III. ESSAI

DÉPLACEMENTS ET ORIENTATIONS EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Introduction. — La figure (F) est ma chaise, posée normalement sur ses quatre pieds, la figure (F') est une chaise égale empruntée à une salle voisine et couchée sur la table qui me sert de pupitre. Les élèves savent très bien dire où se trouve dans (F') l'homologue M' d'un point M quelconque « appartenant » à la figure (F) ; nous avons une transformation ponctuelle. Une troisième chaise permet de définir le produit de deux déplacements (elle est seulement imaginée) ; le « passage » de (F) à (F'), puis de (F') à (F) nous donne la transformation identique comme produit des deux transformations inverses. Le point M de la salle, je peux comme ci-dessus l'attribuer à (F), mais aussi à (F'), il est alors l'homologue d'un point N de (F).

Homologue d'une droite. — Une droite D quelconque de (F) a pour homologue une droite D' de (F'). Je dessine sur le tableau les droites D et D', je marque un point A de D et je suppose que je connais son homologue A' ; je marque ensuite un autre point M de D et je me propose de construire M'. Je connais la longueur $A'M' = AM$ (je ne dis pas la mesure) ; c'est à partir du point A' que je dois porter ma longueur : les deux points A' et M' ne jouent pas le même rôle. Je suis amené à ordonner (ou à orienter) mon segment ; je représenterai le segment orienté par le symbole $\overline{A'M'}$ (pas question ici non plus de mesure algébrique). Reste à savoir de quel côté il convient de porter mon segment orienté. La question serait résolue si je savais comment se correspondent les demi-droites d'origine A et A' ; mais cela ne me satisferait pas entièrement, car M peut avoir à jouer le rôle actuellement donné à A. Les élèves m'accordent volontiers que l'ensemble des segments orientés de D peut être partagé en deux classes : la classe de ceux qui ont « même sens » que la demi-droite $\overrightarrow{A\lambda}$ et celle de ceux qui ont le même sens que la demi-droite opposée $\overrightarrow{A\lambda_1}$; ils m'accordent aussi que si deux segments de D ont (ou n'ont pas), le même sens, il en est de même des segments orientés homologues. Nous allons *orienter* la droite D : orienter la droite c'est ordonner cet ensemble composé de deux éléments : nous dirons 1re classe et 2e classe. La 1re classe de $\overrightarrow{D'}$ sera constituée par les segments orientés homologues des segments de la 1re classe choisie sur $\overrightarrow{D}$. Pratiquement, pour orienter une droite, il suffira de se donner un segment orienté et de décréter qu'il appartient à la 1re classe (ou à la 2e).

Inversement, deux droites orientées $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D'}$, arbitraires, étant données, nous admettrons qu'il existe au moins un déplacement $\mathcal{D}$ par lequel A et D donnent A' et D' ; l'homologue M' du point M de D est alors obtenu par la construction indiquée.

Ce qui vient d'être dit vaut que les droites D et D' soient distinctes ou qu'elles soient confondues. Nous supposons maintenant qu'elles sont confondues. Deux cas possibles :

1er cas : La 1re classe de $\overrightarrow{D'}$ est aussi la 1re classe de D : les deux segments orientés homologues $\overline{AM}$ et $\overline{A'M'}$ ont même longueur et même sens, nous dirons qu'ils sont égaux et nous écrirons $\overline{AM} = \overline{A'M'}$ (définition de l'égalité de deux segments orientés portés par une même droite). Si deux segments orientés sont égaux leurs extrémités sont homologues dans un déplacement déterminé par leurs origines.

Nous appellerons déplacement direct sur la droite D la restriction à D du déplacement $\mathcal{D}$.

2e cas : La 1re classe de D' coïncide avec la 2e classe de D : les deux segments orientés $\overline{AM}$ et $\overline{M'A'}$ ont même longueur et appartiennent à la même classe ; nous avons donc $\overline{A'M'} = \overline{MA}$.

Nous dirons que la restriction à D du déplacement $\mathcal{D}$ est un déplacement indirect sur la droite D.

Etude du déplacement indirect sur une droite. — Soit un déplacement indirect sur une droite D déterminé par les deux points homologues A et A'. L'homologue d'un point M est M' tel que $\overline{A'M'} = \overline{MA}$, l'homologue de N est N' tel que $\overline{M'N'} = \overline{NM}$ et l'homologue de M', M'' tel que $\overline{M'M''} = \overline{M'M}$: M'' coïncide donc avec M. Le déplacement indirect sur la droite est une transformation ponctuelle réciproque.

D'ailleurs, si I est milieu de AA' (nous en admettons l'existence), $\overline{A'I} = \overline{IA}$ et I est invariant, le déplacement peut être déterminé par le seul point I. Il était évident (définition du déplacement indirect sur la droite : cas où les points homologues A et A' sont confondus) qu'une symétrie sur la droite était un déplacement indirect sur la droite ; nous venons de montrer que, inversement, un déplacement indirect sur une droite est toujours une symétrie sur la droite.

Applications. — I. Donnons-nous sur une droite deux segments orientés égaux $\overline{AM} = \overline{M'A'}$. Il existe un déplacement indirect unique déterminé par les points homologues A et A'. Par ce déplacement, l'homologue de M est M', le déplacement étant réciproque, nous avons aussi $\overline{AM'} = \overline{MA'}$.

Théorème : Dans une égalité entre segments orientés on peut permuter les moyens (et aussi les extrêmes).

II. — Soit un déplacement direct sur une droite déterminée par les points homologues A et A'. L'homologue d'un point M quelconque est un point M' tel que $\overline{A'M'} = \overline{AM}$. Changeons l'ordre des extrêmes dans cette égalité. Il vient :

$$\overline{MM'} = \overline{AA'}.$$

Théorème : Dans un déplacement direct sur une droite, le segment orienté qui a pour origine un point quelconque et pour extrémité son homologue, est égal à un segment orienté fixe, et, inversement, une transformation ponctuelle définie ainsi sur une droite est un déplacement direct sur la droite.

III. — Soient deux segments orientés $\overline{IL}$ et $\overline{KH}$ portés par une droite D, nous appelons somme des deux segments orientés, que nous notons $\overline{IL} + \overline{KH}$, le segment orienté construit de la façon suivante : nous marquons un point A sur la droite et nous construisons $\overline{AM} = \overline{IL}$, puis $\overline{MA'} = \overline{KH}$; par définition $\overline{IL} + \overline{KH} = \overline{AA'}$.

a) Utilisons le déplacement indirect sur D déterminé par A et A' ; soit M' l'homologue de M : $\overline{AM'} = \overline{MA'} = \overline{KH}$; $\overline{M'A'} = \overline{AM} = \overline{IL}$, donc :

$$\overline{KH} + \overline{IL} = \overline{IL} + \overline{KH}.$$

Notre somme est commutative.

b) La même construction, à partir d'un autre point A_1, donne un point A'_1. Le déplacement direct sur D, déterminé par A et A_1, transforme A' en A'_1, donc $\overline{A_1A'_1} = \overline{AA'}$.

Remarque. — Lorsque les droites D et D′ seront distinctes, nous pourrons encore convenir d'écrire $\overline{AM} = \overline{A'M'}$ en « complétant » l'égalité entre D et D′ avec l'égalité sur D et l'égalité sur D′ des segments orientés.

Homologue d'un plan. — Un plan quelconque de (F) a pour homologue un plan P′ de (F′). Je figure sur le tableau les plans P et P′, une droite D de P orientée par une demi-droite $\overrightarrow{A\lambda}$, la droite homologue D′ de P′ orientée par la demi-droite $\overrightarrow{A'\lambda'}$ homologue de $\overrightarrow{A\lambda}$. Je sais construire les homologues des points de D. Soit maintenant un point M de P non situé sur D : je connais l'angle $\widehat{\lambda' A' \mu'} = \widehat{\lambda A \mu}$ et la longueur $A'M' = AM$ ($\overrightarrow{A'\mu'}$ et $\overrightarrow{A\mu}$ sont les demi-droites déterminées par $\overline{AM}$ et $\overline{A'M'}$). Ici, je reprends mot pour mot ce qui a été dit pour les droites, substituant aux points les demi-droites. J'introduis les angles orientés que je représente par le symbole $(\overrightarrow{A\lambda}, \overrightarrow{A\mu})$ et j'admets que, outre les deux classes singulières des angles nuls et des angles plats, l'ensemble des angles orientés de P peut être partagé en deux classes...

Je conclus comme pour la droite : inversement, deux plans orientés P et P′ étant donnés et deux demi-droites $\overrightarrow{A\lambda}$ et $\overrightarrow{A'\lambda'}$ appartenant à ces plans, nous admettons qu'il existe un déplacement $\mathcal{D}$ par lequel $\overrightarrow{A\lambda}$ et P ont pour homologues $\overrightarrow{A'\lambda'}$ et P′, la construction de l'homologue M′ d'un point M de P est alors celle qui a été indiquée.

Si les plans P et P′ sont confondus, la considération des deux classes de P permet de définir le déplacement direct sur le plan et l'égalité de deux angles orientés ainsi que le déplacement indirect du plan. Un déplacement direct (ou indirect) du plan est déterminé par la donnée de deux demi-droites homologues $\overrightarrow{A\lambda}$ et $\overrightarrow{A'\lambda'}$. Nous commençons par l'étude du déplacement indirect dans le cas particulier où A et A′ sont confondus.

Comme pour la droite, étant donné un déplacement indirect déterminé par les demi-droites homologues $\overrightarrow{O\lambda}$ et $\overrightarrow{O\lambda'}$, l'homologue $\overrightarrow{O\mu''}$ de la demi-droite $\overrightarrow{O\mu'}$, homologue de $\overrightarrow{O\mu}$, est $\overrightarrow{O\mu}$: on en déduit aussitôt que la transformation envisagée est réciproque. Soit alors un point B de P, son homologue B′, l'homologue de BB′ est la droite B′B, la droite BB′ est invariante et la restriction de $\mathcal{D}$ à cette droite est un déplacement indirect sur cette droite ; le milieu I de BB′ est donc invariant et la restriction de $\mathcal{D}$ à la droite OI est la transformation identique. La restriction de $\mathcal{D}$ au plan P peut être déterminée par la seule droite OI, ou, si l'on veut, par deux demi-droites homologues confondues $\overrightarrow{Sx}$, $\overrightarrow{Sx}$ (S point quelconque de OI, $\overrightarrow{Sx}$ l'une des deux demi-droites issues de S portées par OI). Nous avons $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{O\lambda}) = (\overrightarrow{O\lambda}, \overrightarrow{Ox})$, d'où les deux bissectrices d'un angle quelconque $(\overrightarrow{O\lambda}, \overrightarrow{O\lambda'})$. On définira la perpendiculaire comme la bissectrice de l'angle plat (on pourra montrer que c'est une relation symétrique). On identifiera facilement notre déplacement indirect et la symétrie par rapport à une droite et on pourra retrouver les propriétés classiques du triangle isocèle.

Applications. — I. On montrera (comme pour les segments orientés d'une droite) que l'on peut dans une égalité entre angles orientés permuter les extrêmes et aussi les moyens.

II. — Appliquant ce dernier résultat au déplacement direct déterminé par deux demi-droites ayant une origine commune O, on montrera que l'angle de deux demi-droites homologues issues de O est constant. En d'autres termes, une demi-droite de (F) étant donnée, on construit, à partir de cette demi-droite, un angle orienté égal

à un angle orienté fixe donné, le deuxième côté de l'angle construit est la demi-droite homologue. Cette construction (jointe à l'égalité OM = OM') définit une transformation ponctuelle que nous appelons rotation de centre O et d'angle $(\overrightarrow{O\lambda}, \overrightarrow{O\lambda'})$. Inversement, une rotation quelconque étant donnée, on montre facilement qu'elle est identique au déplacement direct déterminé par deux demi-droites issues de O homologues par la rotation.

III. — Exactement comme pour la droite on définira la somme de deux angles orientés quelconques, on montrera qu'elle est indépendante de l'ordre avec l'aide d'un déplacement indirect à droite invariante et qu'elle est aussi indépendante (à un déplacement direct près) du choix de la demi-droite initiale.

Exercice : Montrer que les bissectrices de deux angles adjacents et supplémentaires sont perpendiculaires (on remarquera que le produit de deux déplacements indirects est un déplacement direct et on utilisera la définition de la perpendiculaire)

Le déplacement direct du plan. — C'est lui que nous appelons $\mathcal{D}$ jusqu'à nouvel avis et nous commençons par deux cas particuliers où $\mathcal{D}$ a une droite invariante D. Nous choisissons comme demi-droites de base (les deux demi-droites homologues) deux demi-droites portées par D.

1er cas. — Les deux demi-droites sont de sens contraires, la restriction à D de $\mathcal{D}$ est un déplacement indirect, il y a un point invariant O et les deux demi-droites de base sont deux demi-droites directement opposées $\overrightarrow{O\lambda}$ et $\overrightarrow{O\lambda'}$. L'homologue d'une demi-droite $\overrightarrow{O\mu}$ est $\overrightarrow{O\mu'}$ telle que : $(\overrightarrow{O\lambda}, \overrightarrow{O\mu}) = (\overrightarrow{O\lambda'}, \overrightarrow{O\mu'})$. Changeons l'ordre des moyens $(\overrightarrow{O\lambda}, \overrightarrow{O\lambda'}) = (\overrightarrow{O\mu}, \overrightarrow{O\mu'})$. D'où :

1° L'angle $(\overrightarrow{O\mu}, \overrightarrow{O\mu'})$, comme $(\overrightarrow{O\lambda}, \overrightarrow{O\lambda'})$ est un angle plat, notre déplacement $\mathcal{D}$ est une symétrie par rapport au point O, c'est une transformation réciproque, c'est une rotation d'un angle plat.

2° Si on désigne par les lettres accentuées les demi-droites symétriques

$$(\overrightarrow{O\lambda}, \overrightarrow{O\lambda'}) = (\overrightarrow{O\mu}, \overrightarrow{O\mu'})$$

entraîne $(\overrightarrow{O\lambda}, \overrightarrow{O\mu}) = (\overrightarrow{O\lambda'}, \overrightarrow{O\mu'})$. C'est le théorème précisé, sur les angles opposés par le sommet.

Homologue d'une demi-droite quelconque : on donne une demi-droite $\overrightarrow{A\mu}$ dont le support ne passe pas par O ; son homologue est $\overrightarrow{A'\mu'}$. Soient $\overrightarrow{A\mu_1}$ et $\overrightarrow{A'\mu'_1}$ les demi-droites opposées à $\overrightarrow{A\mu}$ et $\overrightarrow{A'\mu'}$: les demi-droites $\overrightarrow{A\mu}$ et $\overrightarrow{A'\mu'}$ sont (symétrie) de part et d'autre de la droite AA', elles ne se coupent donc pas et les demi-droites $\overrightarrow{A\mu}$ et $\overrightarrow{A\mu'_1}$ sont du même côté. La transformation étant réciproque et étant un déplacement, l'homologue de $A'\mu'_1$ est $A\mu_1$. Si $A\mu$ et $A\mu'_1$ se coupent, leurs homologues $A'\mu'_1$ et $A\mu_1$ se coupent au point homologue et les droites $\mu'_1 A\mu'$ et $\mu A\mu_1$ ont deux points communs. Si nous admettons que deux droites ont au plus un point commun nous devons admettre que deux droites symétriques n'ont pas de point commun. Admettons aussi le postulat d'Euclide : nous pourrons dire que la droite symétrique de la droite $A\mu$ est *la* parallèle à $A\mu$ menée par A'.

Convenons maintenant de dire que deux demi-droites $A\lambda$ et $A'\lambda'$ portées par deux droites parallèles sont de même sens, ou de sens contraires suivant qu'elles sont du même côté, ou de part et d'autre de la droite AA' et nous pourrons préciser : deux demi-droites symétriques sont deux demi-droites parallèles et de sens contraires ; démontrer une réciproque : deux demi-droites $\overrightarrow{A\lambda}$ et $\overrightarrow{A'\lambda'}$ parallèles et de sens contraires sont symétriques par rapport au milieu O de AA' et préciser les propriétés angulaires classiques de la figure formée par deux droites parallèles coupées par une

sécante. Enfin, adjoignant à notre figure un deuxième point B et son homologue B', nous définirons l'égalité de deux vecteurs et démontrerons les propriétés du parallélogramme (déjà vues dans la 1re partie lorsque le parallélogramme est aplati). En particulier, dans une égalité entre vecteurs, on peut permuter les extrêmes et aussi les moyens.

2e cas. — Les deux demi-droites $\overrightarrow{A\lambda}$ et $\overrightarrow{A'\lambda'}$ sont de même sens.

En vertu des propriétés angulaires démontrées dans le 1er cas, l'homologue $\overrightarrow{A'\mu'}$ d'une demi-droite $\overrightarrow{A\mu}$, déterminée par l'égalité $(\overrightarrow{A'\lambda'}, \overrightarrow{A'\mu'}) = (\overrightarrow{A\lambda}, \overrightarrow{A\mu})$ est une demi-droite parallèle et de même sens. Soit un point M un point quelconque et M' son homologue on a : $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$, ce qui entraîne $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$. D'où la transformation ponctuelle du plan appelée translation. Le fait qu'un déplacement déterminé par deux demi-droites parallèles et de même sens soit une translation, le fait que la transformation ponctuelle plane translation soit un déplacement, se démontrent facilement.

Notons à ce propos que pour démontrer qu'une transformation ponctuelle et un déplacement sont identiques, il convient de montrer qu'ils transforment de la même façon tous les points. Pour démontrer que deux déplacements directs (par exemple) du plan sont identiques, il suffit de démontrer qu'ils transforment de la même façon une demi-droite.

Exercice. — Montrer que les diagonales d'un rectangle sont égales (on utilisera une symétrie-droite et une translation).

Quelques précisions. — Nous avons toujours parlé, jusqu'ici, d'angles orientés de demi-droites. Dorénavant nous pourrons remplacer, dans nos écritures les demi-droites par des vecteurs ou des droites orientées : un vecteur détermine une demi-droite, la demi-droite qui a même origine et même sens, une droite orientée, une demi-droite qui a même sens qu'un segment orienté appartenant à la 1re classe de la droite orientée. Par définition, l'angle orienté de deux demi-droites qui ont deux origines distinctes est l'angle orienté (défini à une translation près) qui est obtenu en menant par un point quelconque deux demi-droites parallèles et de même sens.

Nous introduirons, comme on le fait maintenant, la différence de deux angles orientés $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) - (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz}) = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{Oy})$ et l'opposé d'un angle orienté

$$(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Ox}) = -(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}).$$

Nous définirons le produit d'un angle orienté par un entier n comme la somme de n angles orientés égaux.

Exercice : Montrer qu'on ne change pas la différence de deux angles orientés en permutant les extrêmes ou les moyens. Application : on peut aussi permuter extrêmes et moyens dans l'égalité $n(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = n(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.

Retour sur la rotation. — Nous avons vu que dans une rotation :

$$(\overrightarrow{O\lambda}, \overrightarrow{O\mu}) = (\overrightarrow{O\lambda'}, \overrightarrow{O\mu'}),$$
$$(\overrightarrow{O\mu}, \overrightarrow{O\mu'}) = (\overrightarrow{O\lambda}, \overrightarrow{O\lambda'}).$$

Ces deux égalités « concrétisent » le double aspect de l'angle orienté :

a) angle orienté qui a pour premier côté $\overrightarrow{O\lambda}$, pour deuxième côté $\overrightarrow{O\mu}$;

b) angle « dont il faut faire tourner $\overrightarrow{O\lambda}$ pour l'amener sur $\overrightarrow{O\lambda'}$ ».

On pourrait maintenant raccorder à l'exposé traditionnel, en introduisant les rotations concrètes et leurs mesures algébriques. On peut aussi s'en passer. Le déplacement direct du plan le plus général est déterminé par deux demi-droites homologues. On examinera comment est transformée par une rotation une demi-droite $\overrightarrow{A\lambda}$.

1er cas : le support de $\overrightarrow{A\lambda}$ passe par O ;

2e cas : le support de $\overrightarrow{A\lambda'}$ ne passe pas par O, mais la projection de O sur Aλ est en A ;

3e cas : aucune de ces circonstances ne se produit.

Le cas des demi-droites parallèles a déjà été examiné.

En s'aidant d'une symétrie on montrera que le centre de la rotation est sur la bissectrice de $(\overrightarrow{I\lambda_1}, \overrightarrow{I\lambda'})$ I étant le point commun aux deux supports homologues et $\overrightarrow{I\lambda_1}$ la demi-droite opposée à $\overrightarrow{I\lambda}$.

D'où une position nécessaire pour le centre de la rotation et on démontrera ainsi que tout déplacement direct du plan, qui n'est pas une translation, est une rotation.

Remarque. — Analogue à celle qui termine l'étude du déplacement sur la droite.

Angles de droites. — Les angles orientés de demi-droites sont trop précis : ce n'est pas par l'intersection de deux demi-droites que l'on peut, le plus souvent, déterminer un point. Nous dirons que deux angles orientés de droites non orientées D et Δ d'une part, D′ et Δ′ d'autre part, sont égaux s'il existe un déplacement direct du plan par lequel D a pour homologue D′ et Δ, Δ′. Soit A et A′ les points communs à D et Δ d'une part, D′ et Δ′ d'autre part. En introduisant les demi-droites d'origine A et A′ on peut voir :

1° que si les angles sont égaux, ce que nous écrivons $(D, \Delta) = (D', \Delta')$, nous avons, soit l'une, soit l'autre égalité entre les angles de demi-droites et que, inversement, l'une des égalités entre angles de demi-droites entraîne l'égalité entre angles de droites. Ceci permet d'étendre aux angles de droites les calculs sur les angles de demi-droites ;

2° que si les angles sont égaux, ils se correspondent, non par un déplacement, mais par deux déplacements. Appelons I et J, respectivement, les points communs à D et D′ d'une part, à Δ et Δ′ d'autre part ; les centres des deux rotations ω et ω′ sont les points communs à la médiatrice de AA′ et aux bissectrices des angles en I (et aussi en J). On montre assez facilement (déplacement, symétrie, définition de la perpendiculaire) que les angles $\widehat{\omega A \omega'}$ et $\widehat{\omega A' \omega'}$ sont droits ; d'où la propriété du cercle : les point I, J, A et A′ appartiennent au cercle de diamètre ωω′.

La considération des bissectrices de $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'})$ et des angles des deux rotations permet de préciser et d'écrire les égalités d'angles de demi-droites :

$$(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega A'}) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'})$$

par exemple.

Enfin, on peut remarquer que l'égalité entre angles de droites $(D, D') = (\Delta, \Delta')$ est équivalente à l'égalité entre angles de droites orientées $2(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D'}) = 2(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta'})$.

Déplacement dans l'espace. — Dans les deux études antérieures : déplacement sur une droite, déplacement sur un plan, nous avons postulé (implicitement) qu'il existait des segments égaux, des angles égaux et que, si ces deux segments ou ces deux angles étaient orientés, la « superposition » ne pouvait être réalisée que d'une seule façon. Dans l'espace, nous utiliserons les dièdres orientés. Il sera honnête de souligner au départ que la superposition de deux dièdres orientés égaux peut être réalisée d'une infinité de façons et d'admettre aussi, explicitement, que, le dièdre $(P, \overrightarrow{D}, Q)$ étant donné, ainsi que le demi-plan P′ avec son arête orientée $\overrightarrow{D'}$, l'indétermination signalée n'empêche pas l'unicité du demi-plan Q′ satisfaisant à l'égalité

$$(P', \overrightarrow{D'}, Q') = (P, \overrightarrow{D}, Q)$$

Orienter l'espace sera, comme précédemment : 1° distinguer deux classes de dièdres orientés ; 2° ordonner cet ensemble formé de deux classes. Par un déplacement un dièdre orienté ne change pas de classe. (On fera, sans rougir, appel à l'observateur, à sa droite et à sa gauche).

Les deux éléments homologues de base seront chacun composés d'un demi-plan P, de son arête $\overrightarrow{D}$ orientée par une demi-droite $\overrightarrow{A\lambda}$. On a proposé d'appeler le tout un « volet ». Nous admettrons qu'étant donnés deux volets V et V', il existe un déplacement par lequel V a pour homologue V' ; alors la construction de l'homologue M' d'un point M quelconque par ce déplacement est celle que l'on connaît et il en résulte que le déplacement est unique.

La translation sera étudiée facilement : V et V' ne diffèrent que par la position du gond. On pourra, en exercice, en s'appuyant sur les résultats obtenus précédemment retrouver les propriétés des droites et plans parallèles.

On pourrait ensuite définir *a priori* une transformation ponctuelle analogue au déplacement et où les dièdres homologues n'appartiendraient pas à la même classe. On étudierait ce retournement dans le cas où les deux volets de base auraient leur arête commune ; mais on ne peut pas dire que la figure (F') est la même figure avec ses droites et ses plans, qui est allée se « retourner » dans l'espace extérieur. Il sera, je crois, sage de faire appel à la notion de perpendicularité acquise dans la classe antérieure et de montrer ainsi l'équivalence du déplacement déterminé par les volets $(\overrightarrow{A\lambda}, P)$ et $(\overrightarrow{A\lambda}, P')$ et de celui qui est déterminé par $(\overrightarrow{A\mu}, Q)$ et $(\overrightarrow{A\mu'}, Q)$. $A\mu$ et $A\mu'$ étant les perpendiculaires menées dans P et P', respectivement, à $A\lambda$ et Q le plan perpendiculaire en A à $A\lambda$. De cette équivalence on déduira toutes les propriétés de la rotation dans l'espace.

G. Delpla (*Lycée H.-Poincaré*).