. Il en résulterait peut-être l'illusion que la science et la réflexion sur elle sont parvenues à la perfection dernière si, justement, cette place réservée à l'action ne soulignait le caractère essentiellement transitoire de toute doctrine ; la pensée scientifique n'existe, elle n'est réellemnt vivante, que dans la mesure où elle se renie, dans la mesure tout au moins où elle remet ses décrets perpétuellemen en cause.

Paraphrasant PIAGET, M. ULLMO écrit : « Toute connaissance provient de nos actions » (p. 21) ; plus loin : « L'expérience mathématique, c'est donc l'activité constructive de l'esprit » (p. 277). On trouve aussi cet excellent schéma sur la méthode mathématique : « Dégager du concret des outils de pensée, puis réfléchir sur ces outils, les élaborer (en particulier en précisant les notions mêmes de définition et de démonstration), les transformer et les éprouver à nouveau sur un concret enrichi » (p. 279).

On veut connaître pour comprendre ; mais qu'est-ce que comprendre ? « Comprendre, c'est être capable de refaire... comprendre, c'est pouvoir » (p. 207). En relevant cette phrase, le préfacier, M. L. ARMAND y voit la rencontre de la philosophie de la science et de la philosophie de l'action. Ne pouvons-nous y trouver aussi la source d'une réflexion salutaire sur la pédagogie, domaine par excellence ou il faut penser en actes, où il faudrait... Comment accorder nos actes (qui souffrent du poids de nos habitudes) à la marche prodigieuse des idées ? La lecture d'un livre comme celui de M. ULLMO, plus riche d'informations et de questions que de réponses toutes faites, peut nous aider à résoudre ce problème essentiel (je veux dire à lui trouver des solutions approchées).

***

Je voudrais ajouter à ce bref compte rendu deux remarques très différentes.

L'auteur annonçait pour commencer le primat de la physique. Cependant, tout au long du livre, la réflexion sur les Mathématiques est présente, inévitablement. Dans le dernier chapitre, l'intelligibilité de la nature est fondée sur la notion de

groupe. Le livre se termine d'ailleurs par une note sur les Mathématiques où la question de leurs fondements est succinctement esquissée.

Il est permis de regretter qu'un ouvrage de cette importance ne bénéficie pas d'une meilleure présentation. L'absence d'un index, d'une bibliographie générale, sont également regrettables, d'autant que les nombreuses notes en bas de page, tantôt explicatives, tantôt ne mentionnant qu'une référence, auraient pu ainsi être considérablement allégées. On se demande si l'éditeur a le souci de fournir un outil vraiment maniable ou s'il se considère seulement comme un marchand de papier (et même, ici, de papier-journal).

« Avec tous ses succès et ses espérances, on peut dire de la physique d'aujourd'hui qu'elle est la raison même à l'œuvre » ; réflexion valable pour la science tout entière et que cet ouvrage a le mérite de nous proposer en conclusion.

G. W.

Algèbre linéaire, par G. CAGNAC, publié par Masson et Cie, éditeurs, Paris, 1958.

L'ouvrage de M. l'Inspecteur général CAGNAC est conjointement un livre d'étude et un livre de culture : un livre d'étude, car il prend place dans le grand cours de Mathématiques Spéciales Commissaire-Cagnac qu'il complète conformément aux nouveaux programmes ; un livre de culture, car tous ceux qui pratiquent les Mathématiques savent l'importance toujours grandissante prise par l'algèbre linéaire dans les sciences pures comme dans les techniques les plus variées et les plus concrètes.

L'étude s'effectue en sept chapitres. Le premier d'entre eux cisèle le langage, il faut en effet que celui-ci soit ferme en vue de l'appréhension des symboles à forte densité conceptuelle que manie le calcul matriciel.

Le chapitre II présente les vecteurs libres à l'aide du modèle segmentaire familier. Les notions affines et les notions métriques y sont nettement séparées. Il y est constamment pensé à l'utilité physique des vecteurs, une grandeur vectorielle étant l'association à une grandeur physique d'une direction et d'un sens ; attention est donc portée aux unités, il est ainsi répondu à une préoccupation souvent marquée dans notre *Bulletin*. Les chapitres suivants étudient les Espaces vectoriels (chapitre III), introduits à l'aide du modèle analytique, la Notation des Matrices (chapitre IV) avec une belle démonstration d'associativité, les Déterminants (chapitre V), formes multilinéaires alternées de douze vecteurs, les Equations et les Formes linéaires (chapitre VI), le tout éclairé par la référence vectorielle.

Le dernier chapitre où l'étude des transformations linéaires d'un espace vectoriel de dimension 12 en lui-même et l'algèbre des matrices carrées, sont menées dialectiquement marque l'apogée de l'ouvrage qui sera lu avec un égal plaisir par les élèves et par les maîtres.

Y. C.

Introduction à l'Algèbre supérieure et au Calcul numérique algébrique, par L. DERWIDUÉ, Masson et Cie, Paris, Sciences et Lettres, Liége, 1957.

Voici un ouvrage d'une grande étendue, où sur une trame théorique rigoureuse prennent place mille et une méthodes de calcul effectif.

Dès le premier chapitre nous sommes avertis que les nombres seront partout présents, de vrais nombres, écrits avec de vrais chiffres et calculés avec une vraie machine arithmétique. Alors, calculatrice en main, nous parcourons tous les grands secteurs de l'algèbre : nombres complexes, déterminants, équations, polynômes, substitutions linéaires, formes quadratiques, calcul matriciel, espaces euclidiens et hermitiens. De vénérables procédés auxquels s'attachent les noms de Descartes, de Newton, d'Euler, de Lagrange, de Dandelin, voisinent avec des méthodes toutes neuves comme celle de M. COUFFIGNAL et s'en trouvent bienheureusement rajeunis.

Le dernier chapitre, consacré à la théorie des Groupes, réalise la synthèse des points de vue classique et moderne.

D'abondantes bibliographies et un index très riche complètent ce livre qui sera un outil efficace pour tous ceux qui fréquentent les nombres par métier ou par amour.

Y. C.

Temps, Espace, Matière, par Hermann WEYL. (Leçons sur la théorie de la relativité générale). Traduites sur la quatrième édition allemande par G. JUVET et R. LEROY.

Nouveau tirage augmenté de *Commentaires,* par G. BOULIGAND, Librairie scientifique Albert Blanchard, 9, rue de Médicis, Paris ; 1 vol. in-8°, 290 pages, 1 200 F.

En rééditant les classiques de la Science et les œuvres des grands précurseurs de la Mathématique moderne devenus introuvables en librairie, Albert Blanchard acquiert toujours de nouveaux titres à notre gratitude. Après le *Traité des Substitutions,* de C. JORDAN, voici un nouveau tirage du célèbre ouvrage d'Hermann WEYL, dans la traduction éditée chez Blanchard même en 1922. Les années écoulées ne diminuent en rien l'actualité de cette œuvre ; cette introduction à la Relativité générale est toujours valable et toujours fondamentale son étude critique des notions de temps, d'espace et de leurs relations avec la matière, avec l'optique et l'électromagnétisme.

Les points de vue mathématique, physique et philosophique sont étroitement liés ; c'est ce que souligne l'intéressant commentaire de M. BOULIGAND qui insiste sur l'accord de la pensée d'Hermann WEYL avec les théories philosophiques de HUSSERL.

A l'intention de nos collègues, qui n'ont pas déjà pris contact avec l'ouvrage, passons rapidement en revue son contenu :

L'Introduction est, au départ, nettement philosophique : il s'agit surtout de faire sentir l'obligation de repenser et recréer axiomatiquement toutes les notions fondamentales : « La science de l'espace et de la matière, qui était la nôtre jusqu'à ce jour, et que la philosophie considérait comme une connaissance *a priori* tout à fait générale et nécessaire, est maintenant complètement en ruines. Après que la physique de Faraday et de Maxwell eut opposé à la matière une réalité d'une autre catégorie : le champ ; après que, d'autre part, la Mathématique eut perdu confiance en l'évidence de la géométrie euclidienne par un travail de critique logique poursuivi durant tout le dernier siècle, la tempête arriva qui détruisit les conceptions d'espace, de temps, de matière, pour faire place à une vision plus libre et plus aiguë des choses. Le bouleversement fut accompli essentiellement par le travail génial d'un seul homme, Albert EINSTEIN. »

Tout d'abord se présente l'analyse de la *notion de temps,* qui semble bien plus énigmatique que celle d'espace : la première tâche est l'étude de ce qui est « contenu dans la notion mathématique du temps ». Déjà est mise en évidence cette constatation fondamentale : « A la *mesure* est toujours attachée une *théorie de relativité* », par l'introduction d'un système de coordonnées.

Le chapitre I est consacré à *l'espace euclidien.* Nous y trouvons la maintenant classique « axiomatique d'Hermann Weyl » qui construit d'abord la géométrie affine par la création du *vecteur* et du *point,* puis introduit la métrique au moyen d'un *produit scalaire.* L'étude des transformations linéaires conduit à l'introduction des *tenseurs :* « Les grandeurs géométriques et physiques sont des scalaires, des vecteurs et des tenseurs ; c'est par elles que s'exprime la nature mathématique de l'espace dans lequel ces grandeurs existent... Si, par un certain nombre d'opérations mathématiques on obtient un tenseur invariant T nul, l'égalité $T = 0$ exprime une loi de la nature. »

L'algèbre tensorielle, puis l'analyse tensorielle sont alors étudiées avec des exemples tirés de la physique et l'application à la théorie de Maxwell du champ électromagnétique stationnaire.

Le chapitre II développe les idées qui élargissent la notion euclidienne de l'espace et aboutissent à *la notion de continuum métrique* (Espace de Riemann). (Au passage, un coup d'œil sur les géométries non euclidiennes est l'occasion d'indiquer le modèle de Klein de la géométrie de Lobachewsky). Le développement systématique de la géométrie infinitésimale pure se fait en trois étapes : le continu amorphe, la multiplicité à connexion affine, l'espace métrique, ce dernier étant éclairé par la théorie des groupes.

Le chapitre III examine les relations du temps et de l'espace. La relativité de l'espace et du temps est d'abord conçue en admettant le principe galiléen de l'inertie (principe de relativité de Galilée-Newton). Puis l'électrodynamique des champs variables avec le temps conduit à la relativité de Lorentz-Einstein. Alors sont étudiées la géométrie, la cinématique, l'optique, l'électrodynamique et la mécanique de la relativité, ainsi que la théorie de Mie. « Il reste à ajouter la loi de gravitation newtonienne qui, dans sa forme habituelle, se rattache au principe de Galilée. Mais elle porte en soi une énigme dont nous débrouillerons la solution dans le dernier chapitre... La découverte capitale que nous venons de faire dans ce chapitre, c'est que la scène du monde réel n'est pas un espace euclidien à trois dimensions, mais un univers à quatre dimensions où l'espace et le temps sont enchevêtrés inextricablement. »

Le chapitre IV, enfin, expose la théorie générale de la Relativité. Il débute par un exposé des bases de la théorie einsteinienne de la gravitation. L'étude du mouvement d'un point matériel et des rayons lumineux dans le champ statique de gravitation prouve que les rayons lumineux sont courbés dans ce champ, que la fréquence d'une raie émise par un atome dépend aussi de ce champ : ces deux écarts mesurables entre la théorie classique et la théorie d'Einstein ont été, comme l'on sait, effectivement constatés ainsi que celui qui concerne la rotation du périhélie de Mercure. « Cependant, la théorie trouve sans doute son appui, moins dans l'expérience que dans sa contexture logique qui la place fort au-dessus de la mécanique classique puisqu'elle résout d'un coup et d'une manière fort satisfaisante pour l'esprit la double énigme de la gravitation et de la relativité du mouvement. »

L'auteur expose alors l'intégration rigoureuse des équations du champ statique dans le cas d'un corps unique et d'une planète de masse infiniment petite par rapport à celle de ce corps, puis dans certains problèmes relatifs au champ statique de gravitation.

Et l'on aborde les derniers paragraphes : Energie de gravitation ; Topologie de l'univers considéré dans son ensemble ; Métrique d'univers, cause des phénomènes électromagnétiques ; Conséquences du principe d'action le plus simple : les équations fondamentales de la mécanique.

Toute cette fin est d'une hardiesse qui donne le vertige. A la question qu'il pose de temps en temps : jusqu'à quel point ceci correspond-il à la réalité ? l'auteur répond par des hypothèses séduisantes... Le dernier paragraphe fait allusion à la physique statistique et à la théorie des quanta (qui ne sont pas abordés). Mais voici la conclusion :

« Celui qui mesure le chemin parcouru depuis la métrique euclidienne jusqu'au champ métrique variable dépendant de la matière et renfermant les manifestations de la gravitation et de l'électromagnétisme, celui qui cherche à embrasser d'un coup d'œil ce que notre exposé a forcément de fragmenté et morcelé, celui-là doit éprouver un sentiment de liberté, comme s'il sortait d'une cage où il était enfermé jusqu'ici ; il doit être pénétré de la certitude que notre raison n'est pas seulement un pis-aller humain, par trop humain, pour la lutte pour la vie, mais qu'elle s'est développée

malgré toutes les embûches et les errements jusu'au point où elle peut embrasser objectivement la vérité.

« Quelques-uns des accords puissants de cette harmonie des sphères auxquels Pythagore et Képler rêvaient sont parvenus à nos oreilles. »

De très nombreuses pages de ce livre vivant et enthousiaste se lisent aisément, mais le sujet même exige un outil mathématique avec lequel il faudrait être familiarisé. Dans son souci de mettre en évidence la suite des idées, le plan de la construction progressive, l'auteur rédige avec une extrême concision tout ce qui est calcul ; les définitions, les affirmations se suivent avec des esquisses de démonstrations qui laissent au lecteur un travail difficile à faire pour ne pas perdre pied. On a l'impression que l'idéal de l'auteur serait de faire passer directement sa pensée dans l'esprit du lecteur, et qu'il se résigne avec peine à entrer dans le détail des démonstrations ; mais qu'y faire ! « Malgré les efforts sincères de l'auteur, les considérations qui nous ont amené à l'achèvement des principes de la géométrie infinitésimale ne sont pas allées sans une débauche de formules et d'indices qui peuvent parfois masquer la clarté intuitive des problèmes. Mais il est impossible de renoncer à cet appareil qui semble à quelques-uns un peu rebutant. De même qu'avant de pouvoir exprimer sa pensée dans une langue étrangère, il faut se soumettre à une discipline souvent pénible, de même il est nécessaire de s'astreindre à la discipline de l'analyse tensorielle avant de pouvoir entreprendre le problème que nous avons en vue et qui touche à l'essence de l'espace, du temps et de la matière. »

Les conférences que, sur ce sujet, notre Association doit à M. Lichnérowicz et à Mme Tonnelat (dont les travaux et les ouvrages publiés sont rappelés dans la préface de M. Bouligand), nous donnent des armes pour nous attaquer au livre d'Hermann Weyl. Mais, même si nous n'avons pas la force ou le temps de dominer les questions traitées, les professeurs que nous sommes trouveront dans l'ouvrage d'innombrables sujets de réflexion. Ne citons que deux de ces remarques à titre d'exemple :

— « On a constaté que, non seulement en géométrie, mais encore d'une manière plus étonnante en physique, aussitôt que l'on découvre les lois de la nature, celles-ci se laissent représenter par des relations mathématiques de la plus grande simplicité et de la plus complète harmonie. Expliquer les raisons de cette simplicité et de cette harmonie, dont la physique ne peut pas aujourd'hui se passer, nous paraît être un des devoirs fondamentaux de l'enseignement mathématique. Cette harmonie est pour nous une source de profondes joies intellectuelles. »

— « Lorsque le vrai point de vue est atteint, la raison est inondée de lumière et les découvertes qu'elle fait ont alors pour elles le caractère de l'évidence, cependant elle n'avait pas la force d'atteindre d'un seul coup ce point de vue. »

L. F.

V. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS

CONCOURS DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC EN 1958

1. Agrégation de Mathématiques (Hommes)

MM. 1. Demazure, E.N.S. Ulm ; 2. Duvaul, E.N.S. Ulm ; 3. Delzant, E.N.S. Ulm ; 4. Guérin, E.N.S. St-Cloud ; 5. Giogiotti, assist. tit. Inst. de Math., Lille ; 6. Céa, E.N.S. St-Cloud ; 7. Gravez, E.N.S. Ulm ; 8. Giraud, E.N.S. Ulm ; 9. Berthoin Guy, prof. cert. coll. Epernay ; 10. Joubert, assist. Fac. des Sc. Rennes ; 11. Ba, E.N.S. Ulm ; Guichenez, E.N.S. St-Cloud ; Heuze, E.N.S. St-Cloud ; Weiss, prof. cert. lycée Deauville ; 15. Dutigny, assist. Fac. des Sc. Grenoble ; 16. Voilquin, prof. E.N.P. Nancy ; 17. Attali. E.N.S. Ulm ; Bézier, prof. cert. coll. Tours ; 19. Schmidt, prof. cert. coll. Moslheim ; 20. Verdier, E.N.S. Ulm ; 20 *bis*. Ngo-Van-Que, élève à titre étranger E.N.S. Ulm (Vietnamien) ; 21. Joulain, assist. Fac. des Sc. Poitiers ; 22. Becker, E.N.S. St-Cloud ; 23. Touffait, prof. cert. lycée St-Lô ; 24. Vincent, prof. cert. lycée Orléans ; 25. Grimal, prof. cert. lycée Alençon ; 26. Parsy, assist. Fac. des Sc. Lille ; 27. Reynaud, prof. E.M.P. Autun ; 28. Labranche, prof. E.N.I. Caen ; Rougée, E.N.S. St-Cloud ; 30. Marsal, E.N.S. Ulm ; Vaillant, prof. cert. coll. techn. Sens ; 32. Condamine, prof. cert. en congé ; 33. Colloch, audit. E.N.S. Ulm ; 33 *bis*. Hagege (Tunisien), prof. tit. coll. Alaoui (Tunis) ; 34. Coeure, étud. Nancy ; 35. Froissart, E.N.S. St-Cloud ; Querré, prof. cert. coll. Rouen ; 37. Domissy, E.N.S. St-Cloud ; 38. Bernat, assist. Fac. des Sc. Toulouse ; Deschamps, prof. tit. E.N.G. Moulins ; 40. Coulon, E.N.S. Ulm ; 41. Augereau, prof. cert. coll. St-Léonard-de-Noblat ; Chapelier, prof. cert. coll. Coulommiers ; Mattenet, étud. Lille ; 44. Fauvergue, prof. tit. E.N.G. Arras ; 45. Yvon, E.N.S. St-Cloud ; 46. Di Francesco, E.N.S. St-Cloud ; Meny, prof. cert. Ecole Optique Paris ; Noé, prof. cert. coll. Lyon ; 46 *bis*. Haïk (Tunisien), prof. cert. coll. techn. Tunis ; 49. Bour, prof. cert. lycée Metz ; Pupion, monit. Fac. des Sc. Bordeaux.

2. Agrégation de Mathématiques (Femmes)

Mmes et Mlles : 1. Bourgeois, née Le Cornec, assist. Fac. des Sc. Rennes ; Chevalier, E.N.S. de J.F. ; 3. Decazenove, audit. E.N.S. de J.F. ; 4. Honorat, E.N.S. de J.F. ; 5. Courivaud, née Aimard, E.N.S. Fontenay ; 6. Causse, née Fontan, E.N.S. Fontenay ; Loutfalla-Dieudonné, née Mauban, E.N.S. de J.F. ; 8. Heinrich, E.N.S. Fontenay ; 9. Turlot, E.N.S. de J.F. ; 10. Calais, étud. Lyon ; Cohen, étud. Paris ; 12. Debarnot, étud. Lyon ; 13. Crehange, née Franck, E.N.S. de J.F. ; 14. Adda, étud. Paris ; 15. Bretin, étud. Paris ; 16. Peyrache-Duquesnoy, E.N.S. de J.F. ; 17. Gautrand, E.N.S. Fontenay ; 18. Arnaudon, audit. E.N.S. ; Monteillard, née Sabre, E.N.S. Fontenay ; Rousseau, étud. Paris ; 21. Devalois, E.N.S. de J.F. ; Lassignardie, née Portal, E.N.S. de J.F. ; 23. Lecerf, née Maillard-Salin, E.N.S. de J.F. ; 24. Sardos, née Corse, prof. cert. lycée Bordeaux ; Vallette, E.N.S. de J.F. ; 26. Logeais, née Fleveau, assist. Fac. des Sc. Poitiers ; 27. Barbance, E.N.S. de J.F. ; 28. Tison, née Lavédrine, prof. cert. lycée Douai ; 29. Lamy, née Jullien, E.N.S. de J.F. ; 30. Bonniard, prof. cert. en congé ; Hénaut, E.N.S. de J.F. ; 32. Lanore, née Collot, prof. cert. lycée Meaux ; Leberon, prof. cert. coll. Decazeville ; 34. Logeais, née Mallard, étud. Poitiers ; Rolland, née Léon, prof. cert. en congé ; 36. Bardou, prof. cert. en congé.

(On remarquera que, sur les 50 nouveaux agrégés, 27 appartiennent déjà aux cadres ; tandis que sur les 36 nouvelles agrégées, 9 seulement occupaient déjà un poste).

3. Concours d'admission dans les Centres Pédagogiques Régionaux

(Hommes)

I. *Elèves de l'E.N.S.* (dispensés des épreuves écrites)

MM. 1. Céa Jean, élève de l'E.N.S. de St-Cloud ; Yvon Jean, élève de l'E.N.S. de St-Cloud ; 3. Rougée Paul, élève de l'E.N.S. de St-Cloud ; 4. Guérin Jean, élève de l'E.N.S. de St-Cloud ; Vintillas Maurice, élève de l'E.N.S. de St-Cloud.

II. *Elèves-professeurs des I.P.E.S.* (dispensés des épreuves écrites)

MM. 1. Debruyne Guy, Paris ; 2. Apicella Joseph, Alger ; Duverger Yves, Clermont ; Port-Lis Pierre, Toulouse ; 5. Becane Daniel, Paris ; Soupart Noël, Lille ; 7. Cailliou René, Strasbourg ; 8. Berthou Pierre, Rennes ; 9. Dussuel Bernard, Lille ; Marquèze Jean, Bordeaux ; Trémon Michel, Bordeaux ; 12. Ricaud Jacques, Aix ; 13. Clavier Henri, Rennes ; Levène Guy, Rennes ; 15. Lefebvre Pierre, Paris ; Nadaud Marc, Clermont ; Tournayre Jean, Toulouse ; 18. Bigot Michel, Caen ; 19. Gouret René, Rennes ; 20. Lévy Albert, Toulouse ; Penvern André, Rennes ; 22. Gaboriau Jean-Pierre, Rennes ; Jouenne Gilbert, Caen ; Perrier André, Montpellier ; Soussens Marcel, Toulouse ; 26. Charney Marc, Lyon ; Martin Jean, Strasbourg ; Ray Guy, Cermont ; 29. Giberne André, Lyon ; Jourdain André, Besançon ; Laura Marc, Toulouse.

III. *Concours normal*

MM. 1. Duceux Pierre, M.A. au lycée d'Amiens ; 2. Jaume Joseph, étud. à Montpellier ; 3. Pitti Christian, étud. à Aix ; 4. Nguyen-Khoa-Bong, étud. à Aix (Vietnamien) ; 5. Tarres Jean, étud. à Montpellier ; 6. Mellon André, étud. à Aix ; 7. Dequatre Pierre, étud. à Lyon ; 8. Pla Raymond, étud. à Montpellier ; 9. Ruff Claude, M.A. au collège de Rombas ; 10. Bonnacorso Jean, moniteur à la Fac. Sc. de Marseille ; 11. Donzé Gérard, insp. adjoint P.T.T. à Autun ; 12. Le Calvez Charles, étud. à Rennes ; Samson Jean, M.A. au collègeg de Rombas ; 14. Dujardin Claude, M.I. au lycée Malherbe à Caen ; 15. Gérard Raymond, étud. à Strasbourg ; 16. Lambert Jean, moniteur à la Fac. Sc. de Dijon ; 17. Marcellési Alexandre, M.A. en disponibilité ; 18. Galloux Jean, prof. tit. au C.A., 7, rue d'Arboy, à Paris ; 19. Sturbois Marcel, M.A. au collège technique de Valenciennes ; 20. Cicotti Jean-Paul, étud. à Aix ; 21. Degueurce Louis, moniteur à la Fac. Sc. de Dijon ; 22. Courtois Jacques, étud. à Lyon ; 23. Boufflers Claude, étud. à Aix ; 24. Beck Rémy, étud. à Strasbourg ; Delemer Jean, au service militaire ; 26. Malgorn Louis, étud. à Rennes ; Piquemal René, A.E. au collège de Castelsarrasin ; 28. Vasse Michel, A.E. au collège moderne de Gisors ; 29. Barry Eugène, étud. à Montpellier ; 30. Bouillet Jean, M.A. au coll. de Thaon-les-Vosges ; 31. Horain Gérard, M.A. au lyc. de Valenciennes ; 32. Piguet Robert, étud. à Aix ; 33. Béguier Pierre, étud. à Toulouse ; 34. Bonnet Maurice, A.E. au lyc. de Valence ; 35. Magliano Raymond, A.E. au service militaire ; 36. Fondanier Yves, M.A. au lyc. Dumont-d'Urville à Toulon ; 37. Zsigmond Jean, étud. à Caen ; 38. Aventurin Barbe, étud. à Toulouse ; 39. Jouve Jacques, M.A. au coll. d'Apt ; 40. Pouaty Arsène, M.A. au coll. d'Issoudun (F.O.M.) ; 41. Garat Bernard, étud. à Toulouse ; 42. Jegado Mathurin, étud. à Rennes ; 43. Le Grevellec Lucien, étud. à Rennes.

Candidats admissibles à l'agrégation proposés pour la dispense de la partie théorique du C.A.P.E.S.

MM. Kaplan Pierre, élève à l'E.N.S. rue d'Ulm ; Lerner Jean-Marc, élève à l'E.N.S. rue d'Ulm ; Merrier Henri, étud. à Paris ; Mendès Claude, étud. à Bordeaux ; Neumeister Georges, moniteur à la Fac. Sc. de Strasbour ; Pitti Christian, étud. à Aix.

(Femmes)

I. *Elèves de l'E.N.S. de Fontenay* (dispensées des épreuves écrites)

Mmes et Mlles 1. Heinrich Paulette ; 2. Causse, née Fontan Annie ; 3. Courivaud, née Aimard Claude ; 4. Gautrand Yvette ; 5. Monteillard, née Sabre Denise.

II. *Elèves-professeurs des I.P.E.S.* (dispensées des épreuves écrites)

Mmes et Mlles 1. Fournier Jacqueline, Lille ; 2. Gardes Renée, Caen ; 3. Paris Chantal, Aix ; 4. Leclercq Francine, Lille ; 5. Ayatis Marie-Claire, Lille ; 6. Bécane Jacqueline, Toulouse ; 7. Fournier Marie-Thérèse, Paris ; 8. Canal Marie-José, Toulouse ; 9. Meysonnier Nicole, Aix ; 10. Eger Anne-Marie, Aix ; 11. Landois Jeannine, Paris ; 12. Grillet Jeanne, Rennes ; 13. Etève Nicole, Paris ; 14. Monnier Jacqueline, Toulouse ; 15. Kornmann Michèle, Nancy ; 16. Chevallier Marie-Claire, Lille ; 17. Varangot Elisabeth, Paris ; 18. Bastard Gisèle, Rennes ; 19. Gaude Josette, Grenoble ; 20. Péju Gilberte, Paris ; 21. Guilleux Françoise, Paris ; 22. Bac, née Camps Jeannine, Toulouse.

III. *Concours normal*

Mmes et Mlles 1. Prouf Françoise, étud. Rennes ; 2. Moinard Liliane, monit. à la Fac. Sc. Poitiers ; 3. Sing Claude, étud. à Paris ; 4. Delcroix, née Poix Geneviève, étud. à Lille ; 5. Degé Françoise, M.A. au lyc. J.-B.-Say à Paris ; 6. Larelle, née Masse Michèle, M.A. au coll. de Mantes ; 7. Bénard Suzanne, étud. à Paris ; 8. Caffy Claudine, étud. à Paris ; 9. Danthony Andrée, M.A. au coll. de J.F. de St-Etienne ; 10. Trottier Félicienne, étud. à Lyon ; 11. Landas Jeannine, M.A. au coll. de Tourcoing ; 12. Garet Marguerite, étud. à Rennes ; 13. Bisserier Odile, étud. à Caen ; 14. Briffoteaux Claudine, étud. à Lille ; 15. Moulins, née Guérard Monique, étud. à Aix ; 16. Vatin Andrée, A.E. au lyc. de J.F. de St-Quentin ; 17. Lambert Michelle, A.E. au coll. de Ste-Menehould ; 18. Meunier Monique, étud. à Paris ; 19. Moreau Jeanne, étud. à Rennes ; 20. Marchier Jeannine, monitrice à la Fac. Sc. de Poitiers ; 21. Bobineau, née Levigne Janine, étud. à Paris ; 22. Ruffat Elyane, étud. à Paris ; 23. Le Coq Cécile, A.E. stag. au lyc. de J.F. de Gap ; 24. Hasson Marthe, étud. à Aix ; 25. Grille Josette, monit. à la Fac. Sc. de Clermont ; 26. Gloppe Hélène, étud. à Lyon ; 27. Vaillard Ghyslaine, étud. à Bordeaux ; 28. Pérodeau, née Courtin Annie, étud. à Bordeaux ; 29. Motet, née Hubert Christiane, M.A. au coll. d'Orléans ; 30. Poujol, née Michaud Anne-Marie, A.E. tit. au lyc. de Tours ; 31. Germain, née Floch, monitrice à la Fac. Sc. d'Aix ; 32. Jean Céline, M.A. à l'E.N. de Vannes.

Candidate admissible à l'agrégation et proposée pour la dispense de la partie théorique du C.A.P.E.S.

Mlle Batier Nicole, étudiante à Paris.

4. Certificat d'aptitude au Professorat de l'Enseignement du Second Degré

(Hommes)

Très bien

MM. Aubert, Clermont-Ferrand ; Béringuet, Alger ; Coineau, Poitiers ; Molinier, Aix ; Quenis, Lyon.

Bien

MM. Amy, Rennes ; Duvina, Aix ; Flahaut, Lille ; Georges, Clermont-Ferrand ; Laguerre, Montpellier ; Michon, Poitiers ; Pellegrin, Aix ; Pigeonneau, Paris ; Souliac, Paris ; Vanbremeersch, Lille ; Vinet, Aix.

Assez bien

MM. Bourgeois, Lille ; Bruel, Caen ; Burret, Lyon ; Cousteau, Toulouse ; Forget, Rennes ; Gaudin, Rennes ; Grenier, Bordeaux ; Guérin, Montpellier ; Guichenez, Paris (E.N.S.) ; Gutekunst, Paris ; Kerbrat, Caen ; Marigil, Toulouse ; Morin, Toulouse ; Pradel, Montpellier ; Pujol, Toulouse ; Queau, Paris ; Rivet, Paris.

Passable

MM. Bonnet, Toulouse ; Boutin, Poitiers ; Chaboud, Lyon ; Custine, Montpellier ; Darré, Grenoble ; Frimigacci, Paris ; Mollard, Grenoble ; Piquemal, Bordeaux

Bénéficiaires de l'art. V, 4°, modifié :

MM. Aidi, lyc. de Carthage, Tunisie (nationalité tunisienne) ; Bellaiche Paul, lyc. de Bizerte ; Bès, lycée de Dakar ; Bissol, Ecole des Travaux publics à Bamako ; Druge, lyc. franco-allemand à Berlin ; Elalouf, coll. Emile-Loubet à Tunis ; Kaïk, coll. Emile-Loubet à Tunis (nationalité tunisienne) ; Rabesoatra, coll. de Tananarive ; Valenza, coll. technique de Bizerte ; Vitali, lyc. de Sousse ; Bellaiche Moyse, lyc. de Bizerte (nationalité tunisienne).

Liste des admissibles à l'agrégation qui, n'ayant pas été proposés pour le titre d'agrégé, ont été, en raison de leurs qualités pédagogiques, l'objet d'une proposition du jury qui leur tient lieu de certificat d'aptitude au professorat de l'Enseignement public du Second Degré (C.A.P.E.S., parties théorique et pratique).

Ces candidats jouissent d'une priorité pour être nommés professeur certifié.

MM. Jaume Joseph, étudiant à Montpellier ; Ottl Gérard, élève à l'E.N.S. rue d'Ulm ; Rivet Roger, prof. stagiaire au C.P.R. de Paris ; Thibaudier Claude, élève à l'E.N.S. rue d'Ulm.

(Femmes)

Très bien

Mmes et Mlles Basle, Rennes ; Bieber, Strasbourg ; Bièvre, Lyon ; Cadet, Paris ; Evenard, Poitiers ; Labadie, Toulouse ; Lecerf, née Maillard-Salin, Paris (E.N.S.) ; Peyrieras, née Deschamps, Bordeaux ; Régnier, Toulouse ; Tortosa, née Lachkar, Alger ; Vidal, Montpellier.

Bien

Mmes et Mlles Aubert, née Sébald, Clermont-Ferrand ; Bourely, Toulouse ; Canac, née Gascoin, Toulouse ; Cartier, Clermont-Ferrand ; Cazalot, née Chauderon, Bordeaux ; Defrance, Lille ; Fitamant, Grenoble ; Gilette, née Nallino, Aix ; Girard, Lyon ; Minaud, Paris ; Pelon, Rennes ; Picot, Poitiers ; Rosec, Bordeaux.

Assez bien

Mmes et Mlles Cadoret, Poitiers ; Chauveau, Caen ; David, Poitiers ; Delouche, Paris ; Flesch, Strasbourg ; Germain, Cermont-Ferrand ; Gouyon, Paris ; Le Roux, née Bourge, Rennes ; Priolon, Paris (E.N.S.) ; Rigal, Paris.

Passable

Mmes et Mlles Bartholmé, Strasbourg ; Lefèvre, Paris.

Liste des candidates admissibles à l'agrégation qui, n'ayant pas été proposées pour le titre d'agrégée ont été, en raison de leurs qualités pédagogiques, l'objet d'une proposition du Jury, qui leur tient lieu de certificat d'aptitude au professorat de l'Enseignement du Second Degré (C.A.P.E.S. parties théorique et pratique).

Ces candidates jouissent d'une priorité pour être nommées professeur certifié.

Mmes et Mlles Bouchon Hélène, étud. à Paris ; Floryn Lucette, étud. à Paris ; Julien, née Argenson Francine, prof. cert. au coll. techn. de Mende ; Prouff Françoise, monit. à la Fac. Sc. de Rennes ; Rousseau Jeannine, étud. à Paris ; Viot Nicole, étud. à Paris.

Concours de recrutement des professeurs certifiés et assimilés

(Décret du 13 août 1957)

Liste des candidats proposés par le Jury pour l'admission définitive :

Bien

MM. Kervevillant, C.G. d'Angers ; Ladouce, L.G. de Charleville ; Moncourt, E.N.I. La Roche-sur-Yon ; Savelli, L.G. de Bastia ; Vauvarin, C. Fontenelle à Rouen ; Vayssié, C.G. d'Annecy.

Assez bien

MM. Beugin, C.C.F. de Tourcoing ; Bramoulle, L. J.-Decour à Paris ; Crozeille, L. Buffon à Paris ; Didier, L. de Reims ; Guéguen André, C.G. de Fougères ; Guéguen Pierre, C.F. de Dinan ; Morel, C. Anguier à Eu ; Orsoni, C. de Sartène ; Poquet, L. Châlons-sur-Marne ; Van den Bossche, L. Coutances.

Passable

MM. Corgne, C.G. de Brioude ; Levaillant, L. de St-Rambert ; Sérémy, C.G. La Seyne ; Thézé, C. Avranches.

Liste des candidates proposées par le Jury pour l'admission définitive :

Très bien

Mme Bonnin, née Dubois, L. de Vannes.

Bien

Mmes et Mlles Bresson, L.J.F. Clermont-Ferrand ; Chiffre, C.M. de St-Jean-d'Angély ; Courbot, née Joseph, C. de Belfort ; Ducher, L.J.F. Le Puy ; Emanuély, L.J.F. Draguignan ; Krier, C. de Strasbourg ; Sauban, née Rozec, L.J.F. de Quimper ; Stéfanacci, C.J.F. Vic-en-Bigorre.

Assez bien

Mmes et Mlles Ayral, née Riffard, C.F. Villefranche-sur-Saône ; Carcenac, C.M.J.F. Décazeville ; Chastanet, C.J.F. Clermont-Ferrand ; Crousillac, née Barrau, ann. Nanterre du L. Condorcet ; Dubois, née Camus, C.M.J.F. d'Orléans ; Dubost, née Proust, L.J.F. Vichy ; Dubus, née Albagnac, C. d'Armentières ; Dutigny, L. Camille-Sée ; Haurié, C.J.F. Mussidan ; Mouette, L.G.M. Péronne ; Podlejski, née Thollet, L. St-Just à Lyon ; Roux, L.J.F. Digne ; Sabot, née Lecourt, C. E.-Quinet à Paris ; Tuilié, née Faup, C.J.F. Albi.

Passable

Mmes et Mlles Courcoux, née Hallemans, C.J.F. Calais ; Demeusy, L.J.F. Lons-le-Saunier ; Faron, C. Nyons ; Grosmèche, C. Pontoise ; Hores, E.N.I. Nîmes ; Vieu, née Baudasse, C. Clermont-l'Hérault.

(*Art 4 du décret du 16 octobre 1956*)

Liste des candidats proposés par le Jury pour l'admission définitive.

Très bien

MM. Le Maître, L. de Pont-l'Abbé ; Mossmann, C. de Bischwiller.

Bien

MM. Barès, C. de Mirepoix ; Bouffier, C.Cl. de Romans ; Boyer, C.G. de La Seyne-sur-Mer ; Dazy, C. de Longwy ; Legay, C. d'Issoire ; Lereau, C. d'Arles ; Lustre, L. de Béthune ; Martin, L. de Landerneau ; Molliet, C.M.P.N.A. de Koléa ; Querre, C.G. La Souterraine.

Assez bien

MM. Allory, C. de Dieppe ; Cuchet, C.F. de St-Jean-de-Maurienne ; Duhalde, C.G. d'Aire-sur-Adour ; Fourcoual, C.M. de Melle.

Passable

MM. Rolland, C. d'Angers ; Reynès, E.M.P. d'Autun.

Liste des candidates proposées par le Jury pour l'admission définitive :

Très bien

Mmes et Mlles Lemoigne, C.F. de Lisieux ; Maslov de Gercourt, L. Périer à Marseille.

Bien

Mmes et Mlles Augeraud, C.F. de Fontenay-le-Comte ; Ménard, C.F. Le Dorat ; Querré, C.F. La Souterraine ; Vassard, L. Morlaix.

Assez bien

Mmes et Mlles Bié, Sanat. de Neufmoutiers-en-Brie ; Forestier, L. Bourg ; Subrebost, C.F. Excideuil ; Wiedmann, L. Metz.

Passable

Mmes et Mlles Houbas, C. Mouy ; Maurige, L.F. Le Puy.

Circulaire du 16 juin 1958 sur l'emploi des instituteurs dans le second degré et le technique

Les effets conjugués de la démographie et de la scolarisation, toujours plus poussés dans nos Lycées, Ecoles nationales professionnelles et Collèges, nous imposent, dès la rentrée prochaine, de faire un plus large appel à des instituteurs de classes élémentaires pour l'enseignement dans ces établissements.

Ces instituteurs seront délégués par décision rectorale, soit dans une chaire vacante, soit dans un poste de maître auxiliaire, soit enfin sur un groupement d'heures supplémentaires. Ils seront de préférence affectés à des chaires scientifiques (Mathématiques et Sciences naturelles) dans les classes de Sixième et de Cinquième.

I. — Situation de ces maîtres.

Les instituteurs ainsi délégués dans les Lycées, Ecoles nationales professionnelles et Collèges seront à tous points de vue assimilés aux professeurs de cours complémentaires. Cette règle est applicable à la rémunération, au maximum de service, à l'avancement et à la participation au Mouvement dans le cadre d'origine.

Ces instituteurs seront rétribués sur le budget propre de l'Enseignement du Second Degré ou de l'Enseignement Technique.

a) *Rémunération.* — Les intéressés bénéficieront de l'échelle de traitement prévue pour les instituteurs enseignant dans une classe secondaire ou dans l'Enseignement Technique, et qui est identique à celle prévue pour les instituteurs enseignant dans un cours complémentaire.

Pour la détermination de leur ancienneté d'échelon, il ne sera fait aucune différence entre les services accomplis, que ce soit dans les Lycées, les Ecoles nationales professionnelles, les Collèges ou dans les cours complémentaires.

b) *Maximum de service.* — Ce maximum est en principe fixé à 24 heures, comme dans les cours complémentaires.

Par analogie avec ce qui se pratique dans ces établissements, quelques heures pourront être consacrées à des enseignements tels que le dessin, la musique, au travail dirigé ou à la direction d'études. MM. les Inspecteurs d'Académie voudront bien à ce sujet veiller à ce qu'il ne s'établisse aucune différence choquante entre les services qui pourraient être exigés des instituteurs de cours complémentaires exerçant dans des établissements relevant de directions différentes.

Certains de ces maîtres qui, en raison de leurs aptitudes, pourront suivre avec profit des études supérieures, feront l'objet, par vos soins et sur avis de MM. les Inspecteurs d'Académie et des Doyens, de décisions individuelles réduisant à 18 heures leur maximum hebdomadaire de service. Cette mesure est également valable pour les maîtres en fonction dans les cours complémentaires.

c) *Accessoires de traitement.* — Des pourparlers sont engagés avec l'Administration des Finances pour que l'indemnité de logement qui ne pourra plus être servie à ces maîtres sur le budget des communes le soit par les soins de la Direction de l'Enseignement du Second Degré ou de la Direction de l'Enseignement Technique.

II. — Facilités d'accès au grade supérieur.

Les instituteurs qui auront donné leur service pendant deux ans au Second Degré ou à l'Enseignement Technique, pourront, sur leur demande, à partir du 1er octobre 1960, obtenir un congé d'études d'un an à plein traitement pour préparer la propédeutique dans les centres de préparation au professorat des cours complémentaires ou des centres d'apprentissage ; ils seront alors pris en charge par l'Enseignement

du Premier Degré ou par l'Enseignement Technique. En cas de succès, ils pourront opter, soit pour l'enseignement dans les cours complémentaires ou dans les centres d'apprentissage, soit, s'ils remplissent les conditions, pour l'entrée dans les I.P.E.S.

Les instituteurs actuellement en fonction dans les Lycées, Ecoles nationales professionnelles et Collèges auront le choix entre la situation qui leur était appliquée et celle qui est définie par la présente circulaire.

Les contractuels pendant l'année scolaire 1957-58. — D'après la réponse donnée par le Ministre de l'Education Nationale à une question posée par un parlementaire, on a eu recours, pendant l'année scolaire dernière, aux services de 127 contractuels :

84 en Mathématiques (dont 24 pour le personnel féminin) et 43 en Physique (dont 8 pour le personnel féminin).

Parmi ces 127 contrats, 9 ont dû être résiliés en cours d'année, tous dans le personnel masculin. Pour quelles raisons, on le devine aisément, disons seulement qu'il a couru à ce sujet des histoires dignes de Courteline. Il y a loin, de la réalité aux illusions administratives ! Ne nous annonçait-on pas que ces ex-ingénieurs et ex-généraux allaient réveiller un personnel assoupi dans sa routine !

Nous sommes obligés — sans y mettre aucun amour-propre — de constater que nous avions prévu cet échec total, et de rappeler que, dès le 17 octobre 1957, notre Comité déclarait :

« Ces mesures sont et resteront sans effet sur la crise dramatique du recrutement des maîtres, si ce n'est pour en accroître les difficultés en décourageant les candidats aux concours normaux et en créant, parmi les professeurs en exercice, le sentiment que leurs efforts passés et présents, pour améliorer la pédagogie des Mathématiques, sont voués à la critique non fondée des officiels et au sabotage. »

Textes officiels à connaître.

● *Décret du 8 août 1958 modifiant le régime des études et des examens en vue de la licence ès sciences.*

ARTICLE PREMIER. — L'enseignement préparatoire à la licence ès sciences comprend un premier cycle d'initiation à l'Enseignement Supérieur et un deuxième cycle de formation scientifique.

ART. 2. — Les Facultés des Sciences délivrent des certificats d'études supérieures qui sont répartis en groupes par spécialités et dont la liste, le classement, les programmes, les horaires et les épreuves sont arrêtés par le Ministre de l'Education Nationale, après avis du Conseil de l'Enseignement Supérieur et, sauf dispositions contraires, sur la proposition de l'Assemblée de la Faculté.

ART. 3. — Nul n'est admis à prendre la première inscription en vue du diplôme de licencié ès sciences s'il n'est titulaire du diplôme de bachelier de l'Enseignement Secondaire ou d'un titre admis par décret en dispense du baccalauréat en vue de la licence ès sciences.

ART. 4. — Le diplôme de licencié ès sciences est conféré à tout étudiant justifiant :

1° De l'un des trois certificats d'études supérieures préparatoires suivants qui sanctionnent le premier cycle d'enseignement :

Certificat de Mathématiques générales et physique (M.G.P.) ;

Certificat de Mathématiques, physique et chimie (M.P.C.) ;

Certificat de sciences physiques, chimiques et naturelles (S.P.C.N.),

ou de l'un des titres admis en équivalence par arrêté du Ministre de l'Education Nationale, pris après avis du Conseil Supérieur de l'Education Nationale.

2° De cinq autres certificats d'études supérieures sanctionnant le deuxième cycle d'enseignement.

Trois au moins de ces certificats doivent appartenir à des groupes différents. Un au moins de ces certificats doit être choisi sur une liste arrêtée par le Ministre de l'Education Nationale après avis du Conseil de l'Enseignement Supérieur.

ART. 5. — A l'issue de la première année les candidats ne peuvent subir que les épreuves des certificats d'études supérieures préparatoires.

ART. 6. — Nul ne peut s'inscrire en vue d'un certificat d'études supérieures sanctionnant le deuxième cycle d'enseignement s'il n'est titulaire d'un certificat d'études supérieures préparatoire ou d'un titre admis en équivalence en application des dispositions de l'article 4.

ART. 7. — Par dérogation aux dispositions des articles 5 et 6 du présent décret, les candidats justifiant de deux années au moins d'études ou de recherches depuis l'obtention du titre initial mentionné à l'article 3 peuvent être autorisés à s'inscrire en vue de postuler un seul certificat d'études supérieures sanctionnant le deuxième cycle d'enseignement sans justifier d'un certificat d'études supérieures préparatoire ou d'un titre admis en équivalence en application des dispositions de l'article 4. Cette autorisation est accordée par le doyen sur avis favorable de l'Assemblée de la Faculté.

Les candidats admis au bénéfice des dispositions du présent article ne peuvent subir la même année les épreuves d'un premier certificat d'études supérieures préparatoire et de l'un des certificats d'études supérieures sanctionnant le deuxième cycle d'enseignement sauf autorisation exceptionnelle accordée par le doyen.

ART 8. — Pour chaque certificat, il y a deux sessions d'examens par an, dont la deuxième a lieu au plus tard en octobre.

Aucun examen ne peut avoir lieu en dehors de ces deux sessions. Les jours, heures et lieux des examens sont fixés par le doyen.

ART 9. — Les sujets des épreuves écrites sont choisis par le doyen.

ART. 10. — L'assiduité des étudiants à l'enseignement pratique est obligatoire, sauf dérogation exceptionnelle accordée par le doyen. Nul ne peut se présenter aux examens s'il n'a pas satisfait à cette obligation.

L'enseignement pratique donne lieu à l'attribution de notes qui sont communiquées aux jurys et dont il est tenu compte lors des délibérations.

Un arrêté du Ministre de l'Education Nationale, pris après avis du Conseil Supérieur de l'Education Nationale, fixera les conditions dans lesquelles les candidats aux certificats d'études supérieures préparatoires pourront obtenir la dispense de la scolarité.

ART. 11. — Le jury est désigné par le doyen. Il comprend au moins trois professeurs ou maîtres de conférences dont l'un peut être remplacé par un chargé de cours titulaire du diplôme d'Etat de docteur ès sciences. Les notes sont données par le jury.

ART. 12. — L'admissibilité, l'admission et l'ajournement sont prononcés après délibération du jury.

L'admissibilité aux épreuves orales est valable pour la session où elle est acquise.

Toutefois, lorsqu'elle est obtenue avec une moyenne au moins égale à 11 sur 20, elle demeure valable pour une des trois sessions qui suivent la session où le candidat a été déclaré admissible.

ART. 13. — Les certificats d'aptitude établis en vue des certificats d'études supérieures portent les mentions suivantes :

Passable, quand le candidat a obtenu une moyenne au moins égale à 10 sur 20 et inférieure à 12 ;

Assez bien, quand le candidat a obtenu une moyenne au moins égale à 12 et inférieure à 14 ;

Bien, quand le candidat a obtenu une moyenne au moins égale à 14 et inférieure à 15 ;

Très bien, quand le candidat a obtenu une moyenne au moins égale à 16.

ART. 14. — Par décision du Ministre de l'Education Nationale et après avis de l'Assemblée de la Faculté des Sciences et du Conseil de l'Enseignement Supérieur, l'équivalence de trois certificats d'études supérieures au maximum, y compris le certificat d'études supérieures préparatoire, peut être accordée en raison de titres obtenus dans des établissements d'enseignement supérieur étrangers.

ART. 15. — Les dispositions du présent décret seront applicables à compter de l'année scolaire 1958-1959.

ART. 16. — Des arrêtés du Ministre de l'Education Nationale, pris après avis du Conseil de l'Enseignement Supérieur, fixeront les conditions dans lesquelles les dispositions du présent décret seront appliquées aux étudiants en cours d'études.

ART. 17. — Il est créé auprès du Conseil de l'Enseignement Supérieur une Commission consultative permanente chargée d'étudier et, éventuellement, de proposer les modifications permettant de réaliser l'adaptation de l'enseignement aux exigences du progrès scientifique.

Les membres de cette Commission sont désignés par arrêté du Ministre de l'Education Nationale après avis du Conseil de l'Enseignement Supérieur.

● *Décret du 8 août 1958 relatif à la composition des licences ès sciences d'enseignement.*

ARTICLE PREMIER. — En vue de l'accès aux fonctions d'enseignement dans les établissements publics, pour lesquelles le grade de licencié ès sciences est requis et suivant les modalités fixées par décrets pour chaque ordre d'enseignement, la licence ès sciences comporte un certificat d'études supérieures préparatoire et les certificats d'études supérieures suivants :

I. — SCIENCES MATHÉMATIQUES

1° Mathématiques I.

2° Electricité ou thermodynamique et mécanique physique ou optique.

3° Mathématiques II.

4° Mécanique générale.

5° Un certificat d'études supérieures orienté vers la mécanique ou les probabilités, ou l'astronomie, ou le calcul numérique, ou l'algèbre, et choisi sur une liste fixée pour chaque Faculté des Sciences, par arrêté du Ministre de l'Education Nationale sur proposition de l'Assemblée de la Faculté et après avis du Conseil de l'Enseignement Supérieur.

II. — Sciences mathématiques appliquées

1° Mathématiques I.

2° Techniques mathématiques de la physique.

3° Mécanique générale.

4° Electricité ou optique, ou thermodynamique et mécanique physique.

5° et 6° Deux certificats d'études supérieures orientés vers la mécanique ou les probabilités, ou l'astronomie, ou le calcul numérique, ou l'algèbre, et choisis sur une liste fixée pour chaque Faculté des Sciences par arrêté du Ministre de l'Education Nationale, sur proposition de l'Assemblée de la Faculté et après avis du Conseil de l'Enseignement Supérieur.

VI. LA VIE DE L'ASSOCIATION

RÉUNION DU BUREAU

(22 mai 1958)

Présents : Mlles MARCHAND, MASSON ; MM. CLUZEL, CROZES, HUISMAN, ITARD, LEGRAND, MAGNIER, MONJALLON, NICOLAS, REVUZ.

1) Démission du Trésorier. — Notre collègue, LE MÉNAGER (Angers), pour des raisons de santé, est obligé de renoncer à ses fonctions de Trésorier. Le Bureau regrette cette décision, souhaite à notre collègue un prompt rétablissement, et demande à M. NICOLAS d'échanger ses fonctions de Trésorier-adjoint contre celles de Trésorier.

2) Projets de conférences. — Les conférences des années précédentes ont connu un vif succès, et le Bureau est heureux de remercier les éminents collègues qui ont bien voulu nous tenir au courant des Mathématiques modernes.

Il paraît donc souhaitable de reconduire le système des années passées. Cependant, pour renouveler l'intérêt général, il conviendrait peut-être d'aborder de nouveaux sujets.

Le Bureau souhaite donc que soit organisé un cycle de conférences 1958-59 portant sur le calcul des probabilités, la théorie des jeux, la recherche opérationnelle. M. REVUZ accepte de se charger de mettre sur pied ce nouveau cycle, et notamment de solliciter les conférenciers.

Il est admis, pour fixer les idées, qu'il y aura environ huit conférences, qu'elles commenceront vers le milieu de novembre, et se succéderont à des intervalles de trois semaines.

3) L'A.P.M. et l'Enseignement Technique. — On peut regretter que nos collègues de l'Enseignement Technique ne soient pas plus nombreux parmi les membres de l'Association. Il est vrai que, pour eux, la lecture du *Bulletin* n'est pas toujours très intéressante ; mais, d'autre part, le *Bulletin* ne pourra accorder à l'Enseignement Technique une place plus importante que lorsque nos adhérents seront plus nombreux dans cet ordre d'enseignement.

Pour essayer de rompre ce cercle vicieux, notre collègue CLUZEL propose de relever, dans le fichier ou dans la liste des votants à l'Assemblée générale, les noms des collègues du Technique et de leur demander des informations, des articles et des noms de collègues susceptibles d'entrer dans l'A.P.M.

4) Etude des suggestions exprimées à l'occasion de l'Assemblée générale. — Le dépouillement des bulletins de vote a permis de dégager quatre questions qui préoccupent particulièrement nos collègues :

a) *Le baccalauréat Sciences Expérimentales.* — La nature de l'épreuve écrite qui aura lieu à partir de 1959 n'est pas définitivement fixée. La suppression de la question de cours est admise, mais il reste à fixer la nature des questions posées. Mlle MASSON propose qu'une commission s'en occupe dès la rentrée d'octobre. Dès maintenant, une réunion restreinte aura lieu à ce sujet le 12 juin.

b) *Journées d'information.* — De nombreux collègues demandent que soient organisées en 1959 des journées d'information ; les thèmes suggérés sont très divers :

les notations modernes ; les applications concrètes à la physique, à la biologie, à la statistique ; les probabilités ; la liaison Mathématiques-Physique.

Le principe de ces journées peut être admis ; le siège le plus approprié paraît être Sèvres, en dépit de certains inconvénients ; parmi les dates possibles, celle de Pentecôte 1959 obtient la majorité des suffrages.

Reste l'essentiel, c'est-à-dire fixer le thème de ces journées. Il est décidé de procéder pour cela à une enquête supplémentaire.

c) Des informations sont souhaitées sur l'enseignement à l'étranger. Il en a déjà été donné, mais de manière assez irrégulière ; on s'efforcera donc de réunir la documentation nécessaire, notamment des sujets d'examen.

d) Les programmes des classes du premier cycle ont été étudiés précédemment ; il y aura lieu, dès la rentrée, de mettre à l'étude ceux du second cycle, notamment ceux des classes terminales.

(12 juin 1958)

Sont présents à cette réunion restreinte décidée par le Bureau pour étudier l'épreuve écrite de Mathématiques en Sciences Expérimentales : Mlles Aïtoff, Masson ; MM. Godefroy, Huisman.

Il est admis, dès l'abord, que la question de cours est à écarter ; on peut alors envisager plusieurs propositions :

a) un problème analogue à ceux qui se donnent actuellement à la première partie du baccalauréat ;

b) plusieurs questions indépendantes, simples, pour la rédaction desquelles on pourra se montrer exigeant. Les avis restent partagés sur un point : toutes les questions devront-elles être traitées, ou bien est-il préférable d'offrir au candidat le choix entre un certain nombre de ces questions (comme cela se fait actuellement pour la question de cours) ? Dans ce dernier cas, il conviendrait de spécifier que la résolution d'une question en sus du nombre fixé n'apportera aucune bonification de la note.

Cette dernière manière de concevoir l'épreuve écrite de Mathématiques est en usage dans nombre de pays étrangers, par exemple dans les pays scandinaves. Elle offre l'avantage de permettre une meilleure utilisation du programme entier, et elle est sans doute aussi plus à la portée du candidat moyen.

A titre d'exemples, les questions suivantes sont proposées :

1° trouver deux nombres, sachant que leur somme est 480 et leur P.G.C.D. 40 ;

2° montrer que l'expression : $A = \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ a une valeur indépendante de x. On pourra donner une solution géométrique :

3° résoudre l'équation : $\sin x + \sqrt{2}\cos x = 1$;

4° énoncer la troisième loi de Képler. Application : l'unité de distance étant le demi-grand axe de l'orbite terrestre, l'unité de temps, l'année sidérale, et sachant que la durée de révolution de Neptune sur son orbite est 164,76, calculer le demi-grand axe de cette orbite ;

5° on peut aussi s'inspirer de l'épreuve de Mathématiques du baccalauréat suédois, qui a été reproduite dans le n° 192 du *Bulletin*.

Les collègues que la question intéresse, sont instamment priés de communiquer leurs suggestions à :

Mlle Masson, 12, boulevard Desgrangegs, Sceaux (Seine).

N.-B. — Depuis cette réunion, nous avons consulté l'Inspection générale au sujet de cette épreuve de Sciences Expérimentales, M. l'Inspecteur général DONTOT a bien voulu nous adresser la réponse que voici :

Paris, le 24 juin 1958.

MONSIEUR LE PRÉSIDENT,

J'ai fait accepter par le Conseil de l'Enseignement du 9 janvier 1958 la rédaction suivante, concernant la composition de Mathématiques au baccalauréat de Sciences Expérimentales :

« La composition de Mathématiques ne comprendra pas de questions de cours indépendante ; elle consistera en une épreuve de caractère essentiellement pratique. »

Pour les détails, nous verrons en temps opportun à les préciser, bien entendu.
Croyez, Monsieur le Président, à mes sentiments les meilleurs.

P.-S. — *Au moment d'envoyer le texte à notre imprimeur, nous recevons de notre collègue* WALUSINSKI *d'autres exemples pour « Sciences Expérimentales », que nous donnons ci-dessous :*

Le sujet proposé ci-dessous, est conçu dans la perspective d'un baccalauréat de Sciences Expérimentales qui se voudrait conforme à son titre et qui serait donc un examen scientifique. D'autre part, la formule de l'épreuve est conforme au vœu présenté par ailleurs pour toutes les épreuves de Mathématiques au baccalauréat : plus de question de cours, des exercices distincts en nombre supérieur à celui qui est exigé pour la note maximum.

Ce texte est à l'image de compositions proposées dans une classe de Sciences Expérimentales il y a trois ou quatre ans ; il n'en mérite pas moins observations et critiques de la part des collègues, et c'est bien pour cela que je le propose à leur sagacité.

*
**

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Documents autorisés : table de logarithmes, règle à calcul (disque ou hélice) et table de valeurs naturelles des fonctions trigonométriques).

Pour obtenir la note maximum, le candidat devra traiter complètement quatre des six questions proposées qui sont indépendantes les unes des autres et qui seront chacune notées sur 5.

I. — Montrer que si deux nombres entiers ont le même reste lorsqu'on les divise par 7, leur différence est un multiple de 7.

Si le 1er janvier est un dimanche, par quel jour de la semaine se terminera le mois de janvier de la même année ? On justifiera sa réponse en s'appuyant sur la première propriété.

Par quel jour de la semaine commencera le 1er octobre de la même année ? (Ici, deux cas se présentent, pourquoi ?).

II. — Un vase a la forme d'une surface de révolution obtenue par rotation autour de Az de la courbe ABC : AB est l'arc de la parabole d'équation $z = x^2$ (pour $x \in [0 ; 1]$) ; le segment de droite BC a pour longueur $\sqrt{5}$. L'axe Az étant supposé vertical, le vase est ouvert vers le haut. On y verse de l'eau : évaluer le volume de l'eau en fonction de la cote z, de son niveau dans le vase.

(Cf. fig. 1).

III. — Montrer que l'expression $u = 3 - 4 \cos x + \cos 2x$ peut être mise sous forme monôme.

Utiliser cette nouvelle forme pour calculer la valeur de u correspondant à la valeur $x = 37°$.

Déterminer, s'il en existe, les valeurs $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; +\frac{3\pi}{4}\right]$ telles que

$$3 - 4\cos x + \cos 2x = 3{,}27.$$

IV. — On rappelle que pour tout satellite de la Terre, dont la période est T, a étant le demi-grand axe de son orbite, vérifie la relation (troisième loi de Képler)

$$a^3/T^2 = MG/4\pi^2$$

où M est la masse de la Terre et G la constante de la gravitation universelle

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-8} \text{ cgs.}$$

Calculer la masse de la Terre M en utilisant les données de Explorer III, puis de Spoutnik III :

Explorer III	T = 115,9 mn	$a = 7\,872$ km,
Spoutnik III	T = 105,8 mn	$a = 7\,613$ km.

V. — Etudier la fonction $x \in [-2\ ;\ +5] \rightsquigarrow y = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$

Construire le graphe en coordonnées orthonormées.

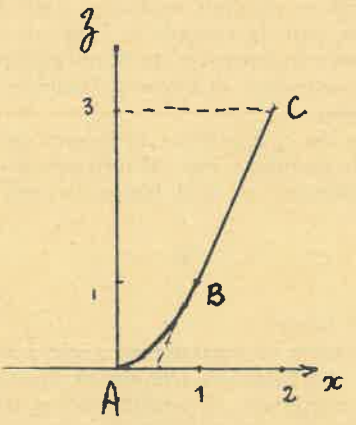


Fig. 1

Montrer que la tangente au graphe au point de coordonnées $x = 5$; $y = 5/3$ est coupée en deux segments égaux par le point de contact et les deux droites d'équation $x = -1$ et $y = x - 4$.

VI. — a/b désignant une fraction irréductible inférieure à l'unité, on désigne par q et c le quotient et le reste de la division de b par a. Vérifier

$$a/b = 1/q - c/bq.$$

En utilisant cette formule, montrer que la fraction 17/23 peut être mise sous la forme d'un développement archimédien alterné, c'est-à-dire sous la forme d'une somme algébrique aux signes + et — alternés de fractions de numérateurs tous égaux à 1

$$17/23 = 1/m - 1/p + 1/r - 1/s + \ldots$$

(le nombre des fractions archimédiennes est limité).

G. W.

Réunion du 19 juin 1958

Présents : Mlles MARCHAND, MASSON ; MM. EURIN, GUINIER (Physiciens), HUISMAN, MAGNIER, MONJALLON, NICOLAS, REVUZ.

Cette réunion inopinée avait pour objet le baccalauréat « Lettres modernes » pour lequel il est prévu une composition écrite de « sciences », sans autre précision.

L'utilité de cette section ne paraît pas contestable ; elle déboucherait sur les langues vivantes, les lettres modernes (C.A.P.E.S. et agrégation, lorsque celle-ci existera), les carrières commerciales. Elle serait sans doute choisie par nombre d'élèves issus des cours complémentaires.

Toutefois, il faut éviter qu'elle ne devienne le refuge des élèves médiocres de B. C'est pourquoi une épreuve scientifique paraît utile, et il est admis qu'elle devrait être mathématique, à l'exclusion de la physique.

Quant aux programmes, ce serait ceux de B, à condition qu'ils soient rénovés et conçus vraiment pour des littéraires ; ils ne doivent pas être un démarquage de programmes scientifiques plus complets.

On pourrait concevoir un écrit de quatre épreuves : une de français, deux de langues vivantes, et enfin une option entre une seconde épreuve littéraire et une de mathématique. Les coefficients de ces compositions seraient respectivement : 3, 2, 2, 2.

A l'oral, il y aurait une interrogation de physique affectée d'un coefficient décent ; pour ceux qui, à l'écrit, auraient choisi l'option littéraire, il y aurait une interrogation de Mathématiques, affectée du même coefficient que l'interrogation qu'elle remplacerait.

Il est signalé incidemment une objection formulée par l'Enseignement Supérieur et par l'Office du Baccalauréat : les sections sont déjà trop nombreuses, et leur multiplicité rend l'organisation de l'examen de plus en plus difficile.

Le bloc-notes de l'A.P.M.

★ Les écrits restent...

PUISSANCE ATOMIQUE ET ENSEIGNEMENT. — Extrait d'une dépêche de l'A.F.P. reproduite par la presse le 19 août 1958 ; il s'agit d'une interview du contre-amiral H.-C. RICKOVER, « père » des sous-marins atomiques, à Denver (Colorado). « *L'enseignement,* a-t-il dit, *est plus important que la puissance atomique, plus important que tout le reste.* » Il est vrai que le contre-amiral a ajouté : « *On a dit de moi que je n'étais pas à ce sujet* (il s'agit du système d'enseignement aux Etats-Unis) *un juge qualifié. Mais je puis parler en tant qu'utilisateur et dire que le produit qui nous est fourni aujourd'hui par nos collèges n'est pas de première qualité.* »

On a compris qu'il s'agissait ici de critiques au seul enseignement des Etats-Unis...

ASYMPTOTE, AXE, CADENCE ET FORCE MATHÉMATIQUE. — Extrait d'un livre de M. Edgar FAURE, ancien Président du Conseil, intitulé, « Le serpent et la tortue, les problèmes de la Chine populaire », p. 14 (il s'agit de l'éventualité d'une troisième voie, entre la dictature et la démocratie) : « *Peut-être y aura-t-il un jour, une troisième voie : cette éventualité ne peut être exclue, mais elle ne marquera son tracé divergent que lorsque l'asymptote aura d'abord pleinement rejoint la ligne d'axe dont elle se rapproche selon une cadence régulière et comme sous la détermination d'une force mathématique.* »

On comprend que la recherche d'une troisième voie ne soit pas simple.

REMETTRE LA LUNE A L'ENDROIT. — Extrait d'un article paru dans *L'Express* du 14-8-1958 et qui traitait du prochain essai d'envoi d'un satellite autour de la Lune : « *Un problème se pose cependant aux astronautes ; la carte astronomique de la Lune présente l'astre à l'envers, avec le pôle Sud en haut. Cela est le fruit d'une longue tradition justifiée par le fait que les lunettes astronomiques renversent les objets. Or, l'ère de la photographie est récente : très longtemps, l'astronome ne sut que dessiner des astres, comme il les voyait... c'est-à-dire à l'envers. L'astronautique doit, évidemment, rétablir l'image à l'endroit, car une trajectoire Terre-Lune doit regarder la position réelle de notre satellite.* »

Renversant !

★ A propos (encore !) de l'erreur au « bac ».

Les journaux ont mentionné, pendant les vacances, le cas d'une élève du Lycée Jeanne-d'Arc, de Nancy, qui a été reçue en Mathématiques Elémentaires avec la mention Très Bien, à l'âge de quinze ans. Elle a été seule, dans l'Académie, à résoudre le problème à erreur, en rétablissant l'énoncé exact et en donnant en outre une solution fondée sur l'énoncé fourni.

Nous devons signaler aussi la sympathique réaction d'une autre candidate (d'Orléans cette fois ; décidément...) qui, dès la fin de juin, écrivait :

« Si, tout d'abord, cette erreur m'a troublée, fait perdre dix minutes, je ne l'ai pas considérée comme une erreur, mais comme une chose curieuse, puisque la troisième question devenait la résolution d'une équation du premier degré à deux inconnues, ce qui ne correspondait pas à la question posée. Après vérification des calculs,

c'était une simple question de bon sens, a-t-il semblé à plusieurs d'entre nous, de signaler l'indétermination de l'équation et de la résoudre comme nous, nous l'avons appris, en donnant une valeur à l'une des inconnues. De plus, les autres parties du problème ne dépendaient pas, de toute évidence, de cette première partie.

Il est certain que nous manquons de scientifiques, mais ce n'est pas une raison pour abaisser le niveau du baccalauréat, bien au contraire. On aurait tout au plus pu noter la question de cours sur quinze et le problème sur quinze, ce qui serait déjà une faveur.

Le Ministère de l'Education Nationale pouvait peut-être attendre de voir, d'après les copies, dans quelle mesure les conséquences de cette erreur étaient catastrophiques, au lieu de chercher à calmer des parents soucieux d'avoir des enfants reçus plutôt que des bacheliers méritant de l'être. »

Et que dire de la réaction virulente d'un collègue philosophe :

« Il est inadmissible qu'on ne laisse pas aux correcteurs de Mathématiques — seuls véritablement compétents — le soin de tirer eux-mêmes les conclusions de cette prétendue erreur et de noter les copies comme ils l'entendent.

Il est inadmissible qu'à une époque où personne ne conteste plus la compétence politique des épiciers et des colonels, la presse et la radio mettent en doute systématiquement le sérieux et la valeur des épreuves universitaires... La philosophie des candidats au baccalauréat et de leurs parents est simple. Si l'élève est reçu, c'est grâce à son génie. S'il est « collé », c'est la faute des correcteurs, des professeurs. »

Pour terminer sur un ton plus austère, disons que, d'après le Ministère de l'Education Nationale, il y a eu cette année 48 % d'admis en Mathématiques Elémentaires et 49 % en Mathématiques Techniques ; ces pourcentages étaient, l'an dernier, respectivement 36 % et 37 %.

— La note sur les définitions surabondantes et non surabondantes, qui a paru dans le n° 192 du *Bulletin*, était due à Mme Motte, professeur au Collège classique de Toulon.

Printed in France

Le Gérant : G. Walusinski.

Cahors, Imp. A. Coueslant. — 93.168. — Dépôt légal : IV-1958

LIBRAIRIE ANDRÉ DESVIGNE - 17, r. Mulet, LYON

MATHÉMATIQUES - COLLECTION COMPLÈTE

Classes de PREMIERE :

Lespinard et Pernet. — ALGEBRE, **classe de Première C.M.** ..... Br. : **545 F** - cart. : **655 F**
» — GEOMETRIE, **classe de Première C.M.** ..... Br. : **600 F** - cart. : **730 F**
» — MATHEMATIQUES, **classe de Première A.B.** .. Br. : **585 F** - cart. : **705 F**
» — SOLUTIONS DE PROBLEMES DE MATHEMATIQUES, Bac, 1re partie, séries C. et M. ..... **330 F**

Classes de SECONDE :

Lespinard et Pernet. — ALGEBRE, **classe de Seconde C.M.** ..... Br. : **410 F** - cart. : **560 F**
» — GEOMETRIE, **classe de Seconde C.M.** ..... Br. : **575 F** - cart. : **695 F**
» — MATHEMATIQUES, **classe de Seconde A.B.** Algèbre et Géométrie : 1 volume ..... Br. : **535 F** - cart : **655 F**

COURS COMPLET DU 1er CYCLE

Edition Lycées et Collèges

PROGRAMMES AOUT 1957

NOUVEAUTÉS

Lespinard et Pernet. — **MATHEMATIQUES, TRAVAUX PRATIQUES, NOTIONS D'ASTRONOMIE** *(illustrations en couleurs)*
Classe de SIXIEME ..... Br. : **515 F** - cart. : **660 F**
» — **MATHEMATIQUES, NOTIONS D'ASTRONOMIE** *(illustrations en couleurs)*
Classe de CINQUIEME ..... Br. : **645 F** - cart. : **795 F**

PROGRAMMES SEPTEMBRE 1958

Lespinard et Pernet. — **MATHEMATIQUES,**
Classe de QUATRIEME ..... Br. : - cart. :
» — **MATHEMATIQUES,**
Classe de TROISIEME ..... Br. : - cart. :

Classe de SCIENCES EXPERIMENTALES :

Lespinard, Pernet et Gauzit. — MATHEMATIQUES (Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie, Mécanique et Cosmographie ..... Br. : **830 F** - cart. : **930 F**
Edition 1958, refondue.

Classe de PHILOSOPHIE :

Lespinard, Pernet et Gauzit. — ALGEBRE ET COSMOGRAPHIE ..... Br. : **420 F** - cart. : **550 F**
Edition 1958, refondue.

Classe de MATHEMATIQUES :

Lespinard et Pernet. — GEOMETRIE ..... Br. : **795 F** - cart. : **975 F**
» — GEOMETRIE DESCRIPTIVE. Edit. 1957 refondue Br. : **395 F** - cart. : **540 F**
» — ARITHMETIQUE ..... Br. : **345 F** - cart. : **490 F**
» — MECANIQUE. Edition 1958 refondue ..... Br. : - cart. :
Lespinard, Pernet et Gauzit. — COSMOGRAPHIE Edit. 1958 refondue Br. : **335 F** - cart. : **490 F**
Lespinard et Pernet. — ALGEBRE ..... Br. : **605 F** - cart. : **765 F**
» — TRIGONOMETRIE ..... Br. : **380 F** - cart. : **475 F**
» — SOLUTIONS DE PROBLEMES DE MATHEMATIQUES, Bac. **2e partie, cl. de Mathématiques** ..... **400 F**

Prix taxe locale incluse

Les ouvrages de MATHÉMATIQUES les plus répandus

C. LEBOSSÉ et C. HÉMERY
Agrégés de Mathématiques

COURS DE MATHEMATIQUES

NOUVEAUX PROGRAMMES :

ARITHMÉTIQUE ET TRAVAUX PRATIQUES

CLASSE DE SIXIEME

Tout en conservant sa présentation antérieure, l'ouvrage a été profondément remanié dans l'esprit des programmes actuels. Les notions nouvelles ont permis de varier et d'augmenter considérablement le nombre des exercices proposés. Chaque leçon est d'autre part accompagnée d'un choix de travaux pratiques en plus de ceux qui pourront être puisés dans la partie « Dessin géométrique ».

■ **Un volume cartonné (vert)** ..... **460 F**

ARITHMÉTIQUE ET GÉOMÉTRIE

CLASSE DE CINQUIEME

La partie arithmétique suit l'ordre du nouveau programme avec l'étude des nombres entiers, des fractions et l'application à la résolution littérale des problèmes. Des planches de dessin géométrique et des notions d'Astronomie complètent l'ouvrage en vue des séances de travaux pratiques.

■ **Un volume cartonné (vert)** ..... **490 F**

TRAVAUX PRATIQUES D'ARITHMÉTIQUE ET D'ASTRONOMIE

■ **Ce fascicule complémentaire est destiné à la mise à jour du manuel de 6e de la précédente édition (Lycées et Collèges) (gris)** ..... **130 F**

TRAVAUX PRATIQUES D'ARITHMÉTIQUE

■ **Fascicule destiné à la mise à jour du manuel de 6e de la précédente édition pour les Cours complémentaires (rose)** ..... **85 F**

FERNAND NATHAN-ÉDITEUR

Vient de paraître :

EXERCICES D'ANALYSE

★

TOME I

★

par

J. RIVAUD

Agrégé des Sciences mathématiques
Docteur ès Sciences
Professeur de Mathématiques supérieures
au lycée Janson-de-Sailly

★

Ce volume, à l'usage des élèves des classes préparatoires aux concours d'entrée aux grandes Ecoles et des étudiants des Facultés, est le premier d'une série qui comprendra, outre des exercices d'Analyse (3 tomes), des exercices d'Algèbre (1 tome), de Géométrie (2 tomes) et de Mécanique (1 tome).

★

Volume 16 × 24 cm. de VIII-216 pages ..... **2 200 F**

VUIBERT **63, Bd SAINT-GERMAIN, 63, PARIS V°**

A paraître en novembre 1958

PROBABILITÉS, STATISTIQUE, RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Collection dirigée par G. DARMOIS, Membre de l'Institut

Section B. — STATISTIQUE MATHÉMATIQUE

ANALYSE DE VARIANCE ET PLANS D'EXPÉRIENCE

D. DUGUÉ PAR **M. GIRAULT**

Professeur à la Sorbonne — Professeur à l'Institut de Statistique

96 pages 14 × 22, avec figures. Broché

RAPPEL :

Section A. — THÉORIE DES PROBABILITÉS

ENSEMBLES MESURABLES ET PROBABILISABLES

La mesure des ensembles linéaires. La raréfaction des ensembles de mesure nulle

XII-94 pages 14 × 22, avec 41 figures, 1958. Broché ..... **850 F**

En librairie et chez

92, Rue Bonaparte DUNOD Editeur, PARIS (6e)

DELAGRAVE

Les Mathématiques de l'enseignement technique

R. CLUZEL et J.-P. ROBERT

Vient de paraître :

MATHÉMATIQUES, cl. de 3e

Un vol. 15,5 × 22. Br. ..... **1.030 F** Cart. ..... **1.180 F**

Rappel : **MATHÉMATIQUES, cl. de 4e**

Un vol. 15,5 × 22. Br. ..... **660 F** Cart. ..... **790 F**

ARITHMÉTIQUE ET GÉOMÉTRIE, cl. de 5e

Un vol. 15,5 × 22. Br. ..... **510 F** Cart. ..... **620 F**

ARITHMÉTIQUE, cl. de 6e, par R. CLUZEL

Un vol. 14,5 × 20. Br. ..... **310 F** Cart. ..... **410 F**

Nouveauté :

L O G

Nouvelles tables de logarithmes décimaux des nombres entiers ou fractionnaires et des rapports trigonométriques

Par A. CHEVALIER et R. CLUZEL. Un vol. 16 × 25. Br. **640 F** Cart. **790 F**

Vient de paraître :

C. GATTEGNO, W. SERVAIS, E. CASTELNUOVO, J.-L. NICOLET, T. J. FLETCHER
L. MOTARD, L. CAMPEDELLI, A. BIGUENET, W. J. PESKETT, P. PUIG ADAM

LE MATÉRIEL POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Un volume in-8° de 208 pages ..... 1.650 F

Publié sous les auspices de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'Enseignement des mathématiques

★ ★ ★

Ce livre, le deuxième que publie cette Commission, apporte des informations devenues nécessaires et qui ne manqueront pas d'influencer favorablement l'enseignement secondaire. Les auteurs des différents chapitres pensent et écrivent en praticiens préoccupés avant tout par les besoins des élèves.

La première partie du livre combat le préjugé de l'abstraction à outrance et expose les raisons d'introduire un matériel concret ou semi-concret.

La deuxième partie est consacrée au film mathématique.

La troisième partie traite des modèles mathématiques.

Ce livre, si riche et si utile, devrait donc être entre les mains de tout professeur de mathématiques et figurer dans chaque bibliothèque spécialisée.

★ ★ ★

Publié précédemment par

la Commission pour l'étude et l'amélioration
de l'enseignement des mathématiques :

J. PIAGET, E. W. BETH, J. DIEUDONNÉ, A. LICHNEROWICZ
G. CHOQUET, C. GATTEGNO

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Un volume in-8° de 176 pages ..... 1.200 F

Éditions **DELACHAUX & NIESTLE**

32, rue de Grenelle - PARIS, VII°

A. COLIN A. COLIN A. COLIN A. COLIN A. COLIN

Une révolution dans l'enseignement des mathématiques

MATÉRIEL COLLECTIF
d'enseignement des Mathématiques

TRAVAUX PRATIQUES

par

J. MARVILLET, Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure.
R. GIRARD, Agrégé de Mathématiques, Professeur au Lycée J.-B. Say.
A. ADAM, Inspecteur de l'Enseignement Primaire de la Seine.

Un matériel en matière plastique de grandes dimensions pour l'enseignement collectif de la géométrie au Cours Moyen, à la C.F.E.P. et en classe de Sixième des C.C.
Des modèles préfabriqués. Des tableaux de démonstration. Des sphères noires et transparentes. Des plans mobiles. Des appareils de mesure simples.
Les angles. Les surfaces planes. Le cercle et les arcs de cercle. Les solides usuels et leurs développements. La sphère. La longitude et la latitude. Les masses spécifiques.

EN VENTE, par série complète,
par chapitre,
par article.

Envoi sur demande de la notice pédagogique (21 × 27), avec 90 photographies. Modèles déposés.
en co-édition avec M. PIERRON, Sarreguemines.
Recommandé par l'Institut Pédagogique National.

Rappel :

COURS DE MATHEMATIQUES J. MARVILLET
Initiation aux Mathématiques - 6e **R. GIRARD - P.-M. FOURNIER**

A. COLIN A. COLIN A. COLIN **A. COLIN**

GAUTHIER-VILLARS

55, Quai des Gds-Augustins

PARIS VIe — DANton 05-10

J. DIXMIER

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

LES ALGEBRES D'OPERATEURS DANS L'ESPACE HILBERTIEN

(Algèbre de Von Neumann). In-8° (16-25), VI-367 pages, 1957 .... 5 500 F

Henri LEBESGUE

SUR LA MESURE DES GRANDEURS

In-8° (16-25), 188 pages, 1956 ..... 1 600 F

G. POLYA

Professeur honoraire à l'Ecole Polytechnique de Zurich

LES MATHEMATIQUES ET LE RAISONNEMENT « PLAUSIBLE »

Préface de L. COUFFIGNAL, traduit par R. VALLEE. In-8° (16-25), XV-300 pages, nombreuses figures, 1958 ; relié toile ..... 3 200 F

Extrait de l'Education Nationale du 9 octobre 1958, n° 25 :

.....

« La lecture de ce livre paraît profitable à tout mathématicien et particulièrement aux pédagogues. Il ne requiert que des connaissances élémentaires, mais mène le lecteur par voie inductive aux portes de la recherche mathématique. Les professeurs de mathématiques de tous les ordres d'enseignement, et nombre de leurs élèves, feront un chaleureux accueil à ce livre.

R. RISSER et C.-E. TRAYNARD

LES PRINCIPES DE LA STATISTIQUE DES MATHEMATIQUES

In-8° (16-25) :

Livre I : Séries Mathématiques, 2e édition revue et augmentée, XVI-195 pages, 1957 ..... 3 500 F

Livre II : Corrélations. Séries chronologiques, 2e édition revue et augmentée, XI-418 pages, 11 figures, 1957 ..... 7 000 F

MASSON & Cie, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6e

NOUVEAUTES :

COURS DE MATHÉMATIQUES G. CAGNAC ET L. THIBERGE

PROGRAMMES 1957

ARITHMÉTIQUE

CLASSE DE 6e

Nouvelle édition, entièrement refondue

par

L. THIBERGE
Inspecteur général
de l'Education Nationale

E. GILET
Censeur des Etudes
du Lycée J.-B.-Say

Un volume avec nombreuses figures, exercices, problèmes et **Travaux Pratiques**, cartonné ..... **980 F**

GÉOMÉTRIE
ET
ARITHMÉTIQUE

CLASSE DE 5e

Nouvelle édition, entièrement refondue

par

L. THIBERGE **E. GILET**

Un volume avec nombreuses figures, exercices et problèmes, cart. .... **1 050 F**

ENSEIGNEMENT MODERNE DES MATHÉMATIQUES

COLLECTION C. BREARD

conforme aux programmes de 1957 et 1958

CLASSE DE MISE AU POINT ET D'INITIATION (Cl. de 6e).

En sixième on vise à compléter et préciser les connaissances acquises dans les classes précédentes, à développer le programme en le considérant comme **une base de départ** pour les études des classes suivantes.

On a introduit un cours complet de **calcul mental** (avec de nombreux rappels sur les fractions) et une **initiation manuelle à la Géométrie.** (Utilisation de la règle, du compas, du rapporteur).

En préparation : **Cahier de cosmographie** (paraîtra en février 1959).

CLASSES D'ETUDE CONCRÈTE DE L'ARITHMÉTIQUE, DE L'ALGÈBRE ET DE LA GÉOMÉTRIE (Cl. de 5e, 4e, 3e).

A la fin de la sixième, l'élève est prêt à commencer l'étude de l'Arithmétique, de l'Algèbre et de la Géométrie.

Arithmétique et Algèbre. — Il s'agit d'un premier contact avec la théorie des nombres. L'exposé reste concret ; à partir du dénombrement d'un ensemble discret, de la mesure des segments et de notions sur les vecteurs, se développe l'étude des **nombres entiers,** des **fractions,** des **nombres relatifs,** puis l'étude des **fonctions** (monômes et polynômes) et des **équations.**

Les notions de **correspondance** et d'**application** sont mises en évidence.

Géométrie. — L'exposé comporte de nombreuses nouveautés. Le **parallélisme précède l'orthogonalité,** comme la géométrie affine précède la géométrie métrique.

La notion de **symétrie** est très largement utilisée ; les élèves comprennent très facilement les démonstrations par symétrie. Enfin les **vecteurs** sont aussi très utilisés ; les démonstrations données sont des **initiations au calcul vectoriel.**

Dans chacun des manuels, près de **2.000 exercices et problèmes,** soigneusement classés, sont proposés aux élèves.

CLASSES D'INITIATION AUX MATHÉMATIQUES MODERNES (Cl. de 2e et 1re).

Le manuel de Seconde comprend un **exposé abstrait et concret** de la notion de nombres, de l'Algèbre et de la Géométrie plane. Cette présentation nouvelle surprendra par sa simplicité. Plus de 2.500 exercices et problèmes sont proposés aux élèves.

Le manuel de Seconde paraîtra en avril 1959 ; celui de Première est en préparation.

MATHEMATIQUES, classe de 6e	**430 F**
ARITHMETIQUE-ALGEBRE, classes de 5e, 4e, 3e	**620 F**
GEOMETRIE, classes de 5e, 4e, 3e	**690 F**

Pour chacun de ces trois ouvrages, il existe un livre de corrigés, hors commerce, strictement réservé à MM. les Professeurs de Mathématiques.

C'EST UNE COLLECTION DE L'ECOLE

11, Rue de Sèvres, PARIS

MAISON D'EDITIONS AD. WESMAEL-CHARLIER, S.A.
NAMUR (Belgique)

Correspondant en France :

Éditions WESMAEL-CHARLIER

Capital : 3.500.000 F — S.A.R.L. — R.C. Seine 57.B.8613

30, rue de Gramont

PARIS 2e

Extrait du

Catalogue général

Collection HERBIET

Leçons de Trigonométrie
118 pages, 74 figures

Trigonométrie Rectiligne
246 pages, 123 figures

Trigonométrie Sphérique
56 pages, 33 figures

Exercices de Trigonométrie
752 pages, 327 figures

Dernière nouveauté

COURS DE MATHÉMATIQUES

par R. MAILLARD

Inspecteur général de l'instruction publique

Un cours nouveau, conforme aux derniers programmes, et qui se propose de renouveler la matière traditionnellement offerte.

Chaque ouvrage se recommande par des sujets de travaux pratiques, des problèmes intéressant les élèves par l'actualité des sujets, une belle typographie.

Classe de 6e, par R. CAHEN

Professeur au collège Chaptal

Classe de 5e, classe de 4e. . . (en préparation)

CLASSIQUES HACHETTE

79, bd Saint-Germain,
PARIS (6e)

EDITIONS DIDIER & RICHARD

GRENOBLE (Isère)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU

Professeurs au Lycée de Grenoble

PROGRAMMES DU 18 AVRIL 1947

TARIF JUIN 1958

	Taxe locale comprise
ARITHMÉTIQUE 6e *(Jusqu'à épuisement)*	**224 F**
ARITHMÉTIQUE 6e — Nouvelle édition mise à jour	**336 »**
Corrigé des exercices de 6e (correspondant à l'ancienne édition)	**305 »**
DESSIN GÉOMÉTRIQUE 6e et 5e	**188 »**
GEOMÉTRIE 5e et 4e	**545 »**
ARITHMÉTIQUE 5e *(jusqu'à épuisement)*	**356 »**
ARITHMÉTIQUE 5e. — Nouvelle édition mise à jour	**458 »**
Corrigé des exercices de 5e (correspondant à l'ancienne édition)	**305 »**
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 4e	**336 »**
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 3e	**432 »**
GÉOMÉTRIE 3e	**387 »**
GÉOMÉTRIE 5e, 4e, 3e	**895 »**
(pour les Lycées, Collèges et Cours Complémentaires. Fort volume de 420 pages **cartonné**).	
COMPLÉMENTS d'ALGÈBRE et de GÉOMÉTRIE 3e MODERNE COURT.	**102 »**
ALGÈBRE 2e A.B.C.M.	**560 »**
GÉOMÉTRIE 2e A.B.C.M.	**550 »**
ALGÈBRE 1re A.B.	**295 »**
ALGÈBRE et TRIGONOMÉTRIE 1re C.M.	**560 »**
GÉOMÉTRIE 1re A.B.C.M.	**509 »**

POUR LES EXAMENS :

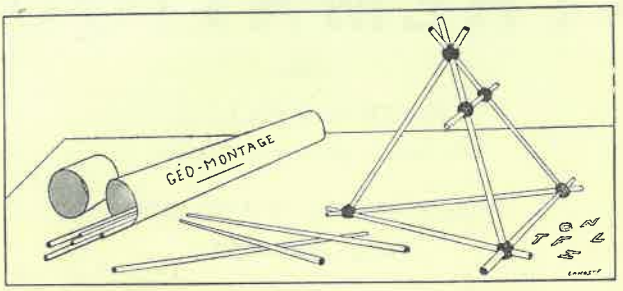
QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT, 1re partie, A.B.C.M.	**427 »**
LES MATHÉMATIQUES AU B.E.P.C., 156 PAGES, NOMBREUX CLICHÉS	**458 »**

Enseignement Audio-Visuel

GEO-MONTAGE

*49, Bd Diderot - Paris XIIe*

Géométrie dans l'espace, classe de 3e, 1re et m.-el.



Construction rapide d'une figure à 3 dimensions

procédé recommandé par le Ministère de l'Education Nationale
sous le n° M 57.543

PRENEZ LA COMMANDE DE VOS ÉLÈVES

en nous indiquant :

NOM — Professeur ou élève (1)

ADRESSE

Nombre de GEO-MONTAGES désirés

Prix unitaire :

- *Soit 650 F à la commande.*
- *Soit 750 F contre remboursement.*

(Réduction de 10 % pour classe entière : 15 unités minimum)

Mode de règlement choisi (1) :

- Virement postal au C.C.P. n° 14868.23.
- Chèque bancaire à GEO-MONTAGE.
- Contre remboursement.

(1) Rayer les mentions inutiles.