GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Examen de fin d'études secondaires (Juin 1956)

Dans les Lycées classiques de garçons du Grand-Duché, il y a trois examens différents :

I) les sections gréco-latine et latine A composent en algèbre et géométrie (coefficient 2) et en trigonométrie (coefficient 1) ;

II) les élèves de la section latine C (sciences naturelles) ont à faire, en dehors des compositions précédentes, une composition de calcul différentiel et intégral et une composition de géométrie analytique ;

III) ceux de la section latine B (Mathématiques Spéciales) composent :

1) en calcul différentiel et intégral ;
2) en géométrie analytique ;
3) en compléments de géométrie.

Les questions pour cette section sont toutes distinctes de celles des autres sections latines.

I. — Mathématiques générales (durée : 4 heures)

Questions communes aux sections latin-grec, latine A et latine C

Algèbre et géométrie (durée : 2 h 40 m).

1) Trouver les dérivées de :

$y = \dfrac{x(1 + x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}$ (7 points) $\qquad y = \dfrac{\operatorname{cotg} x \sin x}{\sqrt{2\cos^2 x - \sin^2 x}}$ (7 points)

2) Intégrer :

$$\int \left(\sqrt[6]{x} - 2\sqrt{x^3}\right)^2 \sqrt[3]{x}\, dx \quad (7 \text{ points}) ; \qquad \int \left(\frac{1}{\cos x} - tg\, x\right)^2 dx \quad (7 \text{ points})$$

3) Etudier les variations de la fonction $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1}$ (10 points)

4) Etudier les variations de la surface totale du cône droit circonscrit à une sphère, (8 points)

5) Trouver l'aire comprise entre la courbe $y^2 = 4x$ et la bissectrice du premier quadrant. (8 points)

Trigonométrie (durée : 1 h 20 m).

1) Rendre calculable par logarithmes :

$$\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c,$$

sachant que $a + b + c = 90°$. (6 points)

Réduire à sa plus simple expression :

$$1 - \frac{1}{tg\, a} + \frac{2}{tg\, 2a}$$

Trouver, sans tables, la valeur du résultat si $a = 15°$. (12 points)

2) Résoudre l'équation :

$$4 \sin^3 x + \cos x \sin 2x - 6 \sin^2 x \cos x = 0. \quad (18 \text{ points})$$

3) Un avion avance horizontalement dans un même plan vertical avec deux tours distantes l'une de l'autre de 5 km. De l'avion, on voit, à un certain moment, les pieds de ces deux tours sous les angles d'inclinaison de 30°18′ et 41°25′. Quelle est alors la distance de l'avion à la tour la plus proche ? Après combien de temps survolera-t-il cette tour, si la vitesse de l'avion est de 400 km/h ? (18 points)

II. — Compléments de Mathématiques

(Sous-section latine C, durée : 2 heures)

Calcul différentiel et intégral (durée : 1 heure).

1) Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$y = \text{Log} \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} ; \qquad y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} ; \qquad y = \text{Log} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$$

2) Intégrer :

$$\int \frac{(2x - 1)\, dx}{(x - 1)(x - 2)} ; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx ; \qquad \int x^2 e^{ax}\, dx \quad (9 \text{ points par question})$$

Géométrie analytique (durée : 1 heure).

1) Trouver les points où la droite $y = 7x$ coupe le cercle :

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0.$$

Etablir les équations des tangentes en ces points. Calculer leur point d'intersection ainsi que l'angle qu'elles forment.

2) On donne l'ellipse : $16\, x^2 + 25\, y^2 = 400$. Trouver l'équation de la tangente au point P $(0, y < 0)$. Trouver ensuite les équations des tangentes à l'ellipse qui sont

parallèles à la droite $3x - 2y - 6 = 0$ et calculer les coordonnées des points d'intersection de ces tangentes avec la précédente.

3) Indiquer le genre de la conique : $3x^2 - 8xy + 4y^2 + 6x - 4y + 1 = 0$. Trouver les équations des asymptotes éventuelles et construire la courbe.

(18 points par question)

III. — Mathématiques spéciales

(Sous-section latine B, durée : 7 heures)

Algèbre, calcul différentiel et intégral (3 heures).

1) Etudier, au point de vue de la convergence, les séries suivantes :

a) $\frac{1}{1,2} + \frac{3}{2,3} + \frac{3^2}{3,4} + \frac{3^3}{4,5} + \ldots$ (4 points)

b) $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$ (4 points)

2) Calculer la dérivée de la fonction :

$$y = \arccos \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$ (5 points)

3) Trouver la limite de $\frac{(x - \sin x)^2}{(1 - \cos x)^3}$ pour $x = 0$. (5 points)

4) Etudier les variations de la fonction :

$$y = \frac{3x^2 - 4}{(x-2)^2 (x+1)}$$

et construire la courbe. (9 points)

5) Une lampe électrique doit être suspendue au-dessus du centre d'une pelouse circulaire de 100 m de diamètre. En supposant que l'intensité de la lumière varie en raison directe du cosinus de l'angle d'incidence et en raison inverse du carré de la distance, on demande à quelle hauteur doit être suspendue la lampe pour que le bord de la pelouse soit éclairé le mieux possible. (9 points)

6) Calculer $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3 + x^2}$ (9 points)

7) Trouver le volume du tore engendré par la révolution du cercle

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2$$

autour de l'axe des x. On suppose $b > a$ (9 points)

Géométrie analytique (2 heures).

1) Déterminer la nature et construire la conique $\rho = 1 - 2\cos\omega$ trouver l'excentricité et la distance du foyer à la directrice. (9 points)

2) Trouver l'équation du cercle inscrit au triangle formé par l'axe des x et les droites : $y = \frac{3x}{4} + 3$ et $5x + 12y = 100$; construire. (11 points)

3) Calculer la distance du centre de la conique : $x^2 + 4xy + 6x + 8 = 0$ à la tangente au point de la courbe qui a pour abscisse -2. (11 points).

4) Réduire à ses axes, puis construire la courbe :

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 26x - 22y + 29 = 0.$$ (16 points)

5) Trouver l'équation du diamètre de la parabole $y^2 = 18x$ qui est conjugué aux cordes formant l'angle de 45° avec l'axe des x positifs. Trouver l'équation de la normale menée par le point d'intersection de ce diamètre et de la courbe. (7 points)

Compléments de géométrie (2 heures).

1) Construire un triangle équilatéral ayant ses sommets sur trois circonférences concentriques de rayons a, b, c ($a < b < c$). (10 points)

2) Démontrer que le produit de deux homothéties est une homothétie, et que les centres d'homothétie sont en ligne droite.

Démontrer que ce produit n'est pas commutatif.

Application : démontrer que le centre de gravité G d'un triangle, son orthocentre H et le centre du cercle circonscrit sont en ligne droite (droite d'Euler) et que l'on a : $\overrightarrow{HG} = 2\,\overrightarrow{GO}$.

3) *a*) Définir le faisceau harmonique.

b) Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un faisceau soit harmonique est que la parallèle à l'un des rayons soit divisée en deux parties égales par les trois autres rayons.

c) Démontrer que si deux rayons conjugués d'un faisceau harmonique sont perpendiculaires, ils sont les bissectrices des angles formés par les deux autres rayons.

4) Construire un cercle tangent à une droite donnée D_1 et tel que la polaire d'un point donné P par rapport à ce cercle soit une droite donnée D_2. (12 points)

(De *Mathematica et Pædagogia*, 5e année, n° 13).